

Hannes Leitgeb

Logik I

Eine Einführung in die
klassische Aussagen- und Prädikatenlogik

Stand: 12.10.2015

Inhalt

0	Einleitung	7
1	Vorbemerkungen	19
1.1	Sprachliche Ausdrücke	19
1.2	Verwendung und Erwähnung	22
1.3	Aussagesätze	26
1.4	Übungen	31
I	Aussagenlogik	35
2	Aussagenlogische Analyse	37
2.1	Einfache Aussagesätze	37
2.2	Komplexe aussagenlogisch zerlegbare Sätze	40
2.2.1	Negationssätze	41
2.2.2	Konjunktionssätze	42
2.2.3	Disjunktionssätze	44
2.2.4	Implikationssätze	46
2.2.5	Äquivalenzsätze	54
2.2.6	Aussagenlogische Zerlegbarkeit	55
2.3	Komplexe aussagenlogisch unzerlegbare Sätze	56
2.4	Klassifikation von Aussagesätzen	62
2.5	Argumente	62
2.6	Übungen	65
3	Aussagenlogische Repräsentierung	69
3.1	Repräsentierung von Aussagesätzen	70
3.1.1	Ein “Rezept” zur Repräsentierung	70
3.1.2	Einige Beispiele zur Repräsentierung	79
3.2	Repräsentierung von Argumenten	84
3.3	Übungen	86
4	Die aussagenlogische Sprache	87
4.1	Das Alphabet der aussagenlogischen Sprache	87
4.2	Die Grammatik der aussagenlogischen Sprache	89
4.3	Aussagenlogische Argumentformen	93
4.4	Klammerersparnisregeln	93
4.5	Übungen	96

5	Die aussagenlogische Semantik	99
5.1	Wahrheitstafeln	99
5.1.1	Wahrheitstafeln für Aussagesätze und Formeln	100
5.1.2	Wahrheitstafeln für Argumente und Argumentformen	108
5.2	Eine formale Semantik für die Aussagenlogik	112
5.2.1	Aussagenlogische Interpretationen	112
5.2.2	Aussagenlogische Bewertungen	114
5.2.3	Kontingente, tautologische und kontradiktorische Formeln	117
5.2.4	Logische Folge und logische Äquivalenz	120
5.2.5	Gültige und ungültige Argumentformen	122
5.2.6	Übertragung der Definitionen auf Aussagesätze und Argumente	124
5.3	Übungen	126
6	Aussagenlogisches Herleiten	129
6.1	Logische Systeme	129
6.2	Ein System des natürlichen Schließens	132
6.3	Zusammenfassung der Regeln unseres aussagenlogischen Systems des natürlichen Schließens	145
6.4	Faustregeln für das aussagenlogische Herleiten	146
6.5	Deduktive Gültigkeit, Beweisbarkeit und abgeleitete Schlussregeln	148
6.6	Korrektheit und Vollständigkeit von \vdash	152
6.7	Übertragung der Definitionen auf Aussagesätze und Argumente	153
6.8	Weitere Arten von Systemen des Schließens	153
6.9	Übungen	156
7	Appendix: Nochmals die materiale Implikation	157
II	Prädikatenlogik	161
8	Prädikatenlogische Repräsentierung	163
8.1	Prädikatenlogische Argumente und Argumentformen	174
8.2	Übungen	178
9	Die prädikatenlogische Sprache	181
9.1	Das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache	181
9.2	Die Grammatik der prädikatenlogischen Sprache	183
9.3	Arten von Variablenvorkommnissen	189
9.4	Übungen	196

10 Die prädikatenlogische Semantik	199
10.1 Prädikatenlogische Interpretationen	204
10.2 Variablenbelegungen	205
10.3 Wahrheit und Falschheit	208
10.4 Die semantischen Begriffe für die Prädikatenlogik	216
10.5 Übungen	224
11 Prädikatenlogisches Herleiten	229
11.1 Die zusätzlichen Herleitungsregeln der Prädikatenlogik	229
11.2 Zusammenfassung der Regeln unseres prädikatenlogischen Systems des natürlichen Schließens	244
11.3 Zusätzliche Faustregeln für das prädikatenlogische Herleiten	246
11.4 Korrektheit und Vollständigkeit von \vdash für die Prädikatenlogik	246
11.5 Übungen	248
12 Appendix: Die materiale Implikation und Prädikatenlogik	251
13 Erweiterungen der Prädikatenlogik	255
13.1 Das Identitätsprädikat als neues logisches Zeichen	255
13.2 Andere sprachliche Erweiterungen von prädikatenlogischen Sprachen	263
14 Epilog	265

Kapitel 0

Einleitung

dass die Logik diesen sicheren Gang schon von den ältesten Zeiten her gegangen sei, läßt sich daran ersehen, dass sie seit dem Aristoteles keinen Schritt rückwärts hat tun dürfen. . . Merkwürdig ist noch an ihr, dass sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint.

. . . die Grenze der Logik aber ist dadurch ganz genau bestimmt, dass sie eine Wissenschaft ist, welche nichts als die formalen Regeln des Denkens (es mag a priori oder empirisch sein, einen Ursprung oder Objekt haben, welches es wolle, in unserem Gemüte zufällige oder natürliche Hindernisse antreffen) ausführlich darlegt und strenge beweist.

(Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, 2. Originalausgabe, Hamburg: Meiner, 1990)

Ich habe. . . den Eindruck, dass die Logik, die in den Schulen vertreten wird, so weit von jener Logik entfernt ist, die nützlich für die Leitung des Geistes hinsichtlich der Erforschung der verschiedenen Wahrheiten ist, wie sich die Knabenarithmetik von der Algebra eines bedeutenden Mathematikers unterscheidet. . . . Im privaten Bereich aber ist es höchste Zeit, dass Fachleute der Analytik eine Logik zur Vollendung bringen, die geeignet ist, die einzelnen Untersuchungen zu leiten, also einen LEITFADEN DES DENKENS. Da nämlich heutzutage ein so umfangreiches Material hervorragender Gedanken vorhanden ist, bleibt es nur noch übrig, diesen eine Form zu verleihen. Einen LEITFADEN DES DENKENS aber nenne ich eine bestimmte leichte und sichere Methode, mit der wir,

wenn wir ihr folgen, ohne Beunruhigung des Geistes, ohne Streitigkeiten, ohne Furcht zu irren nicht weniger sicher voranschreiten als jemand, der im Labyrinth einen Ariadnefaden zur Verfügung hat. Und ich meine, dass eine solche Methode in unserer Macht steht und mit nicht allzu großer Schwierigkeit erstellt werden kann und dass diese so evident sein wird, dass sie alle Kontroversen ohne Widerspruch beendet, ganz und gar so wie jene [Kontroversen], die im Bereich der Zahlenkalküle auftreten können, von einem erfahrenen Arithmetiker entweder alleine oder unter Hinzuziehung eines Mitarbeiters ohne Schwierigkeit beendet werden. Ich meine, dass der Gebrauch dieser Methode unter die höchsten Güter zu zählen ist, die dem Menschengeschlecht zuteil werden könnten.

(Gottfried Wilhelm Leibniz, *Die Grundlagen des logischen Kalküls*, hg. von F. Schupp, Hamburg: Meiner, 2000)

Wie muss ich denken, um das Ziel, die Wahrheit zu erreichen? Die Beantwortung dieser Frage erwarten wir von der Logik, aber wir verlangen nicht von ihr, dass sie auf das Besondere jedes Wissensgebiets und deren Gegenstände eingehe; sondern nur das Allgemeine, was für alle Gebiete des Denkens Geltung hat, anzugeben, weisen wir der Logik als Aufgabe zu. Die Regeln für unser Denken und Fürwahrhalten müssen wir bestimmt denken durch die Gesetze des Wahrseins. Mit diesen sind jene gegeben. Wir können mithin auch sagen: Die Logik ist die Wissenschaft der allgemeinsten Gesetze des Wahrseins.

(Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften*, hg. von H. Hermes, F. Kambartel und F. Kaulbach, Hamburg: Meiner, 1983)

Ich bin... überzeugt, dass wir in einer durchaus endgültigen Wendung der Philosophie mitten darin stehen und dass wir sachlich berechtigt sind, den unfruchtbaren Streit der Systeme als beendet anzusehen. Die Gegenwart ist, so behaupte ich, bereits im Besitz der Mittel, die jeden derartigen Streit im Prinzip unnötig machen; es kommt nur darauf an, sie entschlossen anzuwenden.

Diese Mittel sind in aller Stille, unbemerkt von der Mehrzahl der philosophischen Lehrer und Schriftsteller, geschaffen worden, und so hat sich eine Lage gebildet, die mit allen früheren unvergleichbar ist. Daß die Lage wirklich einzigartig und die eingetretene Wendung wirklich endgültig ist, kann nur eingesehen werden, indem man sich mit den neuen Wegen bekannt macht und von

dem Standpunkte, zu dem sie führen, auf alle die Bestrebungen zurückschaut, die je als “philosophische” gegolten haben.

Die Wege gehen von der Logik aus.

(Moritz Schlick, “Die Wende der Philosophie”, *Erkenntnis* 1 (1930))

Bevor wir beginnen: Logik ist *die* wissenschaftliche Erfolgsgeschichte des 20. Jahrhunderts: Googlen Sie doch mal

Gödel Time 100

Wittgenstein Time 100

Turing Time 100

Wir gehen ein paar Jahre zurück. Es ist Anfang Oktober 2010.

Hannes Leitgeb, der im Begriff ist, nach München umzuziehen, trifft Herrn P (‘P’ für ‘Philosoph’) auf der Straße.

H: Hallo!

P: ...

H: (Lauter) *Hallo!!*

P: (Aufblickend) Hallo! Entschuldige bitte: Ich war gerade am philosophischen Grübeln. Die Welt ist so tief, philosophisch, weißt du? Na ja, vielleicht weißt du das auch nicht. Ich habe gehört, dass du nach München gehst. Hast du dich schon eingerichtet? Wie steht es mit deinem Büro?

H: Alles noch in Arbeit. Nichts ist in meinem Büro, nichts ist in meinem Sekretariat.

P: Was, nichts – also das Nichts – ist in deinem Büro? HUUU... das ist ja zum Fürchten. Und wie geht denn das überhaupt: Nichts ist doch auch in deinem Sekretariat. Ich schließe: Das Nichts kann zugleich an zwei verschiedenen Orten sein. Und wenn nichts in deinem Büro ist, dann folgt doch auch, dass zumindest etwas in deinem Büro ist. Es ist also zugleich nichts und etwas in deinem Büro. Und...

H: Das ist alles Unsinn. Wenn du ‘Nichts ist in meinem Büro’ und ‘Nichts ist in meinem Sekretariat’ richtig logisch repräsentierst, wirst du merken, dass es nicht von derselben logischen Form ist wie – sagen wir – ‘Der Tisch ist in meinem Büro’, sondern vielmehr nur soviel heisst wie: Es ist nicht der Fall, dass etwas in meinem Büro ist, es ist nicht der Fall, dass etwas in meinem Sekretariat ist. ‘Nichts’ ist überhaupt kein Name für ein Objekt und schon gar nicht für ein Objekt, das an zwei verschiedenen Orten zugleich sein könnte.

Und weil ‘nichts’ kein Name für ein Objekt ist, kann man auch nicht aus ‘Nichts ist in meinem Büro’ folgern, dass etwas in meinem Büro ist. Vielmehr widersprechen ‘Nichts ist in meinem Büro’ und ‘Etwas ist in meinem Büro’ einander.

P: Dann bin ich ja beruhigt. Erzähl weiter!

H: Nichts ist also in meinem Büro, nichts ist in meinem Sekretariat. Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro. . .

P: Moment: Das ist sehr interessant. Sagen wir, er wird geliefert: Nach dem, was du sagst, wird dann einerseits dein Schreibtisch mit dem Lastwagen geliefert, andererseits stellst du ihn in dein Büro. Der Schreibtisch hat also diese zwei Eigenschaften: Mit dem Lastwagen geliefert zu werden und von dir in dein Büro gestellt zu werden. Aber wie kann er denn diese beiden Eigenschaften zugleich haben? Einerseits fährt er mit dem Lastwagen herum, andererseits schiebst du ihn ins Büro hinein. Aha, ich verstehe: Der Schreibtisch hat zueinander widersprüchliche Eigenschaften. Darin drückt sich wohl die Veränderung, das Werden aus. Dinge, die sich verändern, haben widersprüchliche Eigenschaften. Aber letztlich verändert sich doch alles: Also hat alles widersprüchliche Eigenschaften. Das erinnert mich an meine Habilitationsschrift, in der ich. . .

H: Nein, nein, nein: Der Schreibtisch hat diese Eigenschaften gar nicht zugleich. Genauer: ‘wird mit dem Lastwagen geliefert’ drückt gar keine Eigenschaft aus, nur ‘wird mit dem Lastwagen *zum Zeitpunkt t* geliefert’ drückt eine Eigenschaft aus. Genauso drückt ‘stelle ich ins Büro’ keine Eigenschaft aus, weil man wiederum hinzusagen muss, *wann* ich dieses und jenes ins Büro stelle. Was ich vorher meinte, war selbstverständlich nur: Wenn mein Schreibtisch zum Zeitpunkt t mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn zu einem späteren Zeitpunkt t' in mein Büro. Es ist auch gar nicht widersprüchlich, zu einem Zeitpunkt mit dem Lastwagen geliefert zu werden und zu einem anderen Zeitpunkt von mir ins Büro gestellt zu werden. Selbiges gilt übrigens genau genommen auch für ‘Nichts ist in meinem Büro’ und ‘Nichts ist in meinem Sekretariat’: Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist nichts in meinem Büro, und zu einem bestimmten Zeitpunkt ist nichts in meinem Sekretariat. Man läßt diese zeitlichen Relativierungen in der natürlichen Sprache nur oft weg, aber in der eigentlichen logischen Form dieser Sätze sind dieselben selbstverständlich vorhanden.

P: Schade eigentlich: Ich war gerade dabei, ein paar tiefe Einsichten in die Welt zu gewinnen. . .

H: Nur scheinbar.

P: Lassen wir das. Erzähl weiter.

H: Nichts ist in meinem Büro, nichts ist in meinem Sekretariat. Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro. Angenommen, ich stelle ihn in mein Büro: . . .

P: Was heißt ‘angenommen’? Du hast doch gerade gesagt, dass du ihn in dein Büro stellen wirst.

H: Ich habe nur gesagt: *Wenn er mit dem Lastwagen geliefert wird*, dann stelle ich ihn in mein Büro. Wenn er nicht mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn vielleicht gar nicht in mein Büro. Das Ding ist nämlich schwierig zu transportieren. Also: Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro. Angenommen, ich stelle ihn in mein Büro: . . .

P: (Triumphierend) . . . dann muss es der Fall sein, dass er mit dem Lastwagen geliefert worden ist!

H: Hmm. Eigentlich nicht. Du darfst zwar aus ‘Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro’ und ‘Mein alter Schreibtisch von daheim ist mit dem Lastwagen geliefert worden’ folgern, dass ich den Schreibtisch in mein Büro stelle. Aber du darfst nicht aus ‘Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro’ und ‘Ich stelle meinen alten Schreibtisch von daheim in mein Büro’ folgern, dass mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert worden ist. Denn der Schreibtisch könnte ja vielleicht auch mit einem grossen PKW geliefert worden sein: Stell Dir vor, das wäre so. Wenn ich ihn dann ins Büro stellte, dann wäre ‘Ich stelle meinen alten Schreibtisch von daheim in mein Büro’ wahr. Und ‘Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro’ haben wir ja von vornherein als wahr vorausgesetzt. Deine Konklusion, dass mein Schreibtisch mit dem Lastwagen geliefert wurde, wäre dann aber falsch. Es muß also – gegeben das, was ich gesagt habe – keineswegs so sein, dass der Schreibtisch mit dem Lastwagen geliefert worden ist.

P: Ich wollte nicht unterbrechen. Du wolltest sagen. . .

H: Angenommen, ich stelle ihn in mein Büro: Stelle ich ihn dann vom Eingang aus gesehen links auf oder rechts?

P: Die Frage ist jetzt aber keine philosophische Frage.

H: (Verwundert) Natürlich nicht. Ich erzähle doch nur von meinem zukünftigen Büro.

P: Ha! Jetzt wird es aber doch philosophisch: Dein zukünftiges Büro? Wie kannst du denn jetzt von etwas erzählen, dass es erst in der Zukunft geben wird? Das hieße doch: Es gibt jetzt etwas, dass es jetzt noch gar nicht gibt. Ich möchte da gleich noch einmal zurückkommen, auf meine frühere Idee, das

Werden durch. . .

H: Bitte nicht. Logisch betrachtet gibt es nur etwas, das diese und jene Eigenschaften hat, oder es gibt so etwas eben nicht. Es gibt z.B. ein Büro des Herrn Hannes Leitgeb, welches – sagen wir – mit dem 12. November 2010 von mir bezogen wird, dann bis zum Zeitpunkt meiner Pensionierung mehr oder weniger unverändert bleibt, und mit dem Zeitpunkt meiner Pensionierung von meinem Nachfolger oder meiner Nachfolgerin auseinandergenommen wird. Ich kann jetzt von diesem meinem Büro sprechen, so wie ich von allen anderen Dingen, die zu bestimmten Zeitpunkten bestimmte Eigenschaften haben, sprechen kann. Und dein ‘Es gibt jetzt etwas, das es jetzt noch gar nicht gibt’ ist nicht ganz präzise formuliert. Was du eigentlich meinst, ist nur: Es gibt etwas, das vom 12. November 2010 bis zum Zeitpunkt meiner Pensionierung mein Büro ist, und außerdem ist es der Fall, dass das heutige Datum vor dem 12. November 2010 liegt. Na und? Daran ist doch gar nichts bedenklich? Du kannst doch auch von Aristoteles reden, obwohl er bereits 322 v. Chr. verstorben ist. Aristoteles hat die Eigenschaft, von 384 v. Chr. bis 322 v. Chr. gelebt zu haben. Das kann ich doch jetzt sagen.

P: Stimmt: Von Aristoteles möchte ich eigentlich schon reden können. Ich bin ja ein Philosoph. Trotzdem beunruhigt mich das.

H: Was?

P: Es ist doch so: Aristoteles hat am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens in der Nase gebohrt, oder Aristoteles hat am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens nicht in der Nase gebohrt.

H: Natürlich: Dieser Satz ist – wie die Logiker sagen – logisch wahr. Er ist wahr rein aufgrund der Bedeutung der Ausdrücke ‘oder’ und ‘nicht’. Egal wie die Welt wäre, der Satz könnte gar nicht falsch sein. Und alle Sätze derselben logischen Form müssen ebenfalls wahr sein.

P: Aber wenn es keine Zeitreisen gibt, dann ist es doch vermutlich so, dass wir niemals herausfinden können, ob Aristoteles nun am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens in der Nase gebohrt hat oder nicht.

H: Und?

P: Ja ist das nicht ein Problem?

H: Gar nicht. Es ist doch nur so, dass es entweder wahr ist, dass Aristoteles am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens in der Nase gebohrt hat, oder dass dies falsch ist. Aber etwas kann durchaus wahr oder falsch sein, ohne dass wir herausfinden können, welche der beiden Alternativen eintritt oder eingetreten ist. Es ist wahr, dass am Mars auf den Koordinaten so-und-so ein grüner Stein mit einem Durchmesser von einem Meter liegt, oder aber das ist falsch. Dies ist so ganz unabhängig davon, was wir darüber wissen oder was wir darüber wissen können. Wahrheit ist etwas anderes als Wissen oder

Wissbarkeit.

P: Ich sehe, was du meinst. Einverstanden. Aber hat Aristoteles nun am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens in der Nase gebohrt?

H: Keine Ahnung, wie soll ich das wissen? Das ist auch gar keine philosophische Frage, sondern eine empirische. Davon solltest du die Finger lassen.

P: Stimmt. Ich bin ja ein Philosoph.

H: Darf ich jetzt endlich von meinem Büro weitererzählen?

P: Gerne.

H: Nichts ist in meinem Büro, nichts ist in meinem Sekretariat. Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro. Angenommen, ich stelle ihn in mein Büro: Stelle ich ihn dann vom Eingang aus gesehen links auf oder rechts? Und...

P: Soll ich dazu jetzt sagen, ob dies wahr oder falsch ist?

H: (Noch verwunderter) Wie könntest Du? Ich habe doch nur eine Frage gestellt. Fragen sind aber keine Aussagesätze – anders ausgedrückt: Fragen sind weder wahr noch falsch. Nur die Antwort auf eine Frage kann wahr oder falsch sein.

P: Ah, ja. Und...

H: Und noch etwas beschäftigt mich: Die Ludwigstrasse 31 ist das Gebäude, in dem sich mein Büro befinden wird...

P: Halt! Das kann gar nicht so sein.

H: ??? Das steht aber doch in meinem Vertrag...

P: In der Sprache der Mathematiker ausgedrückt, hast du gerade behauptet:

$$\text{Ludwigstrasse 31} = \text{das Gebäude, in dem sich Hannes Leitgebs Büro befinden wird}$$

H: Ganz genau.

P: Das kannst du aber gar nicht so meinen. Die linke Seite dieser Gleichung fängt ja mit einem 'L' an, während die rechte Seite mit einem 'd' beginnt. Wie sollen die beiden dann identisch sein? Oder können verschiedene Dinge identisch zueinander sein? Das bringt mich zu meinen früheren...

H: Bitte nicht schon wieder!! Ein und dasselbe Ding kann doch ohne weiteres mehrere Namen haben. Ein und dieselbe Örtlichkeit kann zugleich mit dem Namen 'Ludwigstrasse 31' und mit der Kennzeichnung 'das Gebäude, in dem sich Hannes Leitgebs Büro befinden wird' bezeichnet werden. Mein kleiner Sohn heißt ja auch 'Sebastian', und wir bezeichnen ihn dennoch manchmal mittels allerlei Spitznamen. Der eine Name, den ich verwendet habe, um über die Örtlichkeit zu sprechen, die mich interessiert, beginnt mit einem 'L', der andere Name mit einem 'd', aber beide Namen beziehen sich auf dasselbe Objekt. Und die Gleichung sagt nicht aus, dass die Namen identisch sind, sondern

dass das, was der eine Name bezeichnet, identisch ist dem, was der andere Name bezeichnet. Aristoteles ist doch auch identisch mit dem philosophischen Lehrer Alexanders des Großen?

P: Stimmt, das erzähle ich ja auch meinen Studentinnen und Studenten. Dennoch habe ich immer noch Sorgen.

H: Was denn noch?

P: Aristoteles ist der philosophische Lehrer Alexanders. Das heisst: Aristoteles ist identisch dem philosophischen Lehrer Alexanders.

H: Ja.

P: Aristoteles ist ein Philosoph. Heisst das dann: Aristoteles ist identisch dem Philosophen? Aha: Das würde erklären, warum Aristoteles im Mittelalter als ‘der Philosoph’ bezeichnet wurde. Nur: Platon ist auch ein Philosoph. Heisst das dann: Platon ist identisch dem Philosophen? Und wenn beide mit dem Philosophen identisch sind, sind sie dann nicht einander identisch? Bezeichnet ‘Aristoteles’ dasselbe Objekt wie ‘Platon’? Oh: Ist vielleicht alles eins, und...

H: Du hast nur die logische Form dieser Sätze missverstanden. ‘Aristoteles ist der philosophische Lehrer Alexanders’ ist in der Tat ein Identitätssatz, so wie der frühere Satz über die Ludwigstrasse 31. Aber ‘Aristoteles ist ein Philosoph’ ist kein Identitätssatz, noch ist ‘Platon ist ein Philosoph’ ein solcher. Daher darfst du auch nicht so schließen, wie du es getan hast.

P: Aber wie soll ich das denn erkennen? In beiden Fällen steht einfach nur ‘ist’.

H: Das ist der Grund, warum in Logikvorlesungen eine Symbolsprache eingeführt wird, in der das ‘ist’ in ‘Aristoteles ist der philosophische Lehrer Alexanders’ klar unterschieden ist vom ‘ist’ in ‘Aristoteles ist ein Philosoph’. Die natürliche Sprache kann einen sonst zu leicht verwirren und Probleme schaffen, wo eigentlich gar keine sind. So wie auch bei ‘Nichts ist in meinem Büro’: In der logischen Symbolsprache wird es sonnenklar, inwiefern sich ‘Nichts ist in meinem Büro’ von ‘Der Tisch ist in meinem Büro’ unterscheidet und was man aus dem einen Satz, nicht aber aus dem anderen Satz schließen darf. Und dies obwohl die beiden Sätze in der natürlichen Sprache so aussehen, als wären sie ganz ähnlich geformt. Deswegen wird meine Logik 1 Vorlesung auch ihren ersten Schwerpunkt auf das Thema logische Repräsentierung legen.

P: Vielleicht sollte ich doch mal eine Logikvorlesung besuchen.

H: (Leicht verzweifelt) Bitte!

P: Was ist jetzt mit der Ludwigstrasse 31?

H: Die Ludwigstrasse 31 ist das Gebäude, in dem sich mein Büro befinden wird. Aber die Ludwigstrasse 31 gilt auch als der Ort, an dem so seltsame Dinge wie Logik und Wissenschaftstheorie beheimatet sind, vor denen sich

die Studierenden angeblich fürchten. Werden sie sich trauen, mich in meinem zukünftigen Büro besuchen zu kommen?

P: Die werden schon zur Ludwigstrasse 31 kommen. Schon weil man dort auch zu anderen Lehrstühlen weitergehen kann. (Grinst)

H: Weißt du, in der Ludwigstrasse 31 gründe ich auch das neue Munich Center for Mathematical Philosophy, das ganz toll werden wird. Weltweit begeistern sich nämlich gerade ungemein viele junge Philosophen und Philosophinnen für die Anwendung logischer und mathematischer Methoden in der Philosophie, es herrscht große Begeisterung und Aufregung darüber, alles ist in einer ähnlichen Aufbruchsstimmung wie damals beim Wiener Kreis, München wird weltweit führend darin sein, und es wäre so schade, wenn unsere Studierenden daran nicht teilhätten.

P: Beruhige dich. Vielleicht komme ich dich ja auch mal besuchen und mit ein bisschen Glück kann ich sogar eine Studentin oder einen Studenten überreden, mich zu begleiten.

H: Das ist nett.

P: Aber jetzt muss ich weiter über die wirklich tiefen Fragen nachdenken. (Senkt den Kopf, murmelt) Wenn die Studierenden in Herrn Leitgeb's Büro in die Ludwigstrasse 31 gehen, das Nichts immer noch dort ist, Herrn Leitgeb's Schreibtisch sowohl mit einem Lastwagen geliefert als auch in sein Büro geschoben wird, und zugleich Aristoteles und Platon der Philosoph sind: Verdrängen die Studierenden das Nichts aus dem Büro, bewegt es sich dann weiter in den Lastwagen, oder war es vielmehr immer schon dort, und bin vielleicht sogar ich eins mit Aristoteles und Platon? Und Herr Leitgeb mit mir? Rede ich die ganze Zeit mit mir selbst? Ist das Nichts, das dann in dem Lastwagen sein wird, identisch mit dem Nichts, das jetzt in meinem bzw. in Aristoteles' Büro in der Ludwigstrasse 31 ist, und das, obwohl Aristoteles schon tot ist, ich aber nicht? Und wenn Fragen nicht wahr oder falsch sind: Dann muss ich sie doch auch gar nicht beantworten. ... (Winkt und geht weg)

H: Bis bald. Ich sehe dich dann in meiner Vorlesung. (Wischt sich über die Stirn)

Diese Vorlesung wendet sich – wie schon der Titel besagt – an Philosophen, die die Grundzüge der klassischen Aussagen- und Prädikatenlogik kennenlernen wollen (oder müssen :-).

Eine der grundlegenden Aufgaben der Philosophischen Logik ist es, die *logische Form* sprachlicher Ausdrücke herauszuarbeiten, d.h., die logisch relevanten Bestandteile von Ausdrücken zu identifizieren, zu kategorisieren und die

Art und Weise, wie sie zusammengesetzt sind, zu bestimmen. Denn erst wenn feststeht, was überhaupt die logische Form von sprachlichen Ausdrücken ist, können wir angeben, welche logischen Eigenschaften sie haben und in welche logischen Beziehungen sie eintreten, also, ob etwa ein Aussagesatz wahr oder falsch ist, welche anderen Sätze aus dem Satz folgen, durch welche Sätze er impliziert wird, ob er widersprüchlich ist, etc.

Was genau sprachliche Ausdrücke sind und um welche sprachlichen Ausdrücke es der Logik im besonderen geht, werden wir gleich im nächsten Kapitel behandeln. Im Idealfall sollten wir zu jedem sprachlichen Ausdruck der Umgangssprache genau eine “richtige” logische Form finden. Das ist jedoch illusorisch. Die Umgangssprache ist viel zu vage und mehrdeutig, als dass wir in jedem Falle von *der* logischen Form eines umgangssprachlichen Ausdrucks sprechen können. Oft gelingt uns jedoch eine recht gute Annäherung, und falls wir Zweifel hegen, ob wir die (oder eine) “richtige” logische Form gefunden haben, so kann eine solche gefundene logische Form zumindest für einen gewissen Zweck dienlich sein, und falls sie sich nicht als zweckdienlich erweist, so können wir immer noch eine andere Form wählen. Dies alles trägt in jedem Falle zu einem besseren Verständnis unserer Sprache bei und dadurch indirekt auch zu einem besseren Verständnis dessen, worüber unsere Sprache spricht, nämlich der Welt. So können wir Missverständnisse vermeiden, die zu den verschiedensten unliebsamen Konsequenzen führen. Denken wir beispielsweise an folgendes Argument: *Alle schlauen Menschen sind Füchse. Alle Füchse haben vier Beine. Daher haben alle schlauen Menschen vier Beine.* Der Grund, warum wir dieses Argument intuitiv nicht als gültig ansehen, ist, dass wir den Ausdruck ‘Füchse’ in zwei verschiedenen Bedeutungen verwenden, nämlich einmal in einem metaphorischen und einmal in einem zoologischen Sinn. In einer logischen Sprache könnte uns das nicht passieren, denn dort müssen wir die beiden Vorkommnisse von ‘Füchse’ durch verschiedene logische Zeichen repräsentieren. Genauso: Der Kontroverse “*Zahlen existieren.*” “*Nein: Zahlen existieren nicht!*” “*Doch!*” können einerseits unterschiedliche ontologische Theorien zu Zahlen zugrundeliegen, andererseits aber auch unterschiedliche Auffassungen der Bedeutung von ‘existieren’ (z.B. ‘existiert als Objekt oder Individuum egal welcher Art’ versus ‘existiert als physikalisches Objekt, welches in Raum und Zeit lokalisiert und mit kausalen Kräften versehen ist’). Im ersteren Fall geht es um einen echten wissenschaftlichen Wettstreit darum, welche die bessere philosophische Theorie der Natur der Zahlen ist, der zweite Fall jedoch wäre bloß das Resultat eines Missverständnisses, welches durch die logische Analyse sprachlicher Ausdrücke vermieden oder zumindest unwahrscheinlicher gemacht werden kann.

Wenn wir also eine logische Form für die sprachlichen Ausdrücke angege-

ben haben, können wir zur zweiten wichtigen Aufgabe der Logik übergehen, nämlich sprachlichen Ausdrücken *logische Eigenschaften* und *Beziehungen* zuzuschreiben. Wir tun dies ohnehin oft – ganz nebenbei –, selbst wenn wir die Logik noch gar nicht beherrschen. Wenn beispielsweise jemand behauptet, dass Herbert ein Philosophiestudent ist, und wenn wir bereits wissen, dass alle Philosophiestudierenden Logik lernen, dann folgern wir zurecht daraus, dass Herbert Logik lernt. Eine wichtige logische Beziehung ist also z.B. die der *logischen Folge*. Wir wenden logische Folgerungen aber nicht nur im Alltag an, sondern vor allem auch in den Wissenschaften. In allen exakten Wissenschaften gibt man nämlich Theorien dadurch an, dass man gewisse Sätze als grundlegend oder gegeben voraussetzt und alle anderen Sätze, die man für wahr hält, versucht, aus ersteren zu folgern. Im Idealfall werden die Sätze (“Gesetze” und “Beobachtungsdaten”), die man voraussetzt, wahr sein, und dann wird sich die Wahrheit dieser Sätze auch auf diejenigen Sätze (die “Vorhersagen”) vererben, die man aus den vorausgesetzten Sätzen herleiten kann.

In der Logik haben wir nun verschiedene Möglichkeiten, solche wichtigen logischen Begriffe – wie den der logischen Folge – exakt zu fassen. In dieser Vorlesung werden wir diese Möglichkeiten aufzeigen und genau behandeln. Insbesondere werden wir feststellen, dass sich logische Form und logische Eigenschaften und Beziehungen in unterschiedlich feiner “Auflösung” erklären lassen: einmal – grobkörniger – *aussagenlogisch* – und andererseits – feinkörniger – *prädikatenlogisch*. Wir werden also alle Themen dieses Buches zweimal behandeln: In der ersten Hälfte unter der schwächeren “Lupe” der Aussagenlogik und in der zweiten Hälfte mit dem stärkeren “Mikroskop” der Prädikatenlogik.

Die Logik ist das grundlegende Werkzeug, das wir Philosophen brauchen, um philosophische Fragen genau und unzweideutig formulieren zu können, um festlegen zu können, unter welchen Bedingungen ein Satz wahr ist, um wichtige philosophische Begriffe definieren zu können, um Argumente auf ihre Gültigkeit hin untersuchen zu können, um stillschweigende Voraussetzungen philosophischer Argumente explizit machen zu können, um aus Behauptungen auf korrekte Weise Schlüsse ziehen zu können, um in einfachen Modellen die Plausibilität von Theorien überprüfen zu können, um mathematische Methoden auf philosophische Fragestellungen anwendbar machen zu können, und um insgesamt Fortschritt in der Philosophie erzielen zu können, so wie z.B. die Naturwissenschaftler dies in ihren Wissenschaften leisten. Kurz gesagt: Durch die Logik lernt man klar zu sprechen und klar zu denken – eine Grundanforderung an jede gute Philosophin und jeden guten Philosophen.

Anders ausgedrückt:

Little progress is made in mathematics or philosophy without a strong capacity for abstract pattern recognition.

(Timothy Williamson, Interview in: V.F. Hendricks und J. Symons (Hg.), *Formal Philosophy*, Breinigsville, PA: Automatic Press, 2005.)

Genau diese Fähigkeit zur logisch-formalen Abstraktion, die man durch das Studium der Logik lernt, wenden meinen Kolleginnen/Kollegen und ich auch in unserem *Munich Center for Mathematical Philosophy* an: Schauen Sie doch mal vorbei! (Physikalisch in der Ludwigstraße 31, virtuell unter <http://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/index.html>.)

Das vorliegende Vorlesungsskriptum¹ wird absolut ausreichen, um dem Inhalt der Vorlesung voll und ganz folgen zu können. Hier sind dennoch noch ein paar zusätzliche Literaturempfehlungen zu Logik-Einführungen für Philosophen:

- B. Mates, *Elementare Logik. Prädikatenlogik der ersten Stufe mit Identität*, 2. Auflage, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1978.
- G. Link, *Collegium Logicum*, Band 1, Paderborn: Mentis, 2009.
- J. Barwise und J. Etchemendy, *Language, Proof and Logic*, Stanford: CSLI, 2002.
- V. Halbach, *the logic manual*, Oxford: Oxford University Press, 2010.

¹Dieses Vorlesungsskriptum entsteht in Zusammenarbeit mit Alexander Hieke, welcher an der Universität Salzburg ebenfalls Logik-Vorlesungen abhält. Ich möchte mich sehr bei Marian David und Georg Reiter bedanken, die an der Universität Graz auf Basis dieses Skripts in die Logik eingeführt haben, und deren Rückmeldungen bereits in die aktuelle Version desselben eingeflossen sind.