Kapitel 9

Die prädikatenlogische Sprache

Wie bereits für die aussagenlogische Sprache geschehen, werden wir nun auch die prädikatenlogische Sprache präzise festlegen, und analog zur Vorgangsweise in der Aussagenlogik beginnen wir auch hier mit dem Alphabet (Vokabular).

9.1 Das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache

Das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache setzt sich wiederum aus deskriptiven Zeichen, logischen Zeichen und Hilfszeichen zusammen:

1. Deskriptive Zeichen:
   (a) Abzählbar viele Individuenkonstanten: $a_1, a_2, a_3, \ldots$
   (b) Abzählbar viele Prädikate:
   $P_1^n, P_2^n, P_3^n, \ldots$ (für jede Stellenanzahl $n \geq 1$)
2. Logische Zeichen:
   (a) Junktoren: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
   (b) Quantoren: $\exists, \forall$
   (c) Abzählbar unendlich viele Individuenvariablen:
   $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$
3. Hilfszeichen:
   (a) (,)

(b) ,

Man beachte dabei: Die deskriptiven Zeichen dürfen von uns – passend je nach Anwendung und Zweck – frei gewählt werden. Jede solche Wahl führt dann zu genau einer prädikatenlogischen Sprache; es gibt demnach auch mehr als eine prädikatenlogische Sprache.

Die logischen Zeichen und die Hilfszeichen hingegen sind fix und für alle prädikatenlogischen Sprachen verbindlich.

Wenn wir oben 'abzählbar viele' schreiben, meinen wir: endlich viele oder abzählbar unendlich viele, je nachdem, wieviele Individuenkonstanten oder Prädikate wir zum Repräsentieren natursprachlicher Sätze annehmen wollen. 'endlich viele' schließt dabei auch den Fall 0 ein, d.h. wir könnten auf Individuenkonstanten oder Prädikate bestimmer Stelligkeit auch völlig verzichten, wobei wir jedoch annehmen wollen, dass zumindest irgendein Prädikat in unserem Alphabet vorhanden ist. Wie früher bei den Aussagenvariablen setzen wir außerdem jedenfalls abzählbar *unendlich* viele Individuenvariablen als gegeben voraus. Statt 'x_1', 'x_2', 'x_3' werden wir meistens einfach 'x', 'y', 'z' schreiben, um wo immer möglich die Verwendung von Subindizes zu vermeiden. Ähnlich werden wir auch 'a' und 'b' für, respektive, 'a_1' und 'a_2' schreiben, sowie 'P' für 'P_1^1' und 'R' für 'P_1^2'.

Obwohl sich semantisch gesehen die Individuenvariablen – wie die Individuenkonstanten – auf Einzeldinge (*Individuen*) in der Welt beziehen werden, wollen wir sie – anders als die Individuenkonstanten – als *logische* Zeichen auffassen, und zwar deshalb weil die Individuenvariablen gemeinsam mit den Quantoren eine Einheit bilden: Die Individuenvariablen sollen ja letztlich nur die Stellen in einer Formel festlegen, auf die sich Vorkommnisse von Existenz- oder Allquantoren beziehen. Wie die Quantoren selbst zählen daher auch die Individuenvariablen zu den logischen Zeichen.

Wir setzen dazu noch fest:

- Für alle t gilt: t ist ein *singulärer Term* gdw t ist eine Individuenkonstante oder t ist eine Individuenvariable.

Allgemein werden wir Kleinbuchstaben wie 't' (mit oder ohne Index) als Metavariablen für singuläre Terme der prädikatenlogischen Sprache verwenden. Wann immer wir also

t

schreiben, meinen wir eine beliebige Individuenkonstante oder Individuenvariable. Ab und zu werden wir auch 'c' als Metavariable für Individuenkonstanten und 'v' als Metavariable für Individuenvariablen verwenden.

Für die Bildung prädikatenlogischer Argumentformen fügen wir schließlich wie schon in der Aussagenlogik unserem Alphabet noch das Zeichen für den formalen Konklusionsindikator hinzu:

- Daher-Zeichen: $\therefore$

Prädikatenlogische Argumentformen werden dann genau wie in der Aussagenlogik als Folgen der Form $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ definiert, mit dem einzigen Unterschied, dass die zugrundeliegende Definition dessen, was eine Formel ist – um welche Art von Objekten es sich also bei $A_1, \ldots, A_n, B$ handelt – in der Prädikatenlogik eine andere ist. Dieser Definition werden wir uns in der nächsten Sektion zuwenden.

9.2 Die Grammatik der prädikatenlogischen Sprache

Wir legen nun auf die bereits aus der Aussagenlogik bekannte Art und Weise rekursiv (oder induktiv) fest, was eine prädikatenlogische Formel ist. 'Rekursiv' heißt wieder schlicht: Ob eine komplexe Zeichenfolge eine Formel ist, hängt per definitionem davon ab, ob gewisse ihrer Teile Formeln sind und wie diese zusammengesetzt wurden; ob diese Teile Formeln sind, hängt wiederum davon ab, ob deren Teile Formeln sind und wie diese zusammengesetzt wurden; usw. Bei den einfachsten Formeln, den atomaren Formeln, legt man schließlich direkt fest, wann man es mit einer Formel zu tun hat und wann nicht (der sogenannte Rekursionsanfang).

Die Definition besteht wieder aus syntaktischen Regeln (Formationsregeln), für deren Formulierung wir erneut unsere Metavariablen 'A', 'B', 'C', 'D',... verwenden, welche nunmehr für beliebige prädikatenlogische Formeln stehen. Syntaktische Definitionen wie diese sind in der Prädikatenlogik stillschweigend auf das gewählte Alphabet relativiert, welches festlegt, welche Prädikate und Individuenkonstanten bei der Bildung atomarer Formeln zur Verfügung stehen.

(1) Wenn P^n ein n-stelliges Prädikat ist und $t_1, \ldots, t_n$ n singuläre Terme sind, so ist $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.

(2) Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\neg A$ eine Formel.

(3) Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \wedge B)$ eine Formel.

(4) Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \vee B)$ eine Formel.

(5) Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \to B)$ eine Formel.

(6) Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \leftrightarrow B)$ eine Formel.

(7) Wenn A eine Formel ist und v eine Individuenvariable ist, dann ist auch $\forall vA$ eine Formel.

(8) Wenn A eine Formel ist und v eine Individuenvariable ist, dann ist auch $\exists vA$ eine Formel.

(9) Nur solche Zeichenreihen sind Formeln, die sich mit Hilfe der Klauseln (1)–(8) bilden lassen.

Wir nennen die gemäß Regel 1 gebildeten Formeln auch '*atomare Formeln*', die gemäß Regel 2 gebildeten Formeln '*Negationsformeln*', die gemäß Regel 3 gebildeten Formeln '*Konjunktionsformeln*', die gemäß Regel 4 gebildeten Formeln '*Diskunktionsformeln*', die gemäß Regel 5 gebildeten Formeln '*Implikationsformeln*', die gemäß Regel 6 gebildeten Formeln '*Äquivalenzformeln*', die gemäß Regel 7 gebildeten Formeln '*Allformeln*' und schließlich die gemäß Regel 8 gebildeten Formeln '*Existenzformeln*'. Die nicht-atomaren Formeln werde ich auch '*komplexe Formeln*' nennen. Die gesamte Menge der prädikatenlogischen Formeln bezeichnen wir wieder mit '$\mathcal{F}$'.

Man beachte, dass in (7) und (8) beim Einführen der beiden Quantoren keine Extra-Klammern für dieselben eingefügt werden. Etwaige Klammern in $\forall vA$ und $\exists vA$ rühren rein von A her.

Hier einige Beispiele für den Formelaufbau: Nehmen wir an, unser Alphabet enthält das einstellige Prädikat P, das zweistellige Prädikat R und die Individuenkonstante a. Dann sind

- $P(x)$

und

- $R(x, y)$

gemäß Regel 1 atomare Formeln. Daher ist gemäß Regel 8, angewandt auf die letztere Formel, auch

- $\exists yR(x, y)$

eine Formel, und zwar eine existentiell quantifizierte, sowie gemäß Regel 5

- $(P(x) \to \exists yR(x, y))$

eine Implikationsformel. Somit ergibt sich gemäß Regel 7, dass

- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x,y))$

ebenfalls eine Formel ist. Letztere könnte zum Beispiel zur Repräsentierung des Aussagesatzes

- Jeder Vater hat ein Kind

wobei P für 'ist Vater' und $R(x,y)$ für 'y ist Kind von x' stehen würde. Man beachte, dass hier in der natursprüchlichen Übersetzung die singulären Terme in $R(x,y)$ umgekehrt zu lesen sind, dass also mit $R(x,y)$ gemeint ist, dass y ein Kind von x ist und nicht etwa, dass x ein Kind von y ist. Würden wir $R(x,y)$ als 'x ist ein Kind von y' lesen, dann wäre die obige Formel vielmehr eine Repräsentierung des Aussagesatzes 'Jeder Vater ist ein Kind (von jemandem)'.

Doch bleiben wir bei unsere ursprünglich intendiertes Leseart von $R(x,y)$: Entsprechend wäre dann

- Wenn Hannes Leitgeb ein Vater ist, dann hat er ein Kind

zu repräsentieren durch die Formel

- $(P(a) \rightarrow \exists y R(a,y))$

die analog zu vorher durch Anwendung unserer syntaktischen Regeln gebildet werden kann, allerdings indem man mittels Regel 1 bei den atomaren Formeln

- $P(a)$

und

- $R(a,y)$

beginnt. Genauso gilt: Da wie gesagt

- $R(x,y)$

wegen Regel 1 eine Formel ist, ist auch gemäß Regel 8

- $\exists x R(x,y)$

eine Formel und somit auch – wiederum auf Basis von Regel 8 –

- $\exists y \exists x R(x,y)$

Daraus ergibt sich mittels Regel 2, dass auch

- $\neg\exists y\exists x R(x, y)$

eine prädikatenlogische Formel ist usw. Alle diese Formeln sind also Elemente der oben von uns definierten Menge $\mathcal{F}$ der prädikatenlogischen Formeln.

Gemäß der Klauseln für die Quantoren-Formeln haben wir aber auch etwas auf den ersten Blick "Unsinniges" wie

- $\forall x P(a)$
- $\exists x(P(x) \wedge \forall x R(x, a))$

unter unseren Formeln. Mit ein bisschen gutem Willen können wir sogar diesen Formeln einen gewissen Sinn entlocken und sie natursprachlich wie folgt umformulieren:

- Alles ist so, daß a die Eigenschaft P hat.
- Es gibt etwas, das P ist, sodass alles in der Beziehung R zu a steht.

Normalerweise würden wir Aussagesätze dieser Art allerdings gar nicht äußern, sondern von vornherein das, was wir damit sagen wollen, anders formulieren, etwa mittels:

- a hat die Eigenschaft P.
- Es gibt etwas, das P ist, und außerdem steht alles in der Beziehung R zu a.

Und diese würde wir dann eher so repräsentieren:

- $P(a)$
- $(\exists x P(x) \wedge \forall x R(x, a))$

oder auch, was die zweite Formel betrifft, als

- $(\exists x P(x) \wedge \forall y R(y, a))$

Bei allen diesen Zeichenreihen handelt es sich auch wieder um Formeln gemäß der obigen Formationsregeln.

Auch wenn wir daher Formeln wie die vorigen von oben kaum in Repräsentierungen benötigen werden, so sollen sie uns doch nicht weiter stören. Sie als prädikatenlogische Formeln zuzulassen, gestattet es uns nämlich, die Definition unserer prädikatenlogischen Formelmenge so einfach wie nur möglich zu halten. (Und die "weniger hübschen" Formeln werden sich später als logisch äquivalent zu den gerade eben formulierten "hübscheren" Formeln herausstellen.)

Wir haben bereits im letzten Kapitel gesehen, dass nicht alle der so bestimmten Formeln ohne Zusatz weiterer Informationen "wahrheitswertfähig" sind, denn eine Formel der Form

- $P(x)$

sagt ja für sich genommen noch nichts aus, auch wenn wir uns unter P eine konkrete Eigenschaft wie etwa *Vater-Sein* vorstellen. Der Ausdruck

- x ist ein Vater

kann nicht für sich als wahr oder falsch betrachtet werden, denn es ist ja nicht bestimmt, von welchem x wir sprechen. Auch ist nicht gesagt, dass es um mindestens ein x oder eventuell um alle x gehen soll. Wie wir wissen, müssten wir entweder der Individuenvariable x kontextuell einen gewissen Wert zu kommen lassen ("vereinbaren wir, dass x hier für Kant stehen soll") oder x durch eine Individuenkonstante ersetzen, wie in

- $P(a)$,

oder wir müssten die Variable x durch einen Quantor "binden", wie in

- $\exists x P(x)$
- $\forall x P(x)$

um eine wahrheitswertfähige Formel zu erhalten. Während x in $P(x)$ frei ist, tritt dieselbe Variable in $\exists x P(x)$ und $\forall x P(x)$ gebunden auf. Solche Einteilungen von Variablenvorkommnissen innerhalb von Formeln werden wir in der nächsten Sektion genauer betrachten.

Wir können nun auch wie versprochen problemlos festlegen, was Argumentformen unserer prädikatenlogischen Sprache sind:

- Eine prädikatenlogische *Argumentform* ist eine Zeichenreihe von der Form $A_1, \ldots, A_n \therefore B$, wobei $A_1, \ldots, A_n, B$ prädikatenlogische Formeln sind; $A_1, \ldots, A_n$ sind dabei die Prämissen und B ist die Konklusion der Argumentform.

Hier sind noch einige weitere konkrete Beispiele für Formeln der prädikatenlogischen Sprache (immer gegeben das entsprechende Vokabular):

- $P^1_1(a_2)$
- $P^1_3(a_5)$
- $P^2_1(a_2, a_{17})$

- $(P_1^1(a_2) \vee P_3^1(a_5))$
- $\neg P_1^2(a_2, a_{17})$
- $\exists x_1(P_1^1(a_2) \vee P_3^1(x_1))$
- $\forall x_1 \neg P_1^2(a_2, x_1)$
- $(\neg\exists x_1(P_1^1(a_2) \vee P_3^1(x_1)) \rightarrow \forall x_1 \neg P_1^2(a_2, x_1))$
- $\forall x_5(\neg\exists x_1(P_1^1(x_5) \vee P_3^1(x_1)) \rightarrow \forall x_1 \neg P_1^2(x_5, x_1))$

Wie in der aussagenlogischen Syntax können wir jederzeit mit Hilfe von syntaktischen Strukturbäumen überprüfen, ob solche Zeichenketten auch wirklich prädikatenlogische Formeln sind.

Was zu guter Letzt die Klammerersparnisregeln betrifft, so übernehmen wir diese einfach aus der Aussagenlogik. Zum Beispiel dürfen wir in der vorletzten Formel oben die äußeren Klammern weglassen und die Formel somit so abkürzen:

- $\neg\exists x_1(P_1^1(a_2) \vee P_3^1(x_1)) \rightarrow \forall x_1 \neg P_1^2(a_2, x_1)$

9.3 Arten von Variablenvorkommnissen

Wir haben bereits anhand verschiedener Beispiele gesehen, dass Individuenvariablen auf zwei verschiedene Weisen in einer Formel auftreten können, nämlich *frei* oder *gebunden*. Zum Beispiel, im einfachsten Falle: Die Individuenvariable x kommt in der Formel $P(x)$ frei vor, während dieselbe Variable in $\exists x P(x)$ bzw. $\forall x P(x)$ ausschließlich gebunden vorkommt. In $P(x)$ liegt x nämlich nicht im Bereich eines Quantors, in $\exists x P(x)$ bzw. $\forall x P(x)$ liegt x jedoch jeweils im Bereich eines Quantors, der, wie man sagt, x bindet.

Entsprechend legen wir fest (wobei 'Formel' immer kurz für 'prädikatenlogische Formel' ist):

- Für alle Individuenvariablen v und alle Formeln A gilt:

  v kommt in A frei vor gdw

  v an wenigstens einer Stelle in A weder einem Quantor $\exists, \forall$ unmittelbar folgt, noch im Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks der Form $\exists v$ oder $\forall v$ liegt.

- Für alle Individuenvariablen v und alle Formeln A gilt:

  v kommt in A gebunden vor gdw

v an wenigstens einer Stelle in A einem Quantor $\exists, \forall$ unmittelbar folgt oder im Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks der Form $\exists v$ oder $\forall v$ liegt.

Die letzte Definition könnte man leicht vereinfachen, indem man auf der rechten Seite 'oder im Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks der Form $\exists v$ oder $\forall v$ liegt' einfach weglässt, denn wenn eine Variable in einer Formel im Bereich eines zugehörigen Quantorausdruckes vorkommt, dann muss die Variable natürlich auch wenigstens irgendwo in der nämlichen Formel unmittelbar nach einem Quantor vorkommen. Die obige Definition von 'kommt gebunden vor' ist nur deshalb naheliegend, weil sie die logische Struktur der Definition von 'kommt frei vor' nachahmt.

Bei diesen Definitionen soll gelten:

- Der *Bereich* eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks $\exists v$ oder $\forall v$ in einer prädikatenlogischen Formel A ist dasjenige Vorkommnis einer Teilformel von A, das auf das Quantorausdruckvorkommnis folgt.

Insbesondere:

- In der Formel $\exists vB$ bzw. $\forall vB$ ist das Vorkommnis von B der Bereich des anfänglichen Vorkommnisses von $\exists v$ bzw. $\forall v$.

(Mit 'Quantorausdruck' meinen wir immer Ausdrücke der Form $\exists v$ oder $\forall v$, während wir $\exists$ und $\forall$ bekanntlich kurz mit 'Quantor' bezeichnen.)

Ein Beispiel zum Thema Bereich: In der Formel

- $\exists x(P(x) \land \neg Q(x)) \to R(x, y)$

ist der Bereich des Vorkommnisses von $\exists x$ das Vorkommnis von

- $(P(x) \land \neg Q(x))$

in der obigen Implikationsformel. Das bedeutet auch, dass x in der obigen Implikationsformel frei vorkommt: Denn das letzte Vorkommnis von x (innerhalb von $R(x, y)$) folgt $\exists$ nicht unmittelbar nach, noch liegt dieses Vorkommnis von x im Bereich des hier einzigen Vorkommnisses eines Quantorausdrucks (nämlich von $\exists x$). x kommt in der Formel aber auch gebunden vor, was man an allen früheren Vorkommnissen von x in der Formel ersehen kann. Es ist also selbstverständlich möglich, dass ein und dieselbe Individuenvariable in ein und derselben Formel sowohl frei als auch gebunden vorkommt (an unterschiedlichen Stellen).

Darauf baut nun auch folgende Einteilung der prädikatenlogischen Formeln auf:

- Für alle Formeln A gilt: A ist *offen* gdw es mindestens eine Individuenvariable v gibt, sodass v in A frei vorkommt.

- Für alle Formeln A gilt: A ist *geschlossen* gdw A ist nicht offen, d.h. es gibt keine Individuenvariable v, sodass v in A frei vorkommt.

Wie bereits früher besprochen, sind nur die geschlossenen Formeln generell "wahrheitswertfähig", da nur sie ohne Zusatz weiterer Angaben entweder wahr oder falsch sind. Das ist auch der Grund, warum in der Literatur statt von geschlossenen Formeln auch manchmal von *(Aussage-)Sätzen* gesprochen wird, entsprechend unserer Definition von Aussagesätzen als sprachlichen Ausdrücken, die wahr oder falsch sind. Von offenen Formeln hingegen kann man nicht sinnvoll sagen, dass sie wahr oder falsch sind, es sei denn den Variablen, die in einer solchen offenen Formel frei vorkommen, wurde auf irgendeine Weise ein Wert – eine Bedeutung – zugesprochen.

Doch was genau bedeutet die Redeweise von "Vorkommnissen" eigentlich, derer wir uns bislang einfach stillschweigend bedient haben? (Im gegenwärtigen Kontext hat diese nämlich nichts mit der Unterscheidung 'Ausdrucksvorkommnis vs. Ausdruckstyp' aus dem anfänglichen Kapitel *Vorbemerkungen* zu tun.)

Damit ist hier Folgendes gemeint:

- Ein Vorkommnis einer Variable v in einer Formel A ist eine Stelle in A, an der v steht.

- Ein Vorkommnis eines Quantorausdrucks $\forall v$ in einer Formel A ist eine zusammenhängende Folge von Stellen in A, an denen $\forall v$ steht.

- Ein Vorkommnis eines Quantorausdrucks $\exists v$ in einer Formel A ist eine zusammenhängende Folge von Stellen in A, an denen $\exists v$ steht.

- Ein Vorkommnis einer Formel B in einer Formel A ist eine zusammenhängende Folge von Stellen in A, an denen B steht.

Stellen schließlich lassen sich durch Zahlen angeben (1. Stelle, 2. Stelle, 3. Stelle usw.), wobei jedes Zeichenvorkommnis in einer Formel eine eindeutig bestimmte Stelle einnimmt, welche somit mittels der Angabe von Zahlen festgehalten werden kann. Auch Hilfszeichen wie Klammern und Kommata werden wir bei der Angabe von Stellen berücksichtigen.

Zum Beispiel: Sei A die Formel

- $\forall x(P(x, y) \rightarrow \exists y Q(y))$

Dann ergeben sich die folgenden Vorkommnisse von Variablen, Quantorausdrücken und Formeln in A:

Vorkommnisse von x in A: 2. Stelle, 6. Stelle
Vorkommnisse von y in A: 8. Stelle, 12. Stelle, 15. Stelle
Vorkommnisse von $\forall x$ in A: 1.–2. Stelle
Vorkommnisse von $\exists y$ in A: 11.–12. Stelle
Vorkommnisse von $P(x, y)$ in A: 4.–9. Stelle
Vorkommnisse von $Q(y)$ in A: 13.–16. Stelle
Vorkommnisse von $\exists y Q(y)$ in A: 11.–16. Stelle
Vorkommnisse von $(P(x, y) \to \exists y Q(y))$ in A: 3.–17. Stelle
Vorkommnisse von $\forall x(P(x, y) \to \exists y Q(y))$ in A: 1.–17. Stelle

Es gibt also z.B. *genau ein* Vorkommnis von $Q(y)$ in A, namlich die zusammenhängende Folge von der 13. bis zur 16. Stelle.

Nachdem wir nun die Terminologie der 'Vorkommnisse' etwas präziser festgelegt haben, können wir auf dieser Basis auch die Begriffe, die wir am Anfang dieser Sektion eingeführt haben, etwas präziser anwenden. Insbesondere hatten wir oben die *Bereiche* von Quantorvorkommnissen in Formeln ebenfalls als Vorkommnisse aufgefasst, nämlich als Vorkommnisse von bestimmten Teilformeln. Im Falle des obigen A erhalten wir beispielsweise:

Bereich des einzigen Vorkommnisses von $\forall x$ in A: das Vorkommnis von $(P(x, y) \to \exists y Q(y))$ in A (3.–17.Stelle).

Bereich des einzigen Vorkommnisses von $\exists y$ in A: das Vorkommnis von $Q(y)$ in A (13.–16.Stelle).

Schließlich können wir die Arten von Variablenvorkommnissen in einer Formel noch genauer angeben: Oben sprachen wir einfach davon, dass eine Variable in einer Formel frei vorkommt (oder dass dies eben nicht der Fall ist). Was wir dabei aber nicht dazugesagt hatten, war: *Wo*, d.h. an welcher Stelle in einer Formel eine Variable frei vorkommt oder aber gebunden.

Dies lässt sich folgendermaßen präzisieren:

- Ein Vorkommnis einer Variable v in einer Formel A ist *gebunden*, wenn es sich innerhalb eines Vorkommnisses von $\forall v$ oder $\exists v$ in A befindet, oder wenn es sich im Bereich eines Vorkommnisses von $\forall v$ oder $\exists v$ in A befindet.

- Ein Vorkommnis einer Variable v in einer Formel A ist *frei*, wenn es nicht gebunden ist.

Zum Beispiel:

Das 1. Vorkommnis von x in A (2. Stelle) ist gebunden, da es sich innerhalb (1.–2. Stelle) des Vorkommnisses von $\forall x$ in A befindet.

Das 2. Vorkommnis von x in A (6. Stelle) ist gebunden, da es sich im Bereich (3.–17. Stelle) des Vorkommnisses von $\forall x$ in A befindet.

Das 1. Vorkommnis von y in A (8. Stelle) ist frei, da es sich weder innerhalb eines Vorkommnisses von $\forall y$ oder $\exists y$ in A befindet, noch im Bereich eines Vorkommnisses von $\forall y$ oder $\exists y$ in A befindet.

Das 2. Vorkommnis von y in A (12. Stelle) ist gebunden, da es sich innerhalb (11.–12. Stelle) des Vorkommnisses von $\exists y$ in A befindet.

Das 3. Vorkommnis von y in A (15. Stelle) ist gebunden, da es sich im Bereich (13.–16. Stelle) des Vorkommnisses von $\exists y$ in A befindet.

Die neue Terminologie von freien und gebundenen *Vorkommnissen* von Variablen in Formeln passt dabei immer noch mit unserer ursprünglichen Terminologie von 'eine Variable kommt in einer Formel frei bzw. gebunden vor' zusammen, und zwar so:

- v kommt in A frei vor, wenn es wenigstens ein freies Vorkommnis von v in A gibt (d.h., wenn v wenigstens *irgendwo* in A frei vorkommt).
- v kommt in A gebunden vor, wenn es wenigstens ein gebundenes Vorkommnis von v in A gibt (d.h., wenn v wenigstens *irgendwo* in A gebunden vorkommt).

Auf unser obiges Beispiel unserer Formel A bezogen:

x kommt in A nicht frei vor, d.h.: x kommt in A *nur* gebunden vor.

y kommt in A frei vor, denn das 1. Vorkommnis von y in A (8. Stelle) ist frei. y kommt in A außerdem gebunden vor (z.B. an der 12. Stelle). Aufgrund des Vorkommnisses einer freien Variable in A handelt es sich bei A daher gemäß unserer früheren Definition um eine offene Formel.

Freie Vorkommnisse von Variablen in Formeln sind schließlich auch diejenigen Stellen, in die wir später singuläre Terme einsetzen – substitutieren – werden. Im Unterschied dazu lässt sich in eine gebundene Variable nichts einsetzen, weil sonst der zugehörige Quantor eventuell "leerlaufen" würde, und weil gebundene Variablen eine andere Funktion haben, nämlich sich auf *alle* oder *einige* Dinge (je nach Quantor) zu beziehen. Zum Beispiel können wir in unserem obigen A für y die Variable z einsetzen, aber nur dort wo y frei vorkommt. Durch diese Ersetzung wird dann also aus A – oder wie wir auch schreiben können,

- $A[y]$: $\forall x(P(x, y) \to \exists y Q(y))$

wenn wir signalisieren wollen, dass wir gedenken, y in A zu ersetzen – die Formel

- $A[z/y]$: $\forall x(P(x, z) \to \exists y Q(y))$

in der wir alle freien Vorkommnisse von y (hier: die 8. Stelle) durch z ersetzt haben. Alle gebundenen Vorkommnisse von y werden durch die Substitution unverändert gelassen.

Genauso können wir y in A bzw. $A[y]$ durch eine Individuenkonstante a ersetzen, wenn wir wollen, wodurch sich

- $A[a/y]$: $\forall x(P(x, a) \to \exists y Q(y))$

ergibt. Sowohl bei $A[z/y]$ als auch bei $A[a/y]$ könnte man sich vorstellen, dass man sozusagen eine "Umbenennung" durchführt: Während in A bzw. $A[y]$ ausgesagt wird, dass es zu allen x, die in der P-Beziehung zu y stehen, etwas gibt, das Q ist, wird in $A[z/y]$ und $A[a/y]$ dasselbe von z und a ausgesagt – zu allen x, die in der P-Beziehung zu z/a stehen, gibt es etwas, das Q ist. Es gibt zwar kein Garantie, dass genau das ursprüngliche y-Objekt nun mittels z oder mittels a bezeichnet wird, denn das hängt ja auch von der Bedeutung von z bzw. a ab, aber rein syntaktisch wäre dies zumindest möglich.

Wir merken uns ganz allgemein:

- Für alle Formeln A, für alle singulären Terme t, für alle Variablen v:

  $A[t/v]$ ist diejenige Formel, die aus $A[v]$ dadurch entsteht, dass alle freien Vorkommnisse von v in A durch t ersetzt werden.

Wenn v in A überhaupt nicht frei vorkommt, dann ist $A[t/v]$ einfach identisch A – die Substitution hat dann keinerlei Effekt.

Es gibt jedoch auch Einsetzungen, die man definitiv nicht mehr als "harmlose" Umbennungen deuten kann. Nehmen wir zum Beispiel an, wir wollten y in obigem $A[y]$ durch x ersetzen: Dann ergäbe sich

- $A[x/y]$: $\forall x(P(x, x) \to \exists y Q(y))$

Diese Substitution führt nunmehr zu einer bedeutend drastischeren Bedeutungsveränderung, welche über die Bedeutungsveränderung beim Übergang von $A[y]$ zu $A[z/y]$ bzw. $A[a/y]$ hinausgeht: $A[x/y]$ sagt nämlich aus, dass es zu jedem Objekt, das mit sich selbst in der P-Beziehung steht, etwas existiert, das Q ist. Von Objekten, die *mit sich selbst in der P-Beziehung stehen*, war aber in der ursprünglichen Formel $A[y]$ überhaupt nicht die Rede! Bei dieser Substitution ist semantisch gesehen also etwas schiefgegangen. Ein ursprünglich *freies* Vorkommnis einer Variable (hier: von y) verwandelt sich in ein Variablenvorkommnis (hier: von x), welches durch einen Quantor gebunden wird. Dies war beim Übergang zu $A[z/y]$ bzw. $A[a/y]$ nicht so gewesen: Denn da wurden aus den freien Vorkommnissen von y "nur" wiederum singuläre Terme, die sich auf ein bestimmtes Einzelobjekt bezogen, entweder das durch die neuerlich freie Variable z bezeichnete Individuum oder das durch die Individuenkonstante a bezeichnete Objekt. In $A[x/y]$ hingegen wird gar nicht mehr einem bestimmten Einzelding eine Eigenschaft zugeschrieben, sondern vielmehr ein genereller – und daher mittels eines Quantors ausgedrückter – Sachverhalt beschrieben. Substitutionen wie bei $A[x/y]$ wollen wir in Zukunft daher vermeiden. Wenn wir später logische Regeln einführen, die den Argumentformen

(EE) $A[t/v] \therefore \exists v A[v]$

und

(UB) $\forall v A[v] \therefore A[t/v]$

aus dem letzten Kapitel ähneln werden, dann wollen wir sicherstellen, dass es sich bei den Substitutionen von t für v in $A[v]$ nur um unproblematische Quasi-Umbenennungen handelt, sodass sich freie Vorkommnisse von Variablen dabei nicht in gebundene verwandeln können – freie Vorkommnisse von Variablen müssen nach der Substitution als frei erhalten bleiben. Wir müssen also die "guten" Substitutionen von den "schlechten" unterscheiden, und das geht vonstatten mit Hilfe des folgenden Begriffes:

- Für alle Formeln A, für alle singulären Terme t, für alle Variablen v:

  t ist frei für v in A gdw

  - entweder t eine Individuenkonstante ist,
  - oder t eine Variable w ist, wobei kein freies Vorkommnis von v in A im Bereich eines Quantorausdrucks der Form $\exists w$ oder $\forall w$ liegt.

Wenn t frei ist für v in A, dann kann t für v in A ohne Probleme eingesetzt werden: Es ist dann nicht möglich, dass durch die Substitution ein einstmals freies Vorkommnis einer Variable plötzlich gebunden wird. Wir werden also später darauf achten, dass Substitutionen in logischen Regeln und dergleichen nur vorgenommen werden können, wenn ein singulären Term für eine Variable eingesetzt wird, der zugleich auch frei für diese Variable ist. ('frei für' ist übrigens ein etwas seltsamer technischer Jargon, der sich eingebürgert hat; er kommt vom englischen 't is free to be substituted for x in A'.)

Zum Beispiel: Sagen wir, v wäre x und $A[v]$ die Formel $\exists y R(x,y)$. Dann werden sich die Instanzen von (UB)

- $\forall x \exists y R(x,y) \therefore \exists y R(z,y)$
- $\forall x \exists y R(x,y) \therefore \exists y R(a,y)$

die auf der rechten Seite durch Einsetzung von z bzw. a für x in $\exists y R(x,y)$ entstehen, später als logisch gültig erweisen. Die folgende Argumentform, die aus der Einsetzung von y für x in $\exists y R(x,y)$ auf der rechten Seite resultiert, aber nicht

- $\forall x \exists y R(x,y) \therefore \exists y R(y,y)$

denn während z frei ist für x in $\exists y R(x,y)$ und auch a frei ist für x in $\exists y R(x,y)$, ist y *nicht* frei ist für x in $\exists y R(x,y)$. Und es wäre auch völlig unsinnig, wenn $\forall x \exists y R(x,y) \therefore \exists y R(y,y)$ als logisch gültig herauskäme: Nur weil es zu jedem x ein y gibt, sodass x zu y in der R-Beziehung steht, muss es ja noch kein Objekt geben, das zu sich selbst in der R-Beziehung steht.