Kapitel 10

Die prädikatenlogische Semantik

Wir wollen nun alle wichtigen semantischen Begriffe, die wir bereits in der Aussagenlogik kennengelernt haben, auf die Sprache der Prädikatenlogik erweitern. Zum Beispiel benötigen wir wieder einen Begriff der logischen Gültigkeit, auf dessen Basis wir – nach vollzogener prädikatenlogischer Repräsentation – die Argumente

- Beispiel 1:

  Alle Österreicher sind Europäer.
  <u>Heinz Fischer ist Österreicher.</u>
  Also ist Heinz Fischer Europäer.

- Beispiel 2:

  Alle Österreicher sind blond.
  <u>Heinz Fischer ist Österreicher.</u>
  Also ist Heinz Fischer blond.

als logisch gültig herausbekommen werden, die Argumente

- Beispiel 3:

  Alle Österreicher sind Europäer.
  <u>Barack Obama ist kein Österreicher.</u>
  Also ist Barack Obama kein Europäer.

- Beispiel 4:

  Alle Österreicher sind Europäer.

  Horst Seehofer ist kein Österreicher.

  Also ist Horst Seehofer kein Europäer.

jedoch als logisch ungültig.

Wie schon in der Aussagenlogik wird sich herausstellen, dass die Gültigkeit von Argumenten nicht davon abhängt, ob darin lauter tatsächlich wahre Sätze vorkommen. Denn in den *Beispielen 1* und *3* sind alle darin vorkommenden Sätze wahr. Dennoch wird sich *Beispiel 1* als logisch gültig, *Beispiel 3* hingegegen als logisch ungültig erweisen. In den *Beispielen 2* und *4* kommen auch falsche Sätze vor. *Beispiel 2* und *4* unterscheiden sich jedoch: Während in *Beispiel 4* alleine die Konklusion falsch ist, ist in *Beispiel 2* eine der Prämissen falsch. Das Argument *2* ist dennoch – wie sich herausstellen wird – gültig, während das Argument *4* ungültig ist. Denn wie schon in der Aussagenlogik verlangen wir von einem logisch gültigen Argument, dass die Wahrheit sämtlicher Prämissen die Wahrheit der Konklusion *"erzwingt"*. Gültige Argumente sind *notwendigerweise wahrheitsbewahrend*.

Um dies präziser fassen zu können, müssen wir nun, wie bereits in der Aussagenlogik erfolgt, eine Weise entwicklen, alle (oder zumindest alle *geschlossenen*) Formeln mit Wahrheitswerten zu bewerten. Wir können dabei nicht einfach die Methode der Wahrheitstafeln bzw. die Definition von aussagenlogischen Bewertungen direkt in die prädikatenlogische Semantik übertragen, weil weder die Wahrheitstafeln noch die aussagenlogischen Bewertungen etwas über die sprachlichen Neuerungen der Prädikatenlogik – die "feinkörnigeren" atomaren Formeln und die quantifizierten Formeln – zu sagen wissen. Ausserdem könnte eine Formel wie $\forall x P(x)$ über *unendlich* viele Individuen quantifizieren, sodass wir dann entsprechend vermutlich eine unendlich große "Wahrheitstafel" zur Bewertung einer solchen Formel heranziehen müssten, und es gar nicht mehr so klar wäre, wie eine solche Wahrheitstafel anzuwenden wäre. Wir werden daher eine neue Semantik für die Prädikatenlogik entwickeln, die den Feinheiten der prädikatenlogischen Sprache gerecht werden wird, die aber zugleich die semantischen Regeln der Aussagenlogik für die aussagenlogischen Junktoren übernehmen wird.

Wie wir wissen, entsprechen in der Prädikatenlogik den Aussagenvariablen die atomaren Formeln: Diese sind die "kleinsten" Formeln der Prädikatenlogik. In unserer neuen prädikatenlogischen Semantik werden jedoch den atomaren Formeln nicht einfach Wahrheitswerte zugeordnet werden, sondern deren Wahrheitswert wird davon abhängen, was die *Extension* des Prädikates und die *Referenz* der singulären Terme sein werden, die in der Formel vorkommen. Wir werden also die syntaktische Struktur der atomaren Formeln bei der Festlegung der Wahrheitswerte für diese berücksichtigen. Der Satz

- Sokrates ist ein Mensch

wird – wie wir wissen – in der Prädikatenlogik wie folgt repräsentiert:

- $M(s)$

Um nun festzustellen, ob diese Formel – und dann der von ihr repräsentierte Satz – wahr ist, müssen wir betrachten, ob das Referenzobjekt (das Bezugsobjekt, das Denotat) der Individuenkonstante s in der Extension (dem Begriffsumfang) des Prädikatzeichens M liegt. Dabei ist das Referenzobjekt von s einfach der Gegenstand bzw. die Person Sokrates, und die Extension von M die Menge aller Menschen. Da Sokrates tatsächlich ein Element der Menge der Menschen ist, ist die Formel wahr.

Betrachten wir nun einen atomaren Satz mit einem zweistelligen Prädikat:

- 3 ist größer als 2.

Die prädikatenlogische Form dieses Satzes ist:

- $G(a, b)$.

Überlegen wir uns zuerst, was die Extension des zweistelligen Prädikats G ist. Offensichtlich kann dies nicht einfach eine beliebige Menge von Gegenständen sein, da ja bei der Verwendung dieses Prädikats immer von *zwei* Gegenständen die Rede ist – in unserem Fall von den Zahlen 3 und 2. Dies nötigt uns dazu, die Extension eines zweistelligen Prädikats immer als eine Menge von *geordneten Paaren* von Gegenständen zu betrachten – in unserem Falle als die Menge aller Paare, deren erstes Glied größer als das zweite Glied ist. In dieser Menge ist natürlich auch das Paar bestehend aus der Zahl 3 und der Zahl 2 enthalten:

$$\langle 3, 2 \rangle$$

Wir verwenden also in unserer Metasprache eckige Klammern wie '$\langle$' und '$\rangle$' zur Bezeichnung von geordneten Paaren.

Analog finden sich in dieser Menge die Paare $\langle 4, 2 \rangle$, $\langle 5, 2 \rangle$, $\langle 6, 2 \rangle$, auch die Paare $\langle 19, 7 \rangle$, $\langle 10005, 22 \rangle$ und unendlich viele mehr, nicht aber zählen die Paare $\langle 2, 4 \rangle$ oder $\langle 4, 4 \rangle$ oder $\langle 5000, 10000 \rangle$ zur Extension von G. Da a die Zahl 3 bezeichnet, b die Zahl 2, und $\langle 3, 2 \rangle$ ein Element der Extension von G ist, ist unsere atomare Formel $G(a, b)$ von oben wahr unter dieser Interpretation.

Analog betrachten wir die Extension eines dreistelligen Prädikates als eine Menge von *Tripel*, die Extension eines vierstelligen Prädikates als eine Menge von *Quadrupel*, und allgemein betrachten wir die Extension eines n-stelligen Prädikates als eine Menge von n-*Tupel* der Form

$$\langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$$

wobei $d_1, d_2, \ldots, d_n$ irgendwelche Objekte sind, die in diesem n-Tupel in eine bestimmte Reihenfolge gebracht wurden. Es ist dabei auch möglich, dass ein und dasselbe Objekt zum Beispiel zugleich an der ersten und an der vierten Stelle innerhalb eines n-Tupels auftritt. Bei solchen "geordneten Mengen" – und um nichts anderes handelt es sich bei einem n-Tupel – sind also diese zwei Eigenschaften wichtig:

1. Die Elemente sind geordnet, d.h.: Sie haben einen fixen ihnen zugeordneten Platz im n-Tupel.

2. Die Elemente können mehrfach vorkommen.

Wie wir solche geordnete Tupel in der Mengenlehre definieren können, soll uns hier nicht interessieren, wir wollen hier nur darauf verweisen, dass dies sehr wohl möglich – und nicht einmal sonderlich kompliziert – ist.

Sobald die Wahrheitswerte der atomaren Formeln durch Angabe der Bezugsobjekte für die singulären Terme und durch Angabe der Extensionen für die Prädikate festgelegt sind, werden die Wahrheitswerte von Negations-, Konjunktions-, Diskunktions-, Implikations- und Äquivalenzformeln genauso "errechnet" wie in der Aussagenlogik. Wir geben hier nur ein Beispiel: Der Satz

- Descartes ist Philosoph, aber Shakespeare ist keiner.

wird wie folgt repräsentiert:

- $P(d) \wedge \neg P(s)$

Um den Wahrheitswert für diesen Satz zu berechnen, müssen wir zuerst die Wahrheitswerte der Teilsätze berechnen: Das erste Konjunkt ist atomar, und da das Prädikat dieses Konjunkts einstellig ist, müssen wir nur "nachsehen", ob das Denotat von d in der Extension von P liegt, was tatsächlich der Fall ist. Das erste Konjunkt ist also wahr. Das zweite Konjunkt ist eine Negationsformel, die einen atomaren Satz negiert, wir müssen daher zuerst wieder den Wahrheitswert des atomaren Satzes berechnen. Da das Denotat von s nicht in der Extension von P liegt, ist die atomare Formel falsch und somit die

Negationsformel wahr. Da beide Konjunkte wahr sind, ist auch die gesamte Konjunktionsformel wahr.

Alleine die Existenz- und Allformeln müssen wir noch gesondert behandeln. Betrachten wir zuerst einen Existenzsatz und dessen logische Form:

- Es gibt Menschen
- $\exists x M(x)$

Wir wollen eine solche Formel genau dann als wahr betrachten, wenn es *mindestens einen* Gegenstand in der Extension von M gibt.

Entsprechend: Betrachten wir den Allsatz

- Alles ist raumzeitlich
- $\forall x R(x)$

Diesen Satz werden wir genau dann als wahr bewerten, wenn *alle* Gegenstände in der Extension von R liegen. Es wird sich dabei als nützlich erweisen, sich eine Menge von Gegenständen – einen Gegenstandbereich (Definitionsbereich, Universum) – vorzugeben, aus dem die möglichen Werte von Variablen wie x zu entnehmen sind. Relativ zu einem solchen vorgegebenen Gegenstandsbereich heißt 'es gibt' dann eigentlich 'es gibt *im Gegenstandsbereich*' und 'für alle' heißt eigentlich 'für alles *im Gegenstandsbereich*'.

Während einfach gestrickte quantifizierte Sätze obiger Art semantisch noch sehr einfach zu behandeln sind, bedarf die Formulierung *allgemeiner* semantischer Regeln für quantifizierte Formeln – in denen eventuell Verschachtelungen der Art $\forall\forall$, $\forall\exists$, $\exists\forall$, $\exists\exists$ oder $\forall\forall\forall$, $\forall\forall\exists$ usw. auftreten können – ein wenig "technischer" Arbeit. Insbesondere werden wir uns damit beschäftigen müssen, wie man mehreren Variablen, die zu verschiedenen Quantorausdrücken gehören, zugleich Werte zuordnen kann. Wie die Wahrheitswerte von Existenz- und Allformeln letztlich genau bestimmt werden, werden wir bald sehen, und wir werden bereits in der nächsten Sektion eine weitere theoretische Rolle kennenlernen, die die Gegenstandbereiche in der prädikatenlogischen Semantik übernehmen.

10.1 Prädikatenlogische Interpretationen

Wir haben festgestellt, dass wir in der Semantik der Prädikatenlogik nicht einfach eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu den atomaren Formeln benötigen, mit deren Hilfe sodann die Wahrheitswerte für die komplexen Formeln berechnet werden können, sondern vielmehr eine Zuordnung von Bezugsobjekten zu den Individuenkonstanten – und auch eine Zuordnung von Werten zu den Individuenvariablen – sowie von Extensionen zu den Prädikaten gefragt ist. Wenn wir dies zunächst einmal für Individuenkonstanten und Prädikate bewerkstelligen wollen, so müssen wir immer auch angeben, was denn überhaupt ein Gegenstand ist, der als Extension einer Individuenkonstante fungieren kann bzw. der in der Extension eines Prädikatzeichens vorkommen kann; d.h. wir müssen zusätzlich auch den bereits am Ende der letzten Sektion erwähnten sogenannten *Gegenstandsbereich* angeben – das ist jene Menge von Gegenständen, über die wir bei einer gegebenen Zuordnung der Bezugsobjekte, der Extensionen und schließlich der Wahrheitswerte sprechen wollen. Nur die Gegenstände im Gegenstandsbereich können von den singulären Termen benannt werden, und nur sie dürfen in den Extensionen der Prädikate vorkommen.

Stellen wir uns vor, wir haben uns ein Alphabet einer prädikatenlogischen Sprache zu einem bestimmten Formalisierungszweck fix vorgegeben. Formal beginnen wir dann unsere Semantik der Prädikatenlogik wie folgt:

- $\mathfrak{I}$ ist eine *prädikatenlogische Interpretation* gdw $\mathfrak{I}$ ein Paar der Form $\langle D, \varphi \rangle$ ist, so dass gilt:
  1. D ist eine nicht-leere Menge von Objekten (formal: $D \neq \varnothing$),
  2. für alle Individuenkonstanten c gilt: $\varphi(c)$ ist ein Element von D (formal: $\varphi(c) \in D$),
  3. für alle n-stelligen Prädikate P^n gilt: $\varphi(P^n)$ ist eine Menge von n-Tupeln von Objekten in D (formal: $\varphi(P^n) \subseteq D^n$).

Eine prädikatenlogische Interpretation besteht somit aus einem nicht-leeren Gegenstandsbereich D und einer Interpretationsfunktion φ (sprich: "fi"). D wird in der klassischen Logik u.a. deshalb als nicht leer vorausgesetzt, weil in der klassischen Logik (wie schon erwähnt) für alle singulären Terme vorausgesetzt wird, dass diese etwas bezeichnen; was immer sie bezeichnen, muss ein Element des Gegenstandsbereiches D sein, weshalb dann auch D als nicht leer vorausgesetzt werden muss. Interpretationsfunktionen sind Funktionen, so wie früher auch die aussagenlogischen Interpretationen Funktionen waren. Hier aber sind Interpretationsfunktionen solche Funktionen, die den Individuenkonstanten jeweils einen Gegenstand aus D zuordnen und jedem n-stelligen

Prädikat (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) jeweils eine Menge von n-Tupeln von Elementen von D zuordnen. Mit

$$D^n (= \underbrace{D \times \ldots \times D}_{n\text{-mal}})$$

meint man dabei einfach die Menge *aller* möglichen n-Tupel von Elementen von D. Auf diese Weise wird allen *deskriptiven Zeichen* (*nicht* beispielsweise den Individuenvariablen) des prädikatenlogischen Alphabets durch eine Interpretation eine Bedeutung gegeben. Prädikatenlogische Interpretationen interpretieren somit denjenigen Teil des Alphabets einer vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache, der den Eigennamen und den generellen Termen der natürlichen Sprache nachgebildet ist. Das ist die Basis für die spätere "Berechnung" der Wahrheitswerte der prädikatenlogischen Formeln.

10.2 Variablenbelegungen

Um allen Formeln Wahrheitswerte zuordnen zu können, müssen wir nun auch noch eine Möglichkeit finden, Individuen*variablen* Werte zuzuordnen. Erstens wird es damit möglich werden, Formeln, in denen Individuenvariablen frei vorkommen – also den offenen Formeln – *relativ zu einer solchen Variablenbelegung* einen Wahrheitswert zuzuschreiben: Die offenen Formeln, die ansonsten ja nicht ohne weiteres wahrheitswertfähig wären, werden sich damit zumindest im Kontext einer Variablenbelegung ganz ähnlich den geschlossenen Formeln verhalten. Zweitens werden wir die Variablenbelegungen benötigen, um die semantischen Regeln für unsere beiden Quantoren $\exists$ und $\forall$ formulieren zu können.

In einer Interpretation wird nur den Individuen*konstanten* sowie den Prädikaten ein semantischer Wert zugeordnet. Die Intuition, die dahinter steckt, ist die, dass diese Symbole eine fixe, also konstante, Bedeutung haben, während Individuen*variablen* eben eine "variable Bedeutung" haben. Diese variable Bedeutung fängt man nun mit den sogenannten Variablenbelegungen ein. Eine Variablenbelegung σ (sprich: "sigma") für einen Gegenstandsbereich D, der mit einer prädikatenlogischen Interpretation mitgegeben ist, ist dabei eine Funktion, die den Individuenvariablen ein beliebiges Denotat aus D zuordnet:

- Eine *Variablenbelegung* σ unter einer Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ ist eine Funktion, die jeder Individuenvariable v ein Element d in D zuordnet.

Zum Beispiel ist folgende Funktion eine Variablenbelegung unter jeder Interpretation, deren Gegenstandsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist:

$$x_1 \mapsto 2$$

$$x_2 \mapsto 4$$
$$x_3 \mapsto 6$$
$$x_4 \mapsto 8$$
$$\vdots$$

Aber auch dies wäre eine Variablenbelegung, die zum Gegenstandsbereich der natürlichen Zahlen "passt",

$$x_1 \mapsto 12$$
$$x_2 \mapsto 12$$
$$x_3 \mapsto 12$$
$$x_4 \mapsto 12$$
$$\vdots$$

und es gibt unendlich viele weitere Variablenbelegungen, die den Individuenvariablen auf welche Art und Weise auch immer natürliche Zahlen als Werte zuordnen. (Ja es gibt sogar unendlich viele Variablenbelegungen unserer unendlich vielen Individuenveriablen, wenn der vorgegeben Gegenstandsbereich nur endlich viele Elemente aufweist!)

Aus praktischen Gründen wollen wir nun auch noch – gegeben eine prädikatenlogische Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ – jede vorgegebene Interpretationsfunktion φ und jede Variablenbelegung σ (unter $\mathfrak{I}$) in einer Funktion φ_σ zusammenfassen, die auf alle singulären Terme – egal ob Individuenkonstante oder Individuenvariable – anwendbar ist:

- Sei $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ eine prädikatenlogische Interpretation und sei σ eine Variablenbelegung unter $\mathfrak{I}$; dann sei φ_σ folgendermaßen festgelegt:
    1. für alle Individuenkonstanten c: $\varphi_\sigma(c) = \varphi(c)$, und
    2. für alle Individuenvariablen v: $\varphi_\sigma(v) = \sigma(v)$.

Hier ist ein Beispiel für eine simple Interpretation für eine Sprache mit genau drei Individuenkonstanten a, b, c und genau zwei Prädikaten G und M, die beide einstellig sein sollen:

- $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$
- $D = \{1, 2, 3\}$,
- $\varphi(a) = 1$,

- $\varphi(b) = 2$,
- $\varphi(c) = 3$,
- $\varphi(G) = \{2\}$,
- $\varphi(M) = \varnothing$.

a, b und c fungieren also jeweils als Eigenamen der Zahlen 1, 2 und 3. G könnte man intuitiv so verstehen, dass es für '... ist eine gerade Zahl' steht, und M könnte man so erklären, dass es für '... ist ein Mensch' steht: Die einzige gerade Zahl in D ist 2, weshalb die Extension von G gerade $\{2\}$ ist, während sich als Extension von M die leere Menge ergibt, da sich kein Mensch unter den Elementen von D findet.

Mögliche Variablenbelegungen können wir uns etwas platzsparender als vorher durch die folgenden Folgen von Zahlen veranschaulichen, wobei der Wert der Variable x_i durch die Zahl an der i-ten Stelle angegeben wird:

- $\sigma_1 = \overbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\sigma_2 = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- $\sigma_3 = 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots$
- $\vdots$

Als ist, z.B., $\sigma_1(x_1) = 1$, $\sigma_1(x_2) = 2$, $\sigma_1(x_4) = 1$, $\sigma_2(x_1) = 1$, $\sigma_2(x_2) = 1$, $\sigma_3(x_1) = 2$, $\sigma_3(x_2) = 3$ usw.

Und die entsprechenden φ_σ könnten dann wie folgt veranschaulicht werden:

- $\varphi_{\sigma_1} = \quad \overbrace{1, 2, 3}^{\text{Konstantenwerte}} \quad \overbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\varphi_{\sigma_2} = \quad \overbrace{1, 2, 3}^{\text{Konstantenwerte}} \quad \overbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\varphi_{\sigma_3} = \quad \overbrace{1, 2, 3}^{\text{Konstantenwerte}} \quad \overbrace{2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\vdots$

Diese Folgen werden sozusagen durch die Individuenkonstanten und -variablen, welche selbst ja durchnummeriert sind, "generiert". Diese "zusammenfassenden" Funktionen φ_σ werden im folgenden die Rolle der "Bedeutungszuordnung" für die singulären Terme – egal ob konstante oder variable – übernehmen.

10.3 Wahrheit und Falschheit

Nun haben wir die Voraussetzungen geschaffen, um festlegen zu können, welche Formeln relativ zu einer Interpretation wahr und welche Formeln relativ zu einer Interpretation falsch sind. Ohne entsprechende Interpretation wäre eine Formel ja nur ein syntaktisches Gebilde ohne Bedeutung, dem man nicht sinnvoll einen Wahrheitswert zuordnen könnte.

Wir erreichen dies letztlich genauso wie in der Aussagenlogik, indem wir schlussendlich jede Formel entweder mit dem Wert w oder mit dem Wert f bewerten. Wenn wir jedoch *allen* Formeln, also auch den offenen, einen Wahrheitswert zuordnen wollen, so können wir dies nicht einfach nur auf Basis der Interpretationsfunktion φ tun, sondern wir müssen dabei immer auch eine Variablenbelegung σ berücksichtigen. Wir schreiben also vorerst wieder

$$\varphi_\sigma(A)$$

und meinen damit den Wahrheitswert der Formel A in der Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$, *gegeben* die Variablenbelegung σ. Dass wir dabei wieder dasselbe Symbol 'φ_σ' wie in der letzten Sektion verwenden, soll uns nicht stören – im Gegenteil, es wird bequem sein, möglichst wenige neue formale Zeichen in der Metasprache einführen zu müssen, und es wird ja aus dem Kontext heraus völlig klar, ob φ_σ auf einen singulären Term oder eine Formel angewandt wird. Dessen eingedenk, können wir unsere Bewertungsfunktion nun wie folgt festlegen:

> Sei $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ eine prädikatenlogische Interpretation und sei σ eine Variablenbelegung unter $\mathfrak{I}$.
>
> Eine *prädikatenlogische Bewertung* (relativ zu $\mathfrak{I}$ und σ) ist eine Funktion φ_σ, die auf allen singulären Termen so definiert ist, wie in der letzten Sektion erklärt, und die zudem jeder Formel in der Menge $\mathcal{F}$ der prädikatenlogischen Formeln einer vorgegeben prädikatenlogischen Sprache einen der Wahrheitswerte w und f zuordnet, sodass gilt:
>
> 1. $\varphi_\sigma(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = w$ gdw $\langle \varphi_\sigma(t_1), \ldots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \in \varphi(P^n)$[1],
> 2. $\varphi_\sigma(\neg A) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = f$,
> 3. $\varphi_\sigma((A \wedge B)) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B) = w$,
> 4. $\varphi_\sigma((A \vee B)) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = w$ oder $\varphi_\sigma(B) = w$,

[1] Im Falle von atomaren Sätzen der Bauart $P^1(t)$ identifizieren wir die "1-Tupel" $\langle d \rangle$ einfach mit d, so dass Extensionen von einstelligen Prädikaten nach wie vor Mengen von Gegenständen aus D sind, und nicht Mengen von 1-Tupeln von Gegenständen aus D.

5. $\varphi_\sigma((A \to B)) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = f$ oder $\varphi_\sigma(B) = w$,
6. $\varphi_\sigma((A \leftrightarrow B)) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B)$,
7. $\varphi_\sigma(\forall v A) = w$ gdw für alle Variablenbelegungen σ' unter $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn σ' eine v-Variante von σ ist, dann $\varphi_{\sigma'}(A) = w$,
8. $\varphi_\sigma(\exists v A) = w$ gdw es eine Variablenbelegung σ' unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass gilt: σ' ist eine v-Variante von σ und $\varphi_{\sigma'}(A) = w$.

Wenn $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und $\varphi_\sigma(A) = w$, dann sagen wir, dass A wahr ist in der Interpretation $\mathfrak{I}$ unter der Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$; im Falle $\varphi_\sigma(A) = f$ nennen wir A natürlich falsch in der Interpretation $\mathfrak{I}$ unter der Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$.

Dazu ist noch zu erklären:

- Seien σ, σ' Variablenbelegungen unter einer Interpretation $\mathfrak{I}$:

  σ' ist eine v-*Variante* einer Variablenbelegung σ gdw für alle Individuenvariablen v', sodass $v' \neq v$, gilt: $\sigma'(v') = \sigma(v')$.

Eine v-Variante stimmt also jedenfalls bezüglich aller Individuenvariablen außer v mit der ursprünglichen Variablenbelegung überein – und vielleicht sogar auch bezüglich v, das Letztere muss jedoch nicht der Fall sein. Somit ist also auch jede Variablenbelegung eine v-Variante ihrer selbst (bezüglich einer beliebigen Individuenvariable v):

- Für alle Variablenbelegungen σ unter einer Interpretation $\mathfrak{I}$ und alle Individuenvariablen v gilt: σ ist ebenfalls eine v-Variante von σ.

Im Kontext der vorgegebenen Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ bilden natürlich *alle* Variablenbelegungen $\sigma, \sigma', \ldots$ jede unserer Individuenvariablen in den Gegenstandsbereich D ab. Auf diese Weise geht der Gegenstandsbereich in die Semantik der Quantoren ein.

Veranschaulichen wir dies anhand des Beispiels aus der letzten Sektion: Unsere prädikatenlogische Sprache war gegeben durch drei Individuenkonstanten a, b, c und zwei einstellige Prädikaten G und M, die folgendermaßen interpretiert wurden:

- $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$,
- $D = \{1, 2, 3\}$,
- $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 2$, $\varphi(c) = 3$, $\varphi(G) = \{2\}$, $\varphi(M) = \varnothing$.

Und bei den Variablenbelegungen betrachteten wir:

- $\sigma_1 = \overbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\sigma_2 = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- $\sigma_3 = 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots$

Beginnen wir bei den atomaren Formeln. Diese können auch Individuenvariablen enthalten und diese Variablen kommen dann natürlich frei vor, da ja in atomaren Formeln keine Quantoren vorkommen. Wir hatten ursprünglich gesagt, dass offene Formeln "eigentlich" nicht wahr oder falsch sein können, denn sie behaupten ja nichts über irgendein wohlbestimmtes Objekt, und somit erhalten sie auch keinen Wahrheitswert. Der Grund dafür, dass wir in unseren Wahrheitsbedingungen den offenen Formeln nun *doch* Wahrheitswerte zuordnen, ist, dass wir dabei eine Variablenbelegung "festhalten", die Variablen mit bestimmten Werten oder Bezugsobjekten versehen. Die Variabilität der Werte der Variablen wird dann erst durch die Vielfalt der vorhandenen Variablenbelegungen gewährleistet. Alle diese vielen verschiedenen Variablenbelegungen lassen aber jedenfalls die Individuenkonstanten "in Ruhe", da sie ja nicht für diese definiert sind und auch keinen semantischen Einfluss auf die Referenz der Individuenkonstanten besitzen. Dies erkennt man auch an dem obigen Beispiel. Es gilt etwa:

- $\varphi_{\sigma_1}(G(b)) = w$,
- $\varphi_{\sigma_2}(G(b)) = w$,
- $\varphi_{\sigma_3}(G(b)) = w$,

Tatsächlich wird der Formel $G(b)$ unter *jeder* Variablenbelegung σ der Wert w zugeordnet. Dies folgt unmittelbar aus unserer semantischen Regel für atomare Formeln, da ja nach der Angabe von φ gilt, dass $\varphi_\sigma(b) \in \varphi(G)$: Denn $\varphi_\sigma(b)$ ist die Zahl 2, $\varphi(G)$ ist die Menge $\{2\}$, und 2 ist ein Element von $\{2\}$.

Genauso wird auch der atomaren Formel $G(a)$ unter jeder Variablenbelegung der Wert f zugeordnet. Aussagenlogische Zusammensetzungen solcher atomaren Formeln werden dann gemäß der bereits wohlbekannten semantischen Regeln für die aussagenlogischen Junktoren bewertet. Zum Beispiel wird der Negation der Formel $G(b)$ – also der Formel $\neg G(b)$ – dann der Wert f zugeordnet. Usw.

Ersetzen wir jedoch die Individuenkonstante b in $G(b)$ durch eine Individuenvariable – etwa x –, so erhalten wir:

- $\varphi_{\sigma_1}(G(x)) = f$,

- $\varphi_{\sigma_2}(G(x)) = f$,
- $\varphi_{\sigma_3}(G(x)) = w$.

Die Variable x ist ja nichts anderes als die Variable x_1, deren Wert unter einer Variablenbelegung σ das Objekt $\sigma(x_1)$ ist. Im Falle von σ_1 und σ_2 ergibt sich dabei der Wert 1 – denn $\sigma_1(x_1) = \sigma_2(x_1) = 1$ – während der Wert von x_1 gemäß der Variablenbelegung σ_3 die Zahl 2 ist. Aus der semantischen Regel für atomare Formeln ergeben sich dann sofort die obigen Wahrheitswerte von $G(x)$ unter σ_1, σ_2 und σ_3. Es gibt also Variablenbelegungen, unter denen die Formel $G(x)$ wahr ist, und andere Variablenbelegungen, unter denen diese Formel nicht wahr ist. Alles, was wir hier gesagt haben, lässt sich direkt auch auf die Bewertung von atomaren Formeln mit zweistelligen, dreistelligen, usw. Prädikaten übertragen, allerdings haben wir es mit solchen in unserer einfachen Beispielssprache von oben gar nicht zu tun.

Betrachten wir nun Beispiele mit Quantoren: Für alle Variablenbelegungen σ gilt

- $\varphi_\sigma(\exists x G(x)) = w$.

Dies folgt aus der Anwendung unserer semantischen Regel für existentiell quantifizierte Formeln. Denn wann immer wir eine Variablenbelegung σ betrachten, so finden wir mindestens eine x-Variante σ' von ihr, so dass $\varphi_{\sigma'}(G(x)) = w$. Wir brauchen dabei immer nur den Gegenstand, der durch die Variablenbelegung σ der Individuenvariable x zugeordnet wird, durch die Zahl 2 zu "ersetzen" (und alle anderen Werte von σ unverändert zu lassen), und $G(x)$ wird dann wie vorher bei σ_3 als wahr herauskommen. Dass ein solches σ' immer noch eine Variablenbelegung über unserer Interpretation $\mathfrak{I}$ von oben ist, liegt daran, dass die Zahl 2 in der Tat ein Element des von uns gewählten Gegenstandsbereiches D ist. $\exists x G(x)$ stellt sich unter der prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I}$ und einer beliebigen Variablenbelegung σ als wahr heraus, weil es wenigstens ein Objekt in D gibt, das G ist, d.h., das in der Menge $\{2\}$ liegt.

Schließlich gilt auch Folgendes: Für alle Variablenbelegungen σ,

- $\varphi_\sigma(\forall x G(x)) = f$.

Dies folgt nun aus der Anwendung unserer semantischen Regel für universell quantifizierte Formeln. Denn wann immer wir eine Variablenbelegung betrachten, so finden wir unter all ihren x-Varianten mindestens eine Variablenbelegung σ', so dass $\varphi_{\sigma'}(G(x)) = f$. Um ein solches σ' zu gewinnen, ordne man einfach der Variable x irgendetwas *anderes* als den Gegenstand 2 zu – etwa die

Zahl 1 oder die Zahl 3, die ja beide ebenfalls im obigen Gegenstandsbereich D liegen – und schon wird $G(x)$ wie vorher bei σ_1 oder σ_2 als falsch herauskommen. $\forall x G(x)$ stellt sich unter der prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I}$ und einer beliebig gewählten Variablenbelegung σ als falsch heraus, weil es nicht der Fall ist, dass alle Objekte in D G sind, d.h., in der Menge $\{2\}$ liegen.

Die Formeln $\exists x G(x)$ und $\forall x G(x)$ sind geschlossene Formeln. Solche Formeln haben, wie wir an unseren beiden Beispielsformeln gesehen haben, bezüglich ihrer Wahrheit oder Falschheit eine besondere Eigenschaft: Sie sind *unabhängig* von den Variablenbelegungen entweder "immer" wahr oder "immer" falsch, oder genauer:

- Für alle Formeln A gilt:
  Wenn A geschlossen ist, dann gilt für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$:

  1. Wenn es eine Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, so dass $\varphi_\sigma(A) = w$, dann gilt für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_\sigma(A) = w$.
  2. Wenn es eine Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, so dass $\varphi_\sigma(A) = f$, dann gilt für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_\sigma(A) = f$.

Die Umkehrungen der beiden Implikationssätze gelten aus rein logischen Gründen ohnehin.

Daraus folgt, dass wir die Erwähnung von Variablenbelegungen bei der Zuordnung von Wahrheitswerten zu *geschlossenen* Formeln "unterdrücken" dürfen, wenn wir wollen. Wir dürfen, wenn wir wollen, unsere ursprünglichen Interpretationsfunktion φ wie folgt auf geschlossene Formeln erweitern:

- Sei $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ eine prädikatenlogische Interpretation.

  Dann dürfen wir für alle *geschlossenen* Formeln A schreiben:

  1. $\varphi(A) = w$ gdw für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = w$.
  2. $\varphi(A) = f$ gdw für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = f$.

In Worten: Wir dürfen sagen, dass eine geschlossene Formel A in einer prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I}$ wahr ist, oder dass diese geschlossene Formel in dieser Interpretation falsch ist, *ohne dabei auch etwas zu Variablenbelegungen sagen zu müssen.*

So können wir jetzt etwa schreiben:

- $\varphi(G(b)) = w$,

- $\varphi(\neg G(b)) = f$,
- $\varphi(G(a)) = f$,
- $\varphi(\exists x G(x)) = w$,
- $\varphi(\forall x G(x)) = f$.

Und ebenso:

- $\varphi(\exists x M(x)) = f$,
- $\varphi(\forall x M(x)) = f$.
- $\varphi(\neg\exists x M(x)) = w$,
- $\varphi(\exists x \neg M(x)) = w$,
- $\varphi(\forall x \neg M(x)) = w$.
- $\varphi(\neg\exists x \neg M(x)) = f$,
- $\varphi(\neg\forall x \neg M(x)) = f$,
- $\varphi(G(b) \wedge \neg\exists x \neg M(x)) = f$,
- $\varphi(\forall x (M(x) \rightarrow G(x))) = w$,
- $\varphi(\exists x (M(x) \wedge G(x))) = f$.

Bei den offenen Formeln müssen wir jedoch dabei bleiben, auch eine Variablenbelegung σ mit anzugeben, relativ zu derer offene Formeln dann überhaupt erst einen Wahrheitswert erhalten.

Selbst wenn wir uns letztlich nur für geschlossene Formeln interessieren sollten, ist die ursprüngliche Definition von φ_σ, die auf eine vorgegebene Variablenbelegung σ hin relativiert war, *von fundamentaler Bedeutung*: Denn auch wenn es sich als irrelevant herausgestellt hat, mit welcher Variablenbelegung man die Bewertung einer geschlossenen Formel wie oben $\exists x G(x)$ oder $\forall x G(x)$ *beginnt*, sobald man die semantische Regeln für die Quantoren einmal angewandt hat, um den Wahrheitswert von $\exists x G(x)$ bzw. $\forall x G(x)$ zu bestimmen, wird man zurückgeworfen auf die Bestimmung des Wahrheitswertes von $G(x)$ *und dafür ist dann die Bezugnahme auf eine Variablenbelegung essentiell.* Dies liegt daran, dass unsere semantischen Regeln von einem Kompositionalitätsgedanken getragen sind: Die Bedeutung eines komplexen Satzes ist durch Bedeutung seiner syntaktischen Teile bestimmt (und durch die Weise, in der diese syntaktisch zusammengesetzt wurden); und ebenso verhält es sich mit dem Wahrheitswert eines komplexen Satzes. Das heißt aber auch: Die Bedeutung von $\forall v \ldots$ bzw. $\exists v \ldots$ hängt von der Bedeutung von $\ldots$ ab. Bei $\ldots$ handelt es sich aber normalerweise um eine offene Formel! D.h.: Man muss sich für die Wahrheitsbedingungen von offenen Formeln unter bestimmten Variablenbelegungen interessieren, selbst wenn man letztlich nur die Wahrheitswerte von geschlossenen Formeln bestimmen will.

Sehen wir uns das noch genauer an einem Beispiel an: Sagen wir, wir führen in unsere obige Beispielssprache zusätzlich das zweistellige Prädikat R ein, und wir erweitern unsere vorgegebene Interpretationsfunktion φ auf folgende Weise um eine zusätzliche Interpretation von R:

$$\varphi(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$$

Man könnte für R wiederum eine "intuitive" Deutung anzugeben versuchen, die sich dann auch mehr oder weniger elegant natursprachlich wiedergeben ließe, aber das ist gar nicht notwendig: Wir haben unsere Semantik ja so aufgebaut, dass die Interpretationen von Prädikaten Extension, d.h., *Mengen* sind – eine solche Menge (in diesem Fall von Paaren) haben wir festgelegt, und mehr ist zur Festlegung der Wahrheitswerte der Formeln in unserer prädikatenlogischen Sprache auch gar nicht notwendig.

Dann ergibt sich:

- $\varphi(\forall x \exists y(G(y) \wedge R(x, y))) = w$

Dies weist man mit Hilfe der semantischen Regeln für die Quantoren wie folgt nach, wobei σ eine beliebig vorgegebene Variablenbelegung unter $\mathfrak{I}$ ist:

- $\varphi_\sigma(\forall x \exists y(G(y) \wedge R(x, y))) = w$

  gdw für alle Variablenbelegungen σ' unter $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn σ' eine x-Variante von σ ist, dann $\varphi_{\sigma'}(\exists y(G(y) \wedge R(x, y))) = w$

  gdw für alle Variablenbelegungen σ' unter $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn σ' eine x-Variante von σ ist, dann gibt es eine Variablenbelegung σ'' unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass gilt: σ'' ist eine y-Variante von σ' und $\varphi_{\sigma''}(G(y) \wedge R(x, y)) = w$.[2]

Aber Letzteres ist in der Tat der Fall: Denn sei σ eine beliebige Variablenbelegung über $\mathfrak{I}$; sei σ' eine beliebige x-Variante von σ. Dann kann σ' der Variable

[2]Man beachte: Da in diesem Schritt der metasprachliche Ausdruck '$\varphi_{\sigma'}(\exists y(G(y) \wedge R(x, y))) = w$' gemäß der semantischen Regeln "aufgelöst" werden soll, muss nunmehr auf eine Variante der Variablenbelegung σ' Bezug genommen werden – nicht einer Variante von σ – denn in '$\varphi_{\sigma'}$' ist ja von der Variablenbelegung σ' die Rede und nicht etwa von σ.

x nur einen der folgenden drei Werte zuordnen: 1 oder 2 oder 3. In jedem dieser drei Fälle gibt es aber dann eine Variablenbelegung σ'', die eine y-Variante von σ' ist und für die $\varphi_{\sigma''}(G(y) \wedge R(x, y)) = w$ ist. Man nehme nur σ' her, ändere den Wert von y (was immer der auch sei) auf die Zahl 2 ab, und schon ergibt sich $G(y) \wedge R(x, y)$ als wahr, denn 2 ist in der Extension von G, und egal, was der Wert von x ist – 1 oder 2 oder 3 – dieser Wert steht dann immer in der R-Beziehung zum Wert von y, da ja alle der Paare $\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle$ in der Extension von R liegen und somit alle Objekte im Gegenstandsbereich in der R-Beziehung zur Zahl 2 stehen. Wir sehen dabei, dass wir zur Bewertung von $\forall x \exists y(G(y) \wedge R(x, y))$ Schritt für Schritt die Quanten "abgebaut" haben und dadurch auf mehr und mehr freie Variablenvorkommnisse gestoßen sind, für deren Wertzuweisung wiederum die Verwendung von Variablenbelegungen unumgänglich ist. Analog ergibt sich übrigens, in diesem speziellen Beispiel:

- $\varphi(\exists y \forall x(G(y) \wedge R(x, y))) = w$

Nochmals kurz zusammengefasst: Der Wahrheitswert einer komplexen Formel hängt von den Wahrheitswerten ihrer Teilformeln ab; vernünftig gebildete geschlossene Formeln mit Quantoren enthalten aber Teilformeln, die offen sind, und um diese zu bewerten, braucht man Variablenbelegungen. An der Verwendung von Variablenbelegungen führt also kein Weg vorbei.

Kein Weg? Manche Autoren vermeiden die Bewertung von offenen Formeln mittels Variablenbelegungen, indem sie eine sogenannte *substitutionelle Semantik* der Quantoren verwenden. Die semantischen Regeln für quantifizierte Sätze sehen dann etwa so aus: Die Bezugnahme auf ein σ wird fallengelassen, und man fordert stattdessen

- $\varphi(\forall v A[v]) = w$ gdw für alle Individuenkonstanten c gilt: $\varphi(A[c/v]) = w$,
- $\varphi(\exists v A[v]) = w$ gdw es gibt eine Individuenkonstante c, sodass gilt: $\varphi(A[c/v]) = w$.

Mit 'Individuenkonstanten' ist dabei natürlich gemeint: Individuenkonstanten *in der vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache*.

In einer solchen Semantik heißt $\forall$ dann nicht mehr 'für alle Objekte (in D)', sondern vielmehr 'für alle Eigennamen (in der vorgegebenen Sprache)'; analog für den Existenzquantor. Und dabei zeigt sich auch die philosophische Krux einer solchen Semantik: 'für alle' *sollte* eigentlich 'für alle *Objekte*' bedeuten. Selbst wenn nicht jedes Ding im Universum einen Eigennamen hätte, würde man mit 'für alle' doch 'für alle Dinge' sagen wollen und nicht etwa 'für alle Dinge, die einen Eigennamen haben' oder 'für alle Eigennamen'. In der Tat ist jedenfalls für die natürliche Sprache die Annahme, dass jedes Einzelding einen Eigennamen besitzt, absurd: Es gibt beispielsweise überabzählbar viele reelle Zahlen – Punkte auf der Zahlengeraden – die keinen Namen besitzen, und man würde doch mit 'für alle reellen Zahlen' nicht nur über diejenigen reellen Zahlen reden wollen, die sehr wohl einen Eigennamen aufweisen (wie 0, 1, -7, 0.275, $\sqrt{2}$, π usw.). Aus diesem Grunde bevorzugen heute die meisten Philosophen und Logiker eine sogenannte *objektuale Semantik*, in deren semantischen Regeln für die Quantoren auf Objekte und nicht bloß auf Eigennamen Bezug genommen wird. Die von uns oben eingeführte Semantik für prädikatenlogische Sprachen ist gerade eine solche objektuale Semantik.

10.4 Die semantischen Begriffe für die Prädikatenlogik

Mit dem Rüstzeug der letzten Sektion sind wir nun endlich in der Lage, alle zentralen semantischen Begriffe für die prädikatenlogischen Sprachen präzise zu definieren.

Zuerst führen wir das prädikatenlogische Gegenstück zum Begriff der Tautologizität in der Aussagenlogik ein:

- Eine prädikatenlogische Formel A ist *logisch wahr* gdw für alle prädikatenlogischen Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = w$.

Man sagt auch: Jede Interpretation zusammen mit einer beliebigen Variablenbelegung ist ein "Modell" für eine logisch wahre Formel. Beispiele für solchen logisch wahren Formeln sind zunächst einmal alle Formeln, die die logische Form einer aussagenlogischen Tautologie aufweisen, wie etwa

- $G(a) \rightarrow G(a)$
- $Z(b) \vee \neg Z(b)$

Dabei setze man immer entsprechende prädikatenlogische Sprachen voraus, die diese Beispiele auch wirklich als Formeln enthalten.

Denn angenommen, z.B., $G(a) \rightarrow G(a)$ wäre falsch in einer prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ (Variablenbelegungen dürfen wir hier ja ignorieren, da $G(a) \rightarrow G(a)$ *geschlossen* ist): Dann müsste zugleich $G(a)$ (als Antezedens) wahr und $G(a)$ (als Konsequens) falsch sein, was nicht möglich ist. Also kann $G(a) \rightarrow G(a)$ gar nicht falsch in der angenommenen Interpretation sein. $G(a) \rightarrow G(a)$ ist demnach wahr in jeder Interpretation, d.h. logisch wahr.

Entsprechend können natürlich auch *offene* Formeln solchermaßen logische Wahrheiten sein, wie

- $G(x) \rightarrow G(x)$
- $Z(y) \vee \neg Z(y)$

Die Argumentation dafür ist ganz analog, nur muss man dabei auch eine (beliebig vorgegebene) Variablenbelegung berücksichtigen.

Darüberhinaus existieren aber auch genuin *prädikaten*logische Wahrheiten:

- $\forall x G(x) \rightarrow G(a)$
- $Z(x) \rightarrow \exists x Z(x)$
- $\forall x(G(x) \wedge Z(y) \rightarrow G(x))$
- $\forall x(G(x) \wedge Z(x)) \rightarrow \exists x Z(x)$

Dies folgt wieder mehr oder weniger direkt aus den semantischen Regeln der prädikatenlogischen Semantik. Zum Beispiel, für den zweiten Beispielssatz kurz zusammengefasst: Wenn $Z(x)$ wahr ist in $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ unter σ, dann muss $\sigma(x)$ ein Element von $\varphi(Z)$ sein; folglich ist $\varphi(Z)$ nicht leer, und somit muss auch $\exists x Z(x)$ wahr sein unter $\mathfrak{I}$. Daher ist $Z(x) \rightarrow \exists x Z(x)$ logisch wahr – die Formel kann nicht als falsch herauskommen.

Analog lässt sich das Gegenstück zum aussagenlogischen Begriff der Kontradiktion definieren:

- Eine prädikatenlogische Formel A ist *logisch falsch* gdw für alle prädikatenlogischen Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = f$.

Anders ausgedrückt: A ist eine Kontradiktion gdw es nicht der Fall ist, dass es eine prädikatenlogische Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und eine Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass gilt: $\varphi_\sigma(A) = w$.

Typische logisch falsche Formeln sind natürlich immer noch Formeln der Form

- $B \wedge \neg B$.

die wir ja bereits seit der Aussagenlogik als kontradiktorisch kennen. Betrachten wir dazu das konkrete Beispiel

- $G(b) \wedge \neg G(b)$

Denn angenommen $G(b)$ ist wahr in einer Interpretation – die Wahl der Variablenbelegung spielt ja bei dieser *geschlossenen* Formel wieder keine Rolle – dann ist $\neg G(b)$ natürlich falsch und somit ist die Konjunktionsformel gemäß unserer semantischen Regeln für die Prädikatenlogik auch falsch. Gleiches gilt aber auch unter der Annahme, dass $G(b)$ falsch ist.

Neben solchen quasi "aussagenlogischen" Kontradiktionen gibt es aber auch genuin *prädikaten*logisch falsche Formeln, wie etwa:

- $\forall x P(x) \land \exists x \neg P(x)$
- $\forall x P(x) \land \neg P(a)$
- $P(a) \land \neg \exists x P(x)$
- $\forall x \forall y R(x, y) \land \exists y \neg R(a, y)$

Und wie schon in der aussagenlogischen Semantik können wir auch festlegen:

- Eine prädikatenlogische Formel A ist *kontingent* gdw A weder logisch wahr noch logisch falsch ist.
- Eine prädikatenlogische Formel A ist *erfüllbar* gdw A nicht logisch falsch ist.

Kontingente Formeln sind also alle erfüllbar, und erfüllbare Formeln sind entweder logisch wahr oder aber kontingent.

Alle obigen Beispiele für logisch wahre Formeln sind natürlich auch Beispiele für erfüllbare Formeln. Hier sind noch ein paar Beispiele für erfüllbare Formeln, welche *kontingent* sind:

- $G(b)$
- $\neg G(b)$
- $G(x)$
- $\neg M(x)$
- $\exists x G(x)$
- $\forall x G(x)$
- $\forall y G(x)$
- $\neg \exists x M(x)$

Wie weist man zum Beispiel $\forall y G(x)$ als erfüllbar nach? Wieder nur kurz umrissen: Man wähle eine Interpretation und eine Variablenbelegung so, dass der Wert von x in der Extension von G zu liegen kommt. Dann wird $G(x)$ wahr sein. $\forall y$ wird nach einer Anwendung der semantischen Regel für den Allquantor eliminiert und spielt sodann keine Rolle für den Wahrheitswert von $G(x)$ mehr, da dieser ausschließlich von der Interpretation von G und dem Wert von x unter der gewählten Variablenbelegung abhängt.

Natürlich gilt Folgendes:

- Für alle Formeln A: Wenn A logisch wahr ist, dann ist A erfüllbar.

Die Umkehrung dieses Prinzips gilt jedoch offensichtlich nicht. Beispielsweise ist zwar die Formel $G(a)$ erfüllbar, aber sicherlich nicht logisch wahr, da diese Formel in jeder Interpretation falsch ist, in der $\varphi(a)$ kein Element von $\varphi(G)$ ist.

Manchmal ist es auch zweckmäßig, einen Erfüllbarkeitsbegriff für *Mengen* von Formeln zur Verfügung zu haben, welcher wie folgt definiert wird:

- Eine Menge M von Formeln ist *erfüllbar* gdw es eine prädikatenlogische Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und eine Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass für alle Formeln $A \in M$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = w$.

Man beachte dabei, dass eine Menge von Formeln durchaus *als Menge* unerfüllbar sein kann, obwohl zugleich alle ihre Elemente *als Formeln* erfüllbar sind. So ist etwa die Menge $\{\forall x P(x), \exists x \neg P(x)\}$ unerfüllbar, während die Formeln $\forall x P(x)$ und $\exists x \neg P(x)$ für sich genommen sehr wohl erfüllbar sind.

Der letzte semantische Begriff, den wir für prädikatenlogische Formeln festlegen wollen, ist der der logischen Folge. Die Intuition, die uns hier leitet, ist diejenige, die wir schon aus der aussagenlogischen Semantik kennen, nämlich dass eine Formel, die aus einer anderen Formel logisch folgt, "unmöglich" falsch sein kann, falls die andere Formel wahr ist. D.h.:

- Für alle Formeln A, B gilt: *B folgt logisch aus A* ($A \models B$) gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und alle Variablenbelegungen σ von $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\varphi_\sigma(A) = w$, dann $\varphi_\sigma(B) = w$.

Die logische Äquivalenz von Formeln besteht dann in der logischen Folge "in beide Richtungen". Oder dazu äquivalent:

- Für alle Formeln A, B gilt: *A ist logisch äquivalent zu* B ($A \models B$ und $B \models A$) gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und alle Variablenbelegungen σ von $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B)$.

Zum Beispiel erhalten wir:

- $\forall x A$ ist logisch äquivalent mit $\neg \exists x \neg A$.

- $\exists xA$ ist logisch äquivalent mit $\neg\forall x\neg A$.

Wir könnten daher, wenn wir wollten – und ohne dabei semantisch etwas zu verlieren – einen der beiden Quantoren einfach metasprachlich mittels des jeweils anderen Quantors (und der Negation) definieren.

Wie schon in der aussagenlogische Semantik fügen wir schließlich auch noch den noch wichtigeren Begriff der logischen Folge aus einer *Menge* von Formeln hinzu:

- Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n$ und alle Formeln B gilt:

  B folgt logisch aus $A_1, \ldots, A_n$ ($A_1, \ldots, A_n \models B$) gdw

  für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi\rangle$ und alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn für alle Formeln A_i mit $i = 1, \ldots, n$ gilt, dass $\varphi_\sigma(A_i) = w$, dann gilt auch, dass $\varphi_\sigma(B) = w$.

Und wie in der Aussagenlogik ist es auch üblich,

- $\models A$

zu schreiben für den Sachverhalt, dass A logisch wahr ist. Die Idee dahinter ist wieder: A ist logisch wahr gdw A logisch aus der *leeren Menge* von Formeln folgt, also ohne jede weitere Annahme "immer" wahr ist.

Insbesondere erhalten wir mit dem Begriff der logischen Folge auch die folgenden wohlbekannten prädikatenlogischen Gesetze, die sich allesamt auf Basis der semantischen Regeln für die Prädikatenlogik und der obigen Definition der logischen Folge nachweisen lassen:

- *Quantorennegationsgesetze*:
  - $\forall x\neg P(x) \models \neg\exists xP(x)$
  - $\neg\forall xP(x) \models \exists x\neg P(x)$
  - $\exists x\neg P(x) \models \neg\forall xP(x)$
  - $\neg\exists xP(x) \models \forall x\neg P(x)$
- *Quantorenvertauschungsgesetze*:
  - $\forall x\forall yP(x, y) \models \forall y\forall xP(x, y)$
  - $\exists x\exists yP(x, y) \models \exists y\exists xP(x, y)$
  - $\exists x\forall yP(x, y) \models \forall y\exists xP(x, y)$

    (Wie wir bereits wissen, gilt jedoch *nicht*: $\forall y\exists xP(x, y) \models \exists x\forall yP(x, y)$)

- *Quantorendistributionsgesetze*:
  - $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \models \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
  - $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
  - $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \models \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

    (Dies gilt jedoch *nicht*: $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$)

- *Quantorenverschiebungsgesetze*:
  - $\forall x(P(a) \rightarrow Q(x)) \models P(a) \rightarrow \forall x Q(x)$
  - $\exists x P(x) \rightarrow Q(a) \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$
  - etc.

Betrachten wir beispielsweise das etwas seltsam anmutende Quantorverschiebungsgesetz $\exists x P(x) \rightarrow Q(a) \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$: Nehmen wir einmal an, dass $\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$ wahr wäre bei einer Interpretation, $\forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$ aber falsch wäre bei eben dieser Interpretation: Da $\forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$ falsch ist bei der Interpretation, muss es möglich sein, x mittels einer Variablenbelegung σ einen Wert im Gegenstandsbereich D so zuzuordnen, dass $P(x) \rightarrow Q(a)$ bei der Interpretation und der nämlichen Variablenbelegung σ als falsch herauskommt: d.h. aber auch, dass $P(x)$ dabei als wahr, $Q(a)$ aber als falsch herauskommen muss. Wenn $P(x)$ wahr unter der Interpretation und der Variablenbelegung σ ist, dann muss aber auch $\exists x P(x)$ wahr sein unter der Interpretation. Also: $\exists x P(x)$ ist dann wahr bei der Interpretation und $Q(a)$ ist falsch bei der Interpretation. Dann ist aber auch $\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$ falsch bei der Interpretation, was im Widerspruch zu unserer anfänglichen Annahme steht, dass $\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$ wahr ist bei der Interpretation. Somit kann es gar nicht der Fall sein, dass $\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$ wahr ist bei einer Interpretation, $\forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$ aber falsch bei derselben Interpretation. Kurz: $\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$ impliziert logisch $\forall x(P(x) \rightarrow Q(a))$.

Hier sind nochmals einige Folgerungsbehauptungen, welche *nicht* gelten:

- $\neg \forall x P(x) \models \forall x \neg P(x)$
- $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists y \forall x R(x, y)$
- $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \models \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \exists x P(x)$

Dass diese metasprachlichen Sätze falsch sind, beweist man leicht dadurch, dass man *Gegenbeispiele* angibt: d.h. prädikatenlogische Interpretationen und zugehörige Variablenbelegungen, die zusammengenommen die linke Seite einer solchen Behauptung wahrmachen, die rechte Seite jedoch falsch. Zum Beispiel, was die erste falsche Behauptung von oben betrifft: Man wähle eine Interpretation so, dass wenigstens ein Objekt im Gegenstandsbereich nicht in $\varphi(P)$ ist, zugleich aber auch wenigstens ein Objekt im Gegenstandsbereich in $\varphi(P)$ zu liegen kommt; dann ist zwar $\neg\forall x P(x)$ wahr in dieser Interpretation, $\forall x \neg P(x)$ aber falsch. Somit kann die behauptete Beziehung der logischen Folge klarerweise nicht bestehen.

Hier sind einige sehr wohl bestehende logische Folgerungen aus Mengen von Formeln:

- $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a) \models Q(a)$
- $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a) \models \exists x Q(x)$
- $\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg Q(b) \models \neg P(b)$
- $\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x \neg Q(x) \models \exists x \neg P(x)$

Ebenso ist der Fall: Wenn der singuläre Term t frei ist für die Individuenvariable v in der Formel $A[v]$, dann

- $A[t/v] \models \exists v A[v]$
- $\forall v A[v] \models A[t/v]$

Anhand des Beispiels erklärt, das wir schon im letzten Kapitel verwendet haben: Angenommen, v wäre x und $A[v]$ wäre die die Formel $\exists y R[x, y]$. Dann gilt

- $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists y R(z, y)$
- $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists y R(a, y)$

weil sowohl z als auch a frei sind für x in $\exists y R[x, y]$. Aber es gilt *nicht*, dass

- $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists y R(y, y)$

Dies weist man wieder leicht durch Angabe eines Gegenbeispiels nach: Man lasse zum Beispiel D die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen sein und $\varphi(R)$ die Kleiner-als Relation auf den natürlichen Zahlen – dann ist $\forall x \exists y R(x, y)$ wahr in dieser Interpretation, $\exists y R(y, y)$ aber falsch. Diese letzte (falsche) Behauptung einer logischen Folge war auch oben nicht gemeint, denn y ist in der Tat *nicht* frei ist für x in $\exists y R[x, y]$.

Zuletzt ist es uns auch ein Leichtes, die logische Gültigkeit von Argumentformen der prädikatenlogischen Sprache zu definieren:

- Eine Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ der prädikatenlogischen Sprache ist *logisch gültig* genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Alle diese semantischen Begriffe lassen sich wie schon im Falle der Aussagenlogik auf natursprachliche Aussagesätze und Argumente übertragen, indem man zunächst die (prädikaten-)logischen Formen dieser Aussagesätze und Argumente bestimmt und dann die oben definierten semantische Begriffe auf die dabei gewonnenen prädikatenlogischen Repräsentationen anwendet. Der Vorgang ist genau analog zu dem in der Aussagenlogik, der einzige Unterschied besteht in der sowohl syntaktisch als auch semantisch überlegenen "Feinkörnigkeit" der Prädikatenlogik im Vergleich zur "grobschlächtigeren" Aussagenlogik.