Kapitel 11

Prädikatenlogisches Herleiten

Wir haben die deduktive Methode ja schon ausführlich anhand unseres Systems des natürlichen Schließens in der Aussagenlogik besprochen. Entsprechend der Erweiterung der Menge der logischen Zeichen in den prädikatenlogischen Sprachen – in denen ja die Quantoren $\forall$ und $\exists$ als logische Zeichen zu den aussagenlogischen Junktoren hinzukommen – ergänzen wir im Folgenden auch die Regeln für die aussagenlogischen Junktoren um Herleitungregeln für die beiden Quantoren. Auf diese Weise werden wir ein System des natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik erhalten, dessen zugehörige Herleitungsbeziehung $\vdash$ sich ganz analog zur Aussagenlogik als extensionsgleich zu der semantischen Beziehung $\models$ der logischen Folge für die prädikatenlogischen Sprachen erweisen wird, die wir im letzten Kapitel definiert und untersucht haben.

11.1 Die zusätzlichen Herleitungsregeln der Prädikatenlogik

Zunächst fügen wir unseren aussagenlogischen Schlussregeln die folgenden zwei prädikatenlogischen Regeln hinzu, deren zugehörige Argumentformen wir im Rahmen unserer Behandlung der Substitution in den letzten Kapiteln schon diskutiert haben. Dadurch erweitert sich dann auch der Umfang unserer Herleitungsrelation $\vdash$:

(UB) Für den Fall, dass t frei ist für v in A:
$\forall v A \vdash A[t/v]$ (Universelle Beseitigung)

(EE) Für den Fall, dass t frei ist für v in A:
$A[t/v] \vdash \exists v A$ (Existentielle Einführung)

Diese Einsetzungregeln haben beide die Eigenschaft, Einsetzungsinstanzen von Termen zu involvieren, und beide Regeln sind entsprechend nur anwendbar, wenn der Term t, der dabei eingesetzt wird bzw. wurde, frei für die relevante Variable in der relevanten Formel ist. Während (UB) ein Vorkommnis des Allquantors beseitigt, führt (EE) ein Vorkommnis des Existenzquantors ein.

Betrachten wir dazu das folgendes Beispiel eines Schlusses in der natürlichen Sprache:

Es gibt keine Dronten.

Daher gibt es etwas, das keine Dronte ist.

Die prädikatenlogische Repräsentierung eines solchen Argumentes sollte natürlich unter Verwendung unseres formalen Konklusionsindikators $\therefore$ vonstatten gehen, hier (wie auch bei den folgenden Beispielen) geht es uns aber weniger um die Repräsentierung, sondern vielmehr darum, dass dieser Schluss prädikatenlogisch gültig ist – auch wenn dies in diesem Fall zunächst etwas kontraintuitiv erscheinen mag. Der Grund für die Gültigkeit des Schlusses ist, wie bereits besprochen, dass in der klassischen Prädikatenlogik angenommen wird, dass es im zugrundeliegenden Gegenstandsbereich mindestens einen Gegenstand gibt. Wenn es nun aber keinen Gegenstand gibt, der eine Dronte ist, so gibt es doch noch mindestens einen Gegenstand *überhaupt*, und dieser kann dann keine Dronte sein. Es muss also, wenn sich die Herleitbarkeitsbeziehung $\vdash$ letztlich als vollständig in Hinblick auf $\models$ erweisen soll, die Konklusion auch aus der Prämisse herleitbar sein, d.h. es muss gelten:

- $\neg\exists x D(x) \vdash \exists x \neg D(x)$

Und mittels der Regeln von oben (hier (EE)) ist dies auch der Fall:

$\underline{1.\ \neg\exists x D(x)}$ (P1)

2. $\|\ \neg\neg D(y)$ (IB-Annahme)

3. $\|\ D(y)$ 2. (DN2)

4. $\|\ \exists x D(x)$ 3. (EE)

5. $\|\ \exists x D(x) \land \neg\exists x D(x)$ 4., 1. (KON)

6. $\neg D(y)$ 2.–5. (IB)

7. $\exists x \neg D(x)$ 6., (EE)

Man beachte, dass y für x frei ist in $D(x)$ bzw. $\neg D(x)$ – andernfalls wären die jeweiligen Schlüsse mittels (EE) auf die Zeilen 4. und 7. auch nicht erlaubt gewesen. Anstatt den indirekten Beweis mittels $\neg\neg D(y)$ in Zeile 2. zu führen, hätten wir diesen übrigens auch mittels $\neg\neg D(a)$ führen können, wobei a dann eine beliebig gewählte Individuenkonstante wäre; der Schluss von 3. auf 4. wäre dann eine Anwendung von (EE) gewesen, welche von $D(a)$ zu $\exists x D(x)$ geführt hätte, und der Schluss von 6. auf 7. wäre eine Anwendung von (EE) gewesen, welche von $\neg D(a)$ zu $\exists x \neg D(x)$ geführt hätte. Die zugehörigen Substitutionen wären dabei gänzlich harmlos gewesen, weil Individuenkonstanten ja *immer* frei sind für Variablen, für die sie eingesetzt werden. Andererseits haben wir in Kapitel 9 gesehen, dass es eine Wahlfreiheit in Bezug auf Individuenkonstanten gibt: Insbesondere kann man eine prädikatenlogische Sprache so wählen, dass sie völlig ohne Individuenkonstanten auskommt. In einem solchen Fall hätte man dann gar keine Individuenkonstante a zu Verfügung, die man anstatt von y in Zeile 3. der obigen Herleitung hätte verwenden können. Das ist auch der Grund, warum das Verwenden von Individuenvariablen zu Zwecken wie dem in der Herleitung oben Vorteile bietet: Man hat nämlich jedenfalls *per definitionem* in jeder prädikatenlogischen Sprache *unendlich viele* Individuenvariablen zur Verfügung.

Sehen wir uns noch ein weiteres einfaches Beispiel an:

Alle Gegenstände sind nicht abstrakt.

Daher sind nicht alle Gegenstände abstrakt.

Wiederum ist dieser Schluss logisch gültig – wie man leicht mit Hilfe der prädikatenlogischen Semantik aus dem letzten Kapitel nachweisen kann – und wir wollen somit, dass auch auf syntaktischer Ebene gilt:

- $\forall x \neg A(x) \vdash \neg \forall x A(x)$

Und erneut stellt sich dies auf Basis der Regeln von oben (hier (UB)) als wahr heraus:

1. $\forall x \neg A(x)$ (P1)

2. $\|$ $\neg\neg\forall x A(x)$ (IB-Annahme)

3. $\|$ $\forall x A(x)$ 2. (DN2)

4. $\|$ $A(y)$ 3. (UB)

5. $\|$ $\neg A(y)$ 1. (UB)

6. $\parallel A(y) \land \neg A(y)$ 4., 5. (KON)

7. $\neg \forall x A(x)$ 2.–6. (IB)

Abermals erweisen sich die beiden Anwendungen von (UB) als zulässig, weil y sowohl in $A(x)$ als auch in $\neg A(x)$ frei für x ist. In Zukunft werden wir dies bei Anwendungen von (UB) oder (EE) nicht mehr extra anmerken, sondern einfach bei der Angabe von Herleitungen, in denen eine dieser beiden Regel Verwendung findet, voraussetzen. De facto muss beim Herleiten aber immer geprüft werden, ob (UB) bzw. (EE) korrekt angewendet werden, und das beinhaltet, dass die entsprechende 'frei für' Bedingung erfüllt ist – wäre dem nicht so, würde es sich nicht um eine Herleitung in unserem prädikatenlogischen System des natürlichen Schließens handeln.

Wir wollen nun ein Beispiel betrachten, in dem wir mit den zwei zusätzlichen Regeln von oben *nicht* auskommen:

Es gibt keine Fische, die nicht schwimmen können.

Daher können alle Fische schwimmen.

Als Herleitbarkeitsbehauptung formuliert, sieht dies wie folgt aus:

- $\neg \exists x (F(x) \land \neg S(x)) \vdash \forall x (F(x) \rightarrow S(x))$

Hier müssen wir für die Rekonstruktion dieses logisch gültigen Schlusses mittels einer Herleitung letztlich eine Formel mit einem Allquantor *einführen*, wofür unsere obige *Beseitigungs*regel für den Allquantor nicht ausreicht. Stattdessen erweitern wir unser Regelsystem um die folgende Metaregel, die der Einführung von universell quantifizierten Formeln dient:

(UE) Universelle Einführung, vorausgesetzt VB:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \vdash B[v_1/v_2]}{A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B}$$

v_1 soll dabei wieder frei sein für v_2 in der Formel B. Dabei ist noch die folgende *Variablenbedingung* zu beachten:

VB Die Individuenvariable v_1 darf unter dem Bruchstrich, also in $A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$ nicht frei vorkommen.

Die zugrundeliegende semantische Idee dieser Regel ist: Wenn v_1 nirgendswo in

$$A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$$

frei vorkommt, und dennoch die Herleitbarkeitsbeziehung

$$A_1, \ldots, A_m \vdash B[v_1/v_2]$$

besteht – wobei v_1 in $B[v_1/v_2]$ natürlich frei vorkommen kann – so muss $B[v_1/v_2]$ gegeben $A_1, \ldots, A_m$ der Fall sein, *ganz unabhängig davon, welches Objekt im Gegenstandsbereich der Wert der Variable v_1 ist und auf welches Objekt $B[v_1/v_2]$ somit zutrifft.* Anders ausgedrückt: Es muss dann auch $\forall v_2 B$ logisch aus den Formeln $A_1, \ldots, A_m$ folgen, auf denen die Herleitung von B beruhte! Dies lässt sich auch semantisch mit den formalen Mitteln aus dem letzten Kapitel ohne Weiteres nachweisen. Anders ausgedrückt: Wenn man mit $A_1, \ldots, A_m$ zeigen kann, dass ein "beliebig gewähltes" Objekt v_1 (über welches $A_1, \ldots, A_m$ nichts Spezielles aussagen) die Eigenschaft $B[v_1/v_2]$ hat, dann lässt sich mit $A_1, \ldots, A_m$ auch die universell quantifizierte Formel $\forall v_2 B$ zeigen (sofern auch diese nichts Spezifisches mehr über v_1 aussagt). Als Herleitbarkeitsbeziehung formuliert, ergibt dies aber genau die Regel (UE) mit der entsprechenden Variablenbedingung VB.

(UE) ist übrigens genau in demselben Sinne eine *Meta*regel, wie beispielsweise (IB) in der Aussagenlogik eine Metaregel war: Es handelt sich gewissermaßen um einen Metaschluss, der von der Zulässigkeit eines Schlusses auf die Zulässigkeit eines anderen Schlusses schließt. Im Unterschied zu den aussagenlogischen Metaregeln benötigt (UE) jedoch keine spezifischen Annahmen: Während beispielsweise jede Anwendung von (IB) neben den "gegebenen" Formeln $A_1, \ldots, A_n$ die Zusatzannahme $\neg B$ nötig machte, lässt sich (UE) rein auf Basis der "gegebenen" Formeln $A_1, \ldots, A_n$ durchführen. Daher lässt sich (UE) auch einfacher notieren als die aussagenlogischen Metaregeln, weil auf eine spezielle Zeile mit einer "UE-Annahme" verzichtet werden kann.

Zum Beispiel können wir mit Hilfe von (UE) die Herleitung zu

- $\neg\exists x(F(x) \wedge \neg S(x)) \vdash \forall x(F(x) \rightarrow S(x))$

durchführen:

1. $\underline{\neg\exists x(F(x) \wedge \neg S(x))}$ (P1)
2. $\|$ $F(y)$ (KB-Annahme)
3. $\|$ $\|$ $\neg S(y)$ (IB-Annahme)
4. $\|$ $\|$ $F(y) \wedge \neg S(y)$ 2., 3. (KON)
5. $\|$ $\|$ $\exists x(F(x) \wedge \neg S(x))$ 4. (EE)

6. $\|$ $\|$ $\exists x(F(x) \wedge \neg S(x)) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge \neg S(x))$ 5., 1. (KON)

7. $\|$ $S(y)$ 3.–6. (IB)

8. $F(y) \rightarrow S(y)$ 2.–7. (KB)

9. $\forall x(F(x) \rightarrow S(x))$ 8. (UE)

Für die Anwendung von (UE) auf Zeile 8. muss die Variablenbedingung erfüllt sein. Hier heißt dies: B ist die Formel $F(x) \rightarrow S(x)$, v_1 ist die Variable y, und v_2 ist die Variable x. Die Variable y darf also in keiner Prämisse oder noch aktiven Annahme, auf der die Zeile 9. beruht, frei vorkommen, noch darf y in der Konklusion 9. der Anwendung von (UE) frei vorkommen. Die einzige relevante Prämisse oder Annahme in diesem konkreten Fall ist die Prämisse in Zeile 1. selbst, in der y gar nicht vorkommt und somit auch nicht frei vorkommt. In der Zeile 9. kommt y ebenfalls nicht vor und somit auch nicht frei vor. Die Variablenbedingung ist hier also erfüllt – andernfalls würde es sich nicht um eine prädikatenlogische Herleitung handeln. Man beachte, dass y auch in keiner IB-Annahme, KB-Annahme oder FU-Annahme frei vorkommen dürfte, die eventuell in der Zeile der Anwendung von (UE) noch nicht abgeschlossen wäre; in dem Falle der letzten Herleitung waren allerdings sowohl der konditionale Beweis als auch der indirekte Beweis schon abgeschlossen, sodass die jeweiligen KB- bzw. IB-Annahmen nicht dahingehend überprüft werden mussten.

Wenn wir in Zukunft davon sprechen, dass gemäß der Variablenbedingung für UE eine Individuenvariable v_1 in $A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$ nicht frei vorkommen darf, so meinen wir damit immer: $A_1, \ldots, A_m$ sind die *relevanten* Prämissen oder Annahmen, auf denen der Schluss auf $B[v_1/v_2]$ beruht: Prämissen, die bei der Herleitung von $B[v_1/v_2]$ gar nicht verwendet wurden, Annahmen, die bei der Herleitung von $B[v_1/v_2]$ gar nicht verwendet wurden, Annahmen, die bei der Herleitung von $B[v_1/v_2]$ zwar Verwendung fanden, jedoch bereits geschlossen wurden, oder Formeln in irgendwelchen Zwischenschritten der Herleitung werden dabei *nicht* als zu den "relevanten" Formeln $A_1, \ldots, A_m$ gehörig gezählt. Und in diesen relevanten Formeln $A_1, \ldots, A_m$ darf dann laut VB die relevante Variable v_1 nicht frei vorkommen, genausowenig wie v_1 in B frei vorkommen darf; andernfalls würde es sich nicht um eine korrekte Anwendung von UE handeln. Ganz analog werden wir später auch noch die Variablenbedingung in einer weiteren prädikatenlogischen Herleitungsregel verstehen.

Wir haben gesehen, dass, wenn wir ohne spezifische Bezugnahme (durch eine Individuenvariable) auf einen Gegenstand in den Prämissen zeigen können, dass auf einen konkreten Gegenstand die (komplexe) Eigenschaft A zutrifft, so dürfen wir mittels (UE) schließen, dass diese Eigenschaft dann *jedem* Gegenstand zukommt. Betrachten wir dazu ein weiteres ganz einfaches Beispiel: Angenommen, wir wollen

- $\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)$

spaßeshalber ohne Zuhilfenahme unserer aussagenlogischen Regel (TS) herleiten. Dann können wir auch wie folgt vorgehen:

1. $\underline{\forall x P(x)}$ (P1)
2. $P(y)$ 1. (UB)
3. $\forall x P(x)$ 2. (UE)

$P(y)$ in Zeile 2. ist herleitbar unabhängig davon, wofür y stehen soll. In der Syntax soll es ja auch gar nicht darum gehen, welches Zeichen wofür steht. Weil der Wert von y aber sozusagen beliebig ist, lässt sich mittels (UE) auch $\forall x P(x)$ zeigen. Hier wäre die Herleitung von 3. aus 1. aber selbstverständlich auch anders möglich gewesen. Die Variablenbedingung ist in diesem Falle aber jedenfalls erfüllt, da in der einzigen Annahme in dieser Herleitung – der Prämisse P1 – die Variable y nicht vorkommt und daher auch nicht frei vorkommt, und dasselbe gilt für das Resultat der Anwendung von (UE), d.h. die Zeile 3.

Die Erfüllung der Variablenbedingung ist wesentlich, wenn wir keine semantisch (wie auch intuitiv) ungültigen Herleitungen produzieren wollen. Ebenso kann man zeigen, dass die implizite Forderung wichtig ist, dass in $B[v_1/v_2]$ auch wirklich *alle* freien Vorkommnisse von v_2 durch die Variable v_1 ersetzt werden; aber so haben wir Substitution ja von vornherein verstanden. Betrachten wir für den Moment nur das folgende Beispiel, das die Variablenbedingung motivieren soll.

Dies ist beispielsweise selbstverständlich *keine* Herleitung in unseren prädikatenlogischen System des natürlichen Schließens:

1. $\underline{P(x)}$ (P1)
2. $\forall y P(y)$ 1. (UE)

Die Zeile 1. ist der spezielle Fall einer Zeile, die sowohl ein Annahme – nämlich die Prämisse P1 – als auch eine, gegeben die Prämissen, sozusagen bereits als "hergeleitet" zu zählende Formel darstellt. Für die Anwendung von (UB) müsste die Variable v_1 hier die Variable x sein, die Variable v_2 aber die Variable y. Die Variable x (v_1) darf aber dann nicht in Zeile 1. frei vorkommen, wenn es sich bei der Anwendung von (UB) um eine zulässige Anwendung unter Berücksichtigung der Variablenbedingung VB handeln soll. x kommt aber sehr wohl in Zeile 1. frei vor, weshalb es sich bei der obigen Folge von Formeln auch nicht um eine Herleitung handelt. Und das ist auch gut so: Aus $P(x)$ folgt ja schließlich auch nicht logisch (d.h. semantisch), dass $\forall y P(y)$ der Fall ist. Aus genau demselben Grund ist natürlich auch dies *keine* Herleitung:

1. $P(x)$ (P1)

2. $P(x)$ 1. (TS)

3. $\forall y P(y)$ 2. (UE)

Wir werden später noch ein interessanteres Beispiel behandeln, welches ebenfalls die obige Variablenbedingung rechtfertigt.

Sehen wir uns aber zunächst noch einige *korrekte* Anwendungsbeispiele zu den bisherigen Quantorenregeln an:

Alles ist abstrakt oder konkret.

Es gibt aber nichts Abstraktes.

Also gibt es etwas Konkretes.

- $\forall x(A(x) \vee K(x)), \neg\exists x A(x) \vdash \exists x K(x)$

1. $\forall x(A(x) \vee K(x))$ (P1)

2. $\neg\exists x A(x)$ (P2)

3. $A(y) \vee K(y)$ 1. (UB)

4. $\|$ $\neg\neg A(y)$ (IB-Annahme)

5. $\|$ $A(y)$ 4. (DN2)

6. $\|$ $\exists x A(x)$ 5. (EE)

7. $\|$ $\exists x A(x) \wedge \neg\exists x A(x)$ 6., 2. (KON)

8. $\neg A(y)$ 4.–7. (IB)

9. $K(y)$ 3., 8. (DS1)

10. $\exists x K(x)$ 9. (EE)

Das ist ein weiteres typisches Beispiel für eine prädikatenlogische Herleitung: Aus generellen Sätzen werden zunächst Formeln ohne Quantoren abgeleitet – mittels der Beseitigungsregeln – dann wird mit diesen aussagenlogisch geschlossen, um schließlich mit Hilfe von Einführungsregeln wieder bei generellen Sätzen zu enden.

Ähnlich hier, wobei sich die Konklusion aber von der vorigen Konklusion unterscheidet:

> Alles ist abstrakt oder konkret.
>
> Es gibt aber nichts Abstraktes.
>
> ---
>
> Also ist alles konkret.

- $\forall x(A(x) \lor K(x)), \neg\exists x A(x) \vdash \forall x K(x)$

  1. $\forall x(A(x) \lor K(x))$ (P1)

  2. $\underline{\neg\exists x A(x)}$ (P2)

  3. $A(y) \lor K(y)$ 1. (UB)

  4. $\|\ \neg\neg A(y)$ (IB-Annahme)

  5. $\|\ A(y)$ 4. (DN2)

  6. $\|\ \exists x A(x)$ 5. (EE)

  7. $\|\ \exists x A(x) \land \neg\exists x A(x)$ 6., 2. (KON)

  8. $\neg A(y)$ 4.–7. (IB)

  9. $K(y)$ 3., 8. (DS1)

  10. $\forall x K(x)$ 9. (UE)

Die Variablenbedingung für die Anwendung von (UE) in Zeile 10. ist dabei erfüllt: Die Variable y kommt weder in den Annahmen P1 und P2, noch in der Konklusion von (UE) in Zeile 10. selbst vor, daher kommt y dort auch nicht frei vor.

Weiters:

Alle Philosophiestudentinnen sind fleißig.

Wenn also alles eine Philosophiestudentin ist, dann ist auch alles fleißig.

- $\forall x(P(x) \to F(x)) \vdash \forall x P(x) \to \forall x F(x)$

1. $\underline{\forall x(P(x) \to F(x))}$ (P1)

2. $\|$ $\forall x P(x)$ (KB-Annahme)

3. $\|$ $P(y) \to F(y)$ 1. (UB)

4. $\|$ $P(y)$ 2. (UB)

5. $\|$ $F(y)$ 4., 3. (MP)

6. $\|$ $\forall x F(x)$ 5. (UE)

7. $\forall x P(x) \to \forall x F(x)$ 2.–6. (KB)

Erneut ist die Variablenbedingung für die Anwendung von (UE) in Zeile 6. erfüllt: Die Variable y kommt weder in der Annahme P1, noch in der noch offenen KB-Annahme in Zeile 2., noch in der Konklusion von (UE) in Zeile 6. vor und somit auch nicht frei vor.

Wir sind aber noch nicht ganz "fertig" mit unserer prädikatenlogischen Herleitungsordnung. Nehmen wir an, wir haben das folgende semantisch wie auch intuitiv gültige Argument gegeben:

Manche Außerirdische stammen vom Vulkan.

Also gibt es Außerirdische.

In logische Form gebracht und als deduktiver Schluss formuliert, wobei a hier eine Individuenkonstante für 'Vulkan' ist:

- $\exists x(A(x) \wedge S(x,a)) \vdash \exists x A(x)$

Mathematiker und Mathematikerinnen verwenden die darin implizit enthaltene Schlussregel ständig. Informell lässt sich diese in etwa wie folgt erklären:

1. Gemäß der Prämisse, gibt es Außerirdische, die vom Vulkan stammen. Formal: $\exists x(A(x) \wedge S(x,a))$.

2. Sei y nun einer dieser Außerirdischen, die vom Vulkan stammen. (Man kann einen solchen wählen, denn es gibt diese ja nach der letzten Zeile.) Formal: $A(y) \land S(y, a)$.

(Dies ist der Schritt, den Mathematiker und Mathematikerinnen im Rahmen ihres Studiums ganz automatisch erlernen: *Es gibt etwas, das ... ist. Sei y nun eines der Dinge, die ... sind.* etc.)

3. Dieser y ist also ein Außerirdischer. (Da er ja nach vorher ein Außerirdischer ist, der vom Vulkan stammt.) Formal: $A(y)$.

4. Es gibt folglich Außerirdische. (y ist ein Beispiel, gemäß der vorherigen Zeile.) Formal: $\exists x A(x)$.

5. Die letzte Folgerung ist ganz unabhängig davon, welchen der Außerirdischen, die vom Vulkan stammen, man vorher ausgewählt hatte. Nur die Existenz von Außerirdischen, die vom Vulkan stammen, wurde in der "Herleitung" der Existenz von Außerirdischen vorausgesetzt. Es folgt daher in der Tat aus der Prämisse: Es gibt Außerirdische.
Formal: $\exists x A(x)$.

Um dies zu formalisieren, haben wir die letzte prädikatenlogische Regel zu verwenden, die uns noch zu unserem System des natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik fehlt: Die Regel der *Existentiellen Beseitigung*.

(EB) Existentielle Beseitigung, vorausgesetzt VB':

$$\frac{A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m \vdash B}{\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B}$$

v_1 soll dabei frei sein für v_2 in der Formel A. Es ist auch wieder eine *Variablenbedingung* zu beachten:

VB' Die Individuenvariable v_1 darf unter dem Bruchstrich, also in $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B$ nicht frei vorkommen.

Die Formeln $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m$ sind dabei wieder die "relevanten" Prämissen oder Annahmen, auf denen der Schluss auf B beruht – relevant in demselben Sinne, wie bereits für die Regel UE erklärt.

Die semantische Idee hinter dieser Regel ist ähnlich derjenigen für die Universelle Einführung: Wenn v_1 in

$$\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B$$

nicht frei vorkommt und dennoch

$$A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m \vdash B$$

der Fall ist – wobei in $A[v_1/v_2]$ die Variable v_1 selbstverständlich frei vorkommen kann – dann muss B aus $A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m$ logisch folgen, *unabhängig davon, welches Objekt der Wert der Variable* v_1 *ist.* Das heißt: Allein die *Existenz* eines Objektes, für das A der Fall ist, reicht zusammen mit $A_1, \ldots, A_m$ hin, um die Wahrheit von B zu gewährleisten. Dies ist aber genau, was die Regel (EB) ausdrückt. Und es lässt sich entsprechend mit den Mitteln des letzten Kapitels nachweisen, dass (EB) semantisch einwandfrei bzw. korrekt ist: Gegeben VB', wenn B logisch aus $A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m$ folgt, so folgt B auch schon aus $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m$.

(EB) ist offensichtlich wieder eine Metaregel. In diesem Fall macht die Anwendung von (EB) aber auch das Aufstellen einer Zusatzannahme nötig, nämlich der von $A[v_1/v_2]$. Die Situation im Rahmen einer Herleitung ist dann die: Man hat die Formeln $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m$ angenommen oder bereits hergeleitet. Das Vorhandensein der Formel $\exists v_2 A$ erlaubt es einem dann, die EB-Annahme $A[v_1/v_2]$ aufzustellen und auf diese Weise eine Anwendung der Existentiellen Beseitigung zu eröffnen. Daraus erklärt sich auch der Name 'Existentielle *Beseitigung*': Innerhalb einer Herleitung geht man nämlich von der Formel $\exists v_2 A$ mit anfänglichem Existenzquantor zu der einfacheren Formel $A[v_1/v_2]$ über, die über ein Existenzquantorvorkommnis weniger verfügt. A ist dabei nicht beliebig, sondern muss so beschaffen sein, dass nach Einsetzen einer Variable v_1 für die freien Vorkommnisse von v_2 in A – wobei v_1 frei sein muss für v_2 in A – gerade die EB-Annahme entsteht (also die Formel $A[v_1/v_2]$), und zugleich nach Voranstellen des Quantorausdrucks $\exists v_2$ vor A gerade die existentiell quantifizierte Formel $\exists v_2 A$ ensteht, die bereits vorhanden ist. Man kann sich dies auch so vorstellen: Gegeben $\exists v_2 A$, "nennt" man eines der Dinge, für die A gilt, v_1; dass es überhaupt etwas gibt, das man so benennen kann, ergibt sich durch das Vorhandensein von $\exists v_2 A$. Nach etwaigen weiteren Herleitungen wird diese Anwendung von (EB) dann durch das Herleiten einer Formel B beendet, die so beschaffen sein muss, dass weder in B, noch in einer der Formeln $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m$, auf der die Herleitung von B beruht, die Variable v_1 frei vorkommt (das ist die Variablenbedingung VB' von oben). Es war also für die Herleitung von B ganz egal, welches Objekt unter denen, die A erfüllten, man mit v_1 "benannt" hat – es ging einzig und allein um die Existenz eines solchen Objektes. Entsprechend ist B mittels (EB) aus der existentiell quantifizierten Formel $\exists v_2 A$ unter Zuhilfenahmme der übrigen Annahmen herleitbar.

Die entsprechende Herleitung für das obige Beispiel sieht dann so aus:

1. $\exists x(A(x) \wedge S(x,a))$ (P1)

2. $\|$ $A(y) \wedge S(y,a)$ (EB-Annahme)

3. $\|$ $A(y)$ 2. (SIMP1)

4. $\|$ $\exists x A(x)$ 3. (EE)

5. $\exists x A(x)$ 2.–4. (EB)

Die EB-Annahme $A(y) \wedge S(y,a)$ ist hier in der Tat so, dass sie aus der Formel $A(x) \wedge S(x,a)$, die sich nach $\exists x$ in Zeile 1. findet, durch Einsetzen von y (v_1) für die Variable x (v_2) entsteht. Nachdem Zeile 4. $\exists x A(x)$ dann aus der Prämisse (P1) und der EB-Annahme abgeleitet wurde und diese Anwendung der Existentiellen Beseitigung im Folgenden abgeschlossen werden soll, überprüft man, ob die Variablenbedingung VB' erfüllt ist: Hier ist dies offensichtlich der Fall, da y (v_1) weder in der Annahme P1, noch in dem Ende der (EB)-Anwendung, also in Zeile 4., vorkommt und somit dort natürlich auch nicht frei vorkommt. Das Endergebnis dieser Anwendung von (EB) wird dann in Zeile 5. zusammengefasst: Auf Basis des EB-Teiles in Zeile 2.–4. wurde auf die Formel $\exists x A(x)$ geschlossen. Durch die Variablenbedingung ist sichergestellt, dass dieser Schluss nur von der Existenz des Objektes y abhängig war, von dem in der EB-Annahme 2. die Rede war, nicht aber davon – semantisch ausgedrückt – welches Objekt im Gegenstandbereich der Wert der Variable y war.

Man beachte, wie sehr diese formale Herleitung die informelle "Herleitung" von oben nachbildet. Logisch gesehen, ist der Punkt der EB-Annahme in Zeile 2 dieser: Indem man den Existenzquantor durch "Wahl" eines "konkreten" Objektes y wegbekommt, gewinnt man Zugriff auf die in der Existenzformel enthaltene Konjunktionsformel, von der man dann mittels einer rein aussagenlogischen Regel (SIMP1) auf Zeile 3 schließen kann.

Noch eine letzte Bemerkung dazu: Nehmen wir an, man ist gerade dabei, auf Basis einer Formel $\exists v_2 A$ zu einer EB-Annahme $A[v_1/v_2]$ überzugehen, um damit eine Instanz der Existentiellen Beseitigung zu beginnen. Woraus erklärt sich dann die Wahl von v_1? Z.B.: Wie "ergibt" sich y aus der Formal $\exists x(A(x) \wedge S(x,a))$ in der vorigen Herleitung? Antwort: Die Wahl der nämlichen

Variable ist *völlig irrelevant*, solange letztlich die Variablenbedingung erfüllt sein wird (ohne die ja die Anwendung der Existentiellen Beseitigung nicht fertiggestellt werden kann). Beispielsweise lässt sich als v_1 *irgendeine* Variable wählen, die in keiner Prämisse, Annahme, oder bereits hergeleiteten Formel der nämlichen Herleitung enthalten ist. Kurz: Eine "neue" Variable. (So wie oben y "neu" war.)

Bringen wir noch einige weitere Anwendungsbeispiele:

Es gibt Zahlen.

Alle Zahlen sind abstrakte Gegenstände.

Also gibt es abstrakte Gegenstände.

- $\exists x Z(x), \forall x(Z(x) \to A(x)) \vdash \exists x A(x)$

1. $\exists x Z(x)$ (P1)

2. $\underline{\forall x(Z(x) \to A(x))}$ (P2)

3. $\|\ Z(y)$ (EB-Annahme)

4. $\|\ Z(y) \to A(y)$ 2. (UB)

5. $\|\ A(y)$ 3., 4. (MP)

6. $\|\ \exists x A(x)$ 5. (EE)

7. $\exists x A(x)$ 3.–6. (EB)

Bei dieser Herleitung wird also zuerst die EB-Annahme getroffen, mittels derer die "neue" Variable y eingeführt wird. Erst anschließend wird die Regel der Universellen Beseitigung (UB) unter Verwendung eben dieser Variable y angewendet. (Dies *muss* allerdings nicht unbedingt so gehandhabt werden, solange nur letztlich bei der Anwendung von EB die Variablenbedingung gewährleistet ist.)

Es gibt Salzburger.

Also gibt es Salzburger, die Salzburger sind.

- $\exists x S(x) \vdash \exists x(S(x) \land S(x))$

1. $\underline{\exists x S(x)}$ (P1)

2. $\|\ S(y)$ (EB-Annahme)

3. $\|\ S(y) \wedge S(y)$ 2., 2. (KON)

4. $\|\ \exists x(S(x) \wedge S(x))$ 3. (EE)

5. $\exists x(S(x) \wedge S(x))$ 2.–4. (EB)

Alles ist abstrakt.

Also ist es nicht der Fall, dass es etwas nicht Abstraktes gibt.

- $\forall x A(x) \vdash \neg\exists x \neg A(x)$

  1. $\underline{\forall x A(x)}$ (P1)

  2. $\|\ \neg\neg\exists x \neg A(x)$ (IB-Annahme)

  3. $\|\ \exists x \neg A(x)$ 2. (DN2)

  4. $\|\ \|\ \neg A(y)$ (EB-Annahme)

  5. $\|\ \|\ A(y)$ 1. (UB)

  6. $\|\ \|\ A(z) \wedge \neg A(z)$ 5., 4. (ECQ)

  7. $\|\ A(z) \wedge \neg A(z)$ 4.–6. (EB)

  8. $\neg\exists x \neg A(x)$ 2.–7. (IB)

Auf Basis des Vorhandenseins der Existenzformel in 3. darf hier die EB-Annahme in 4. eingeführt werden. Um den EB-Teil zu beenden, muss eine Formel hergeleitet werden, in der die Variable y nicht frei vorkommt: Es wäre daher nicht möglich gewesen, die Zeilen 5. und 4. durch (KON) mit Konjunktion zusammenzufügen und das Resultat als Ende des EB-Teiles zu verwenden, weil in der Formel $A(y) \wedge \neg A(y)$ ja die Variable y frei auftritt. Stattdessen wendet man einfach die aussagenlogische Regel des "Ex Contradictione Quodlibet" (aus einem Widerspruch folgt Beliebiges) auf 5. und 4. an, leitet damit beispielsweise die Formel $A(z) \wedge \neg A(z)$ ab – jede andere Formel der Form $C \wedge \neg C$, in der y nicht frei vorkommt, wäre genausogut geeignet gewesen – und beendet den EB-Teil dann mit dieser Formel. In 7. wird dieser Ergebnis nochmals zusammengefasst, und weil 7. eben von der Form $C \wedge \neg C$ ist, lässt sich damit auch der indirekte Beweis beenden, der in Zeile 2. begonnen worden war.

Jeder Mensch ist sterblich.
Alles ist materiell.

Es gibt Menschen.

Daher gibt es etwas, das sterblich und materiell ist.

- $\forall x(M(x) \to S(x)), \forall x M'(x), \exists x M(x) \vdash \exists x(S(x) \land M'(x))$

1. $\forall x(M(x) \to S(x))$ (P1)

2. $\forall x M'(x)$ (P2)

3. $\underline{\exists x M(x)}$ (P3)

4. $\|$ $M(y)$ (EB-Annahme)

5. $\|$ $M(y) \to S(y)$ 1. (UB)

6. $\|$ $S(y)$ 4., 5. (MP)

7. $\|$ $M'(y)$ 2. (UB)

8. $\|$ $S(y) \land M'(y)$ 6., 7. (KON)

9. $\|$ $\exists x(S(x) \land M'(x))$ 8. (EE)

10. $\exists x S(x)$ 4.–9. (EB)

Zum Abschluss wollen wir noch zwei Beispiele für *Pseudo*herleitungen betrachten, in denen zu Unrecht eine der Variablenbedingungen ignoriert wurde:

1. $\underline{\forall x \exists y R(x, y)}$ (P1)

2. $\exists y R(x, y)$ 1. (UB)

3. $\|$ $R(x, z)$ (EB-Annahme)

4. $\|$ $\forall x R(x, z)$ 3. (UE)

5. $\|$ $\exists y \forall x R(x, y)$ 4. (EE)

6. $\exists y \forall x R(x, y)$ 3.–5. (EB)

Wir wissen bereits, dass aus $\forall x \exists y R(x,y)$ *nicht* logisch folgt, dass $\exists y \forall x R(x,y)$ der Fall ist. Wenn unsere Herleitungsregeln alle korrekt sind und auch korrekt angewandt werden, dann darf daher aus $\forall x \exists y R(x,y)$ die Formel $\exists y \forall x R(x,y)$ auch *nicht* herleitbar sein. In der Tat ist etwas in der obigen versuchten Herleitung "schiefgegangen": Der Übergang von 1. auf 2. ist noch korrekt – die Variable x wird dabei in einer Anwendung von (UB) für sich selbst eingesetzt, was unproblematisch ist. Auch die EB-Annahme in 3. darf noch so getroffen werden. Aber dann Zeile 4.: Hier soll (UE) auf Zeile 3. angewandt werden. Die Formel $\forall x R(x,z)$ soll dabei die Formel $\forall v_2 B$ in (UE) sein, wobei v_2 die Variable x ist, v_1 ebenfalls die Variable x ist, B die Formel $R(x,z)$ sein soll, und $B[v_1/v_2]$ ebenso die Formel $R(x,z)$ sein soll. Die Variablenbedingung VB für (UE) lautete jedoch: Die Individuenvariable v_1 darf unter dem Bruchstrich, also in $A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$ nicht mehr frei vorkommen, wobei $A_1, \ldots, A_m$ die relevanten Annahmen sind, auf denen die Herleitung von $\forall v_2 B$ beruht. In unserem Fall: Die Variable x darf in den relevanten Annahmen, die für das Vorhandensein der Formel $\forall x R(x,z)$ in der Herleitung gesorgt haben, nicht mehr frei vorkommen. Hier ist jedoch eine dieser relevanten Annahmen die EB-Annahme $R(x,z)$ in Zeile 3.: $R(x,z)$ enthält aber die Variable x frei, sodass VB verletzt wurde. Aus diesem Grunde handelt es sich bei obiger Folge von Formeln auch nicht um eine Herleitung in unserem System des natürlichen Schließens.

Analog ist dies *keine* korrekte Anwendung von (EB):

$\underline{1.\ \exists x P(x)}$ (P1)

2. $\parallel P(y)$ (EB-Annahme)

3. $\parallel P(y)$ 2. (TS)

4. $P(y)$ 2.–3. (EB)

Die EB-Annahme in Zeile 2 ist harmlos, ebenso die Anwendung der trivialen Schlussform (TS). Der EB-Teil kann jedoch nicht mit $P(y)$ in Zeile 3. abgeschlossen werden, weil die Variablenbedingung VB' für (EB) u.a. besagt, dass die Individuenvariable v_1 (hier y) in der Konklusion B (hier $P(y)$) nicht frei vorkommen darf. In der Pseudoherleitung oben ist also VB' verletzt worden, weshalb es sich dabei ebensowenig um eine Herleitung handelt.

Mit unseren vier neuen Regeln – Einführungs- und Beseitigungsregeln sowohl für $\forall$ als auch für $\exists$ – ist unser Regelsystem für die Prädikatenlogik komplett. Auf Basis dieses erweiterten Regelsystems lassen sich nun alle syntaktischen Begriffe, die das Herleiten betreffen – die Beweisbarkeit von Formeln (prämissenfreie Herleitbarkeit), die Herleitbarkeit von Formeln aus Formeln, sowie die deduktive Gültigkeit von Argumentformen – genauso definieren, wie dies schon am Ende von Sektion 6.2 auf Basis der bloß aussagenlogischen Herleitungregeln geschehen ist. Wir verzichten daher auf eine Wiederholung dieser Definitionen und setzen einfach voraus, dass diese eins zu eins übertragen wurden.

11.2 Zusammenfassung der Regeln unseres prädikatenlogischen Systems des natürlichen Schließens

Wir können nun unser deduktives System für die Prädikatenlogik nochmals zusammenfassend angeben. Folgende Grundschlussregeln stehen uns zur Verfügung:

(MP) $A, A \to B \vdash B$ (Modus Ponens)

(MT) $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ (Modus Tollens)

(DS1) $A \lor B, \neg A \vdash B$ (Disjunktiver Syllogismus 1)

(DS2) $A \lor B, \neg B \vdash A$ (Disjunktiver Syllogismus 2)

(SIMP1) $A \land B \vdash A$ (Simplifikation 1)

(SIMP1) $A \land B \vdash B$ (Simplifikation 2)

(ADD1) $A \vdash A \lor B$ (Addition 1)

(ADD2) $B \vdash A \lor B$ (Addition 2)

(KON) $A, B \vdash A \land B$ (Konjunktion)

(DN1) $A \vdash \neg\neg A$ (Doppelte Negation 1)

(DN2) $\neg\neg A \vdash A$ (Doppelte Negation 2)

(DIS) $A \to C, B \to C \vdash A \lor B \to C$ (Disjunktion)

(TS) $A \vdash A$ (Triviale Schlussform)

(ECQ) $A, \neg A \vdash B$ (Ex Contradictione Quodlibet)

(ÄQ-EIN) $A \to B, B \to A \vdash A \leftrightarrow B$ (Einführung der Äquivalenz)

(ÄQ-ELIM1) $A \leftrightarrow B \vdash A \to B$ (Elimination der Äquivalenz 1)

(ÄQ-ELIM2) $A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$ (Elimination der Äquivalenz 2)

(UB) (t frei für v in A!) $\forall v A \vdash A[t/v]$ (Universelle Beseitigung)

(EE) (t frei für v in A!) $A[t/v] \vdash \exists v A$ (Existentielle Einführung)

Folgende Metaregeln stehen zur Verfügung:

(IB) Wenn $\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B}$$

(KB) Wenn $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$ eine Schlussregel ist, so ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B \rightarrow C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, B \vdash C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B \rightarrow C}$$

(FU) Wenn $A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ und $\neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ Schlussregeln sind, dann ist auch $B_1, \ldots, B_n \vdash C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A, B_1, \ldots, B_n \vdash C \quad \neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C}{B_1, \ldots, B_n \vdash C}$$

(UE) (Beachte VB! Und v_1 frei für v_2 in B!)
Wenn $A_1, \ldots, A_m \vdash B[v_1/v_2]$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \vdash B[v_1/v_2]}{A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B}$$

(EB) (Beachte VB'! Und v_1 frei für v_2 in A!)
Wenn $A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m \vdash B$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m \vdash B}{\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B}$$

11.3 Zusätzliche Faustregeln für das prädikatenlogische Herleiten

Wir wollen schließlich noch einige zusätzliche – allein die Prädikatenlogik betreffende – Faustregeln für die deduktive Methode angeben:

Ist eine *Prämissenformel* eine *Existenzformel* $\exists v_2 A$, so versuche man eine **Existentielle Beseitigung**, und zwar derart, dass eine Annahme der Form $A[v_1/v_2]$ getroffen wird, sodass beim folgenden Herleiten einer Konklusion die *Variablenbedingung* VB' erfüllt ist: Weder in einer der verwendeten Prämissen noch in der Konklusion der (EB) noch in der Annahme einer sonstigen offenen Unterherleitung darf die Individuenvariable v_1 frei vorkommen.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Allformel* $\forall v A$, so versuche man eine **Universelle Beseitigung**, und zwar derart, dass man eine Formel $A[t/v]$ als Konklusion erhält, wobei t ein singulärer Term ist, der entsprechend der herzuleitenden Formel zu wählen ist.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Existenzformel* $\exists v A$, so versuche man eine **Existentielle Einführung**, und zwar derart, dass man die Existenzformel aus einer Formel B (in der ein singulärer Term t vorkommt) dadurch erhält, dass $B = A[t/v]$.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Allformel* $\forall v_2 B$, so versuche man eine **Universelle Einführung**, und zwar derart, dass man eine Konklusion der Form $B[v_1/v_2]$ herleitet, wobei die *Variablenbedingung* VB erfüllt sein muss: Weder in einer der verwendeten Prämissen noch in der Konklusion der (UE) noch in der Annahme einer offenen Unterherleitung darf die Individuenvariable v_1 frei vorkommen.

11.4 Korrektheit und Vollständigkeit von $\vdash$ für die Prädikatenlogik

Wie schon in der Aussagenlogik ergibt sich die folgende Korrespondenz zwischen syntaktischen Begriffen und semantischen Begriffen der Prädikatenlogik:

- Herleitbarkeit entspricht der logischen Folge,
- Beweisbarkeit entspricht der logischen Wahrheit,
- deduktive Gültigkeit entspricht der logischen Gültigkeit.

Und erneut lässt sich auf Basis unserer exakten quasi-mathematischen Begriffsbildung *beweisen*, dass diese Begriffe jeweils zueinander in den folgenden *extensionalen* Zusammenhängen stehen (wobei wir wieder kurz '$\models A$' für 'A ist logisch wahr' schreiben, und wobei $\mathcal{F}$ die Menge der Formeln einer vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache ist):

- Korrektheit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$:
    Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $A_1, \ldots, A_n \models B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: Wenn $\vdash A$, dann $\models A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: Wenn $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ deduktiv gültig ist, dann ist $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig.

Sowie:

- Vollständigkeit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$:
    Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, dann $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: Wenn $\models A$, dann $\vdash A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: Wenn $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig ist, dann ist $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ deduktiv gültig.

Genau wie schon in der Aussagenlogik gilt: Während die Korrektheit sicherstellt, dass "nicht zu viel" in unserem System des natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik hergeleitet werden kann, sorgt die Vollständigkeit dieser Herleitungsordnung dafür, dass "nicht zu wenig" hergeleitet werden kann. Korrektheit und Vollständigkeit zusammengenommen ergeben dann wiederum die extensionale Übereinstimmung der zueinander korrespondierenden syntaktischen bzw. semantischen Begriffe:

- Korrektheit und Vollständigkeit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ gdw $A_1, \ldots, A_n \models B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: $\vdash A$ gdw $\models A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ ist deduktiv gültig gdw $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig ist.

Der Beweis dafür – der auf Kurt Gödels [4] Dissertation zum Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik zurückgeht – ist um einiges schwieriger als der für das entsprechende Ergebnis für die Aussagenlogik, er verwendet jedoch immer noch nur ganz übliche mathematische Hilfsmittel. Wir verzichten wiederum darauf, diesen Beweis anzugeben. (Gödels Beweis des Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik ist übrigens von seinen späteren *Un*vollständigkeitssätzen zu Systemen der Arithmetik zu unterscheiden.)

Wenn also B aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch (d.h. semantisch) folgt, dann ist B auch aus $A_1, \ldots, A_n$ herleitbar, und zwar auf Basis der von uns eingeführten Regeln. Genau das bedeutet es zu sagen, dass unsere Herleitungsordnung *vollständig* in Hinblick auf unsere Semantik ist. Dies impliziert jedoch *nicht*, dass man ein Computerprogramm schreiben könnte, das bei der Eingabe von B sowie $A_1, \ldots, A_n$ Folgendes tun würden: "Ja" auszugeben, wenn B aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt, und "Nein" auszugeben, wenn B *nicht* aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt. Ein solches Computerprogramm bzw. ein solcher Algorithmus wäre ein sogenanntes Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik. Es lässt sich jedoch beweisen, dass ein solches Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik nicht existiert (wie von Alonzo Church und Alan Turing bewiesen wurde). Durch systematische Anwendung der Regeln unseren Systems des natürlichen Schließens lassen sich zwar alle prädikatenlogischen Argumentformen $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ *aufzählen*, für die B aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt, es lässt sich aber nicht in endlicher Zeit *entscheiden*, ob B aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt. (Wenn dies nicht der Fall ist, wird zwar bei der systematischen Anwendung unserer Regeln $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ nie aufgezählt werden, es würde aber "unendlich lange" dauern, bis man dieses Umstands gewahr würde. :-) Dies stellt einen weiteren Unterschied zur Aussagenlogik dar, in der man jederzeit mittels eines einfachen Verfahrens entscheiden kann, ob eine aussagenlogische Formel B aus aussagenlogischen Formeln $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt oder nicht: Die Wahrheitstafelmethode war gerade so ein Verfahren. Zu dieser existiert jedoch, beweisbarerweise, kein Gegenstück in der komplexeren Prädikatenlogik.