Kapitel 12

Appendix: Die materiale Implikation und Prädikatenlogik

In Kapitel 7 hatten wir gute Gründe für die Analyse von Implikationssätzen mittels der materialen Implikation angegeben – Gründe, die sich aus plausiblen Herleitungsregeln für das aussagenlogische Schließen ergeben hatten. Nun wollen wir noch zwei weitere gute Gründe für die materiale Deutung von Konditionalen hinzufügen, diesmal jedoch solche, welche sich zwanglos aus semantischen Überlegungen zur Prädikatenlogik ergeben.

Zunächst einmal sollte sich

1. Alle Ps sind Qs.

unproblematischerweise als logisch äquivalent zu

2. Für alle x gilt: Wenn x ein P ist, dann ist x ein Q.

ergeben, und zwar ganz unabhängig davon, wie das 'Wenn... dann...' in 2 logisch repräsentiert wird (ob durch materiale Implikation oder anderweitig).

Zudem sollte Aussagesatz 1 notwendigerweise denselben Wahrheitswert haben wie

3. Die Menge der P-Dinge ist eine Teilmenge der Menge der Q-Dinge.

Daraus folgt, dass auch 2 und 3 notwendigerweise denselben Wahrheitswert aufweisen müssen.

Es zeigt sich nun, dass sich genau dies durch die Repräsentierung des 'wenn... dann...' mittels der materialen Implikation $\rightarrow$ ergibt:

4. $\forall x(P(x) \to Q(x))$ ("Für alle x gilt: $P(x)$ impliziert material $Q(x)$") hat notwendigerweise denselben Wahrheitswert wie $\{x\colon P(x)\} \subseteq \{x\colon Q(x)\}$ ("Die Menge der P-Dinge ist eine Teilmenge der Menge der Q-Dinge").

Dies lässt sich leicht semantisch nachweisen: Wenn $\forall x(P(x) \to Q(x))$ nämlich wahr ist bei einer Interpretation, dann muss dabei auch $\varphi(P) \subseteq \varphi(Q)$ gelten, und umgekehrt. Objekte $\sigma(x)$ im Gegenstandsbereich, für die $P(x)$ falsch ist unter einer Interpretation sowie einer Variablenbelegung σ, führen aufgrund der Wahrheitstafel der materialen Implikation sowieso immer zur Wahrheit von $P(x) \to Q(x)$ und spielen insofern keine Rolle. Entsprechend muss man auch keine $\neg P$-Objekte untersuchen, wenn man prüfen will, ob die Menge der P-Dinge eine Teilmenge der Menge der Q-Dinge ist. Die Objekte $\sigma(x)$ im Gegenstandsbereich jedoch, für die $P(x)$ wahr ist, spielen eine Rolle, weil sich für sie der Wahrheitswert von $P(x) \to Q(x)$ als wahr (Zeile 1 der materialen Wahrheitstafel) oder aber als falsch (Zeile 2 der materialen Wahrheitstafel) erweisen kann, und zwar in Abhängigkeit vom Wahrheitswert von $Q(x)$. Die Zuordnung von w im ersten Fall und von f im zweiten Fall, wie sich dies durch die Wahrheitstafel der materialen Implikation ergibt, führt genau dazu, dass die Äquivalenzaussage 4 von oben der Fall ist.

Dies heißt nun zwar *nicht*, dass die Analyse des 'wenn... dann...' mittels materialem $\to$ die *einzig* mögliche Analyse wäre, aus der sich die intendierte Konsequenz 4 ergibt, aber die Überlegung zeigt doch, dass die materiale Auffassung von Konditionalen in diesem Fall zu der gewünschten semantischen Folgerung führt, wie eben 4 von vorher.

Hier ist ein ähnliches prädikatenlogisch motiviertes Argument für die materiale Repräsentierung des 'wenn... dann...': Intuitiv sollte sich

5. Nicht für alle x gilt: A

als logisch äquivalent zu

6. Es gibt wenigstens ein x, für das gilt: $\neg A$

erweisen. In der Tat ergibt sich genau dies mit den semantischen Regeln in Kapitel 10 für $\forall$, $\exists$ und $\neg$:

7. $\neg\forall x A$

stellt sich in der Tat beweisbarerweise als logisch äquivalent zu

8. $\exists x \neg A$

heraus.

Nun setzen wir für A speziell die Formel $(P(x) \rightarrow Q(x))$ ein: Die Formel

9. $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

ist dann entsprechend logisch äquivalent mit

10. $\exists x\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$

wobei bislang noch nicht eingegangen ist, dass $\rightarrow$ bei uns für die materiale Implikation steht.

Aufgrund der Wahrheitstafel für die materiale Implikation ist nun aber wiederum

11. $\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$

logisch äquivalent mit

12. $(P(x) \wedge \neg Q(x))$

sodass sich

13. $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

unter der materialen Deutung von Implikationssätzen als logisch äquivalent zu

14. $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

herausstellt. *Und genau so sollte es auch sein!* Denn 13 heißt in Worten

15. Es ist nicht der Fall, dass alle P-Dinge Q-Dinge sind.

und 14 bedeutet

16. Es gibt etwas, das P aber nicht Q ist.

15 und 16 sind aber auch intuitiv miteinander logisch äquivalent. Die Repräsentierung des 'wenn... dann...' mittels materialer Implikation führt also erneut zu der genau richtigen und intendierten Folgerung.

Wiederum ließe sich diese Konsequenz vielleicht auch auf Basis einer anderen logischen Analyse des 'wenn... dann...' erzielen, aber dies müsste erst einmal gezeigt werden. Jedenfalls heißt dies, dass die materiale Implikation einige Eigenschaften besitzt, welche diese logische Verknüpfung auch aus prädikatenlogischer Sicht als attraktive Repräsentierung des indikativen 'wenn-dann' der natürlichen Sprache erscheinen lassen.