Kapitel 13

Erweiterungen der Prädikatenlogik

13.1 Das Identitätsprädikat als neues logisches Zeichen

Wie in Kapitel 9 behandelt, umfassen die logischen Zeichen unserer prädikatenlogischen Sprachen die aussagenlogischen Junktoren, die beiden Quantoren und die Individuenvariablen. Diese Zeichen sind auch im Alphabet einer prädikatenlogischen Sprache stets vorhanden, ganz egal wie man diese Sprachen sonst durch die Wahl der Individuenkonstanten und der Prädikate anlegen möchte. Nun gibt es aber auch ein spezielles *Prädikat*, das ebenfalls einen logisch-formalen Charakter hat, und von dem man daher sehr oft ebenfalls voraussetzen will, dass es als weiteres logisches Zeichen unter den stets vorhanden logischen Zeichen in einer prädikatenlogischen Sprache vorkommen soll: Das zweistellige Identitätsprädikat

$$=$$

In diesem Kapitel werden wir entsprechend dieses Zeichen den Alphabeten unserer prädikatenlogischen Sprachen als neues logisches Symbol hinzufügen. Wir werden sodann alle bisher formulierten Regeln – syntaktische Formations- oder Bildungsregeln für Formeln, semantische Regeln für Formeln und die Herleitungsregeln für Formeln – um spezifische Regeln für Identitätsformeln erweitern. Das dabei entstehende logische System werden wir dann *Prädikatenlogik mit Identität* nennen.

Identitätsformeln sind atomare Formeln, die ausdrücken, dass das Objekt, welches durch einen singulären Term bezeichnet wird, mit dem Objekt, das durch einen weiteren singulären Term bezeichnet wird, identisch ist. Gemäß unserer syntaktischen Formationsregeln für atomare Formeln, müssten wir nun beispielsweise

- $=(a, b)$
- $=(x, y)$
- $=(a, x)$

schreiben, wobei hier wie immer a, b Individuenkonstanten und x, y Individuenvariablen sind. Dies entspricht jedoch in keiner Weise den üblichen natursprachlichen Konventionen für die Formulierung von Identitätssätzen, wie sie zum Beispiel aus der Mathematik bekannt sind. Daher fügen wir unseren Formationsregeln stattdessen die folgende spezielle Klausel hinzu:

- Wenn t_1, t_2 singuläre Terme sind, so ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

die dafür sorgt, dass die beiden singulären Terme, auf die das Identitätsprädikat angewandt wird, das Identitätsprädikat sozusagen *in die Mitte nehmen*.

Betrachten wir dazu einige Beispiele:

(i) $a = b$

(ii) $x = y$

(iii) $a = x$

(iv) $y = c$

(v) $P = x$

(vi) $(a = b)$

(vii) $=(x, a)$

(i), (ii), (iii) und (iv) sind dann Formeln, (v), (vi) und (vii) hingegen nicht, weil in (v) P ein genereller Term ist und kein singulärer, in (vi) Klammern um die Identitätsformel gesetzt wurden, was nicht der obigen syntaktischen Regel für solche Formeln entspricht, und weil in (vii) die neue syntaktische Regel für Identitätsformeln überhaupt nicht berücksichtigt wurde.

Wenn wir ein neues logisches Zeichen einführen – und auch ein logisches Prädikat ist ein logisches Zeichen – so müssen wir dessen Bedeutung durch fest vorgegebene semantische Regeln festlegen. In unserer prädikatenlogischen Semantik fügen wir entsprechend die folgende Klausel zur Definition von prädikatenlogischen Bewertungen (nun mit Identität) hinzu:

- $\varphi_\sigma(t_1 = t_2) = w$ gdw $\varphi_\sigma(t_1) = \varphi_\sigma(t_2)$.

Man beachte dabei, dass wir links '=' schreiben, um das objektsprachliche Identitätszeichen zu bezeichnen, während wir rechts '=' schreiben, um metasprachlich die Identitätsrelation auszudrücken. Wenn man dies noch klarer machen wollte, könnte man auf der linken Seite beispielsweise zu einem neuen Zeichen greifen (z.B. '≡'), aber durch den Kontext wird ohnehin immer klar werden, was gemeint ist.

Die neue semantische Regel für die Identität stellt sicher, dass das Identitätszeichen der Objektsprache auch wirklich ausdrückt, dass etwas mit etwas weiterem identisch ist. Anders als bei nicht-logischen Prädikaten wird die Interpretation von = nicht "willkürlich" mittels einer einer Interpretationsfunktion φ festgelegt, stattdessen ist es eine "feste" semantische Regel, die dafür sorgt, dass das Identitätsprädikat immer die Identitätsbeziehung ausdrückt, und zwar ganz egal welcher Gegenstandsbereich D durch die Wahl einer prädikatenlogischen Interpretation zugrundegelegt wird.

Nun können wir etwa überprüfen, ob die Formel $\forall x\, x = x$ logisch wahr ist. In einer beliebigen Interpretation $\mathfrak{I}$ und für eine beliebige Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ ist die Formel $x = x$ offensichtlich wahr – d.h., erhält den Wahrheitswert w – einfach weil $\sigma(x)$ natürlich mit sich selbst identisch ist, egal welches Objekt im Gegenstandsbereich durch σ der Variable x zugeordnet wird. Die Formel $\forall x\, x = x$ ist also logisch wahr.

Genauso kann ein und dasselbe Objekt durch zwei verschiedene Variablen benannt werden, wenn die beiden Variablen durch die vorgegebene Variablenbelegung σ auf dasselbe Objekt abgebildet werden. Und es ist möglich, das zwei verschiedene Individuenkonstanten a und b unter der vorgegebenen Interpretation dasselbe Objekt bezeichen – formal: $\varphi(a) = \varphi(b)$ – wodurch dann die Formel $a = b$ als wahr in dieser Interpretation herauskäme. Dies würde sich bei der Repräsentierung von Eigennamen in der natürlichen Sprache dann ergeben, wenn diese Eigennamen genau dasselbe Objekt bezeichnen; man denke beispielsweise an 'Samuel Clemens' und 'Mark Twain'. Wenn diese beiden Eigennamen durch a und b repräsentiert werden, soll ja $a = b$ als wahr herauskommen. Wenn a unter φ Mark Twain bezeichnet, c aber durch φ auf Bertrand Russell abgebildet wird, dann ist in dieser Interpretation die Formel $a = c$ falsch, erhält also den Wert f.

Schließlich erweitern wir unsere Herleitungsordnung um spezielle Regeln für unser neues logisches Zeichen =. Dazu führen wir zwei neue Grundschlussregeln ein:

(REF) $\vdash \forall v\, v = v$ (Reflexivität)

(SUB) $\vdash \forall v_1 \forall v_2 (v_1 = v_2 \land A[v_1/v_3] \to A[v_2/v_3])$ (Substitution) wobei in (SUB) die Variablen v_1 und v_2 wie immer frei für v_3 in A sein sollen. Beide dieser Regeln sind prämissenfrei; man nennt solche Regeln dann auch 'Axiome'.

Es ist intuitiv klar, dass die Identitätsrelation eine sogenannte *Äquivalenzrelation* ist. Eine Äquivalenzrelation R besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x\, xRx$ (Reflexivität)
2. $\forall x \forall y (xRy \to yRx)$ (Symmetrie)
3. $\forall x \forall y \forall z (xRy \land yRz \to xRz)$ (Transitivität)

Wir setzen dabei R zwischen die nämlichen Variablen, so wie wir das auch bei $=$ getan haben. Syntaktisch ist R jedoch wieder nichts anderes als einfach ein zweistelliges Prädikat.

Wir wollen nun zeigen, dass unsere Identitätsrelation diese Eigenschaften besitzt, und zwar mit Hilfe der hinzugefügten Regeln bzw. Axiome von oben:

- $\vdash \forall x\, x = x$ (Reflexivität)

  1. $\forall x\, x = x$ (REF)

- $\vdash \forall x \forall y (x = y \to y = x)$ (Symmetrie)

  1. $\|$ $x = y$ (KB-Annahme)
  2. $\|$ $\forall x\, x = x$ (REF)
  3. $\|$ $x = x$ 2. (UB)
  4. $\|$ $\forall x \forall y (x = y \land x = x \to y = x)$ (SUB)
  5. $\|$ $\forall y (x = y \land x = x \to y = x)$ 4. (UB)
  6. $\|$ $x = y \land x = x \to y = x$ 5. (UB)
  7. $\|$ $x = y \land x = x$ 1., 3. (KON)
  8. $\|$ $y = x$ 7., 6. (MP)
  9. $x = y \to y = x$ 1.–8. (KB)
  10. $\forall y (x = y \to y = x)$ 9. (UE)
  11. $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$ 10. (UE)

Dabei ist in der Anwendung von (SUB) in 4. die Formel A genau die Formel $z = x$, die Variable v_1 die Variable x, die Variable v_2 die Variable y, und die Variable v_3 die Variable z. $A[v_1/v_3]$ ist dann in der Tat $x = x$, und $A[v_2/v_3]$ ist wie gewünscht $y = x$. Die Variablenbedingung (VB) ist bei den Anwendungen von (UE) in 10. und 11. erfüllt, weil die relevanten Variablen y und x dabei in den Konklusionen dieser Anwendungen in 10. und 11. nicht mehr frei vorkommen.

Das Transitivitätsgesetz

- $\vdash \forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \to x = z)$ (Transitivität)

lässt sich ganz analog zeigen: Die entscheidende Anwendung von (SUB) führt dabei zur Herleitung von

$$\forall y \forall z(y = z \land x = y \to x = z)$$

wobei die Formel A hier die Formel $x = x_4$ ist, die Variable v_1 die Variable y, die Variable v_2 die Variable z, und die Variable v_3 die Variable x_4. $A[v_1/v_3]$ ist dann entsprechend $x = y$, und $A[v_2/v_3]$ ist wie gewünscht $x = z$. Die Formeln $y = z$ und $x = y$ erhält man mittels KB-Annahmen und Anwendungen von (UB), sodass man dann wie schon im letzten Beispiel mit Anwendungen von (KON) und (MP) auf die Formel $x = z$ schließen kann, um schießlich den konditionalen Beweis beenden und die nötigen Allquantoren wieder mittels (UE) einführen zu können.

Mit Hilfe des neu eingeführten Identitätszeichens lassen sich nun auch Sätze in der prädikatenlogischen Sprache repräsentieren, welche bisher nicht ohne weiteres repräsentierbar waren; dies sind Sätze mit sogenannten *Anzahlquantoren*.

Unser Existenzquantor drückt ja aus, dass es *mindestens einen* Gegenstand (im jeweiligen Gegenstandsbereich) gibt, der eine bestimmte Eigenschaft hat. Wenn wir aber ausdrücken wollen, dass es *höchstens* oder *genau* einen solchen Gegenstand gibt, der eine bestimmte Eigenschaft hat, so kommen wir mit dem Existenzquantor alleine nicht aus, wir benötigen dazu auch das Identitätszeichen. Betrachten wir dazu die folgenden Beispielsätze:

- Es gibt mindestens einen Papst.
- Es gibt höchstens einen Papst.
- Es gibt genau einen Papst.

Der erste dieser Sätze wird – wie bereits bekannt – wie folgt repräsentiert:

- $\exists x P(x)$

Um die beiden letzten Sätze repräsentieren zu können, müssen wir wissen, wie wir die beiden Phrasen 'es gibt höchstens einen' und 'es gibt genau einen' in der prädikatenlogischen Sprache repräsentieren sollen. Dazu legen wir Folgendes fest:

- $\exists \mathrm{h}1 v_1 A :\leftrightarrow \exists v_2 \forall v_3 (A[v_3/v_1] \rightarrow v_2 = v_3)$
- $\exists ! v A :\leftrightarrow \exists v A \wedge \exists \mathrm{h}1 v A$

Die erste Formel besagt, dass es ein Objekt gibt, sodass alles, was die Eigenschaft A hat, identisch mit diesem ist ist. Das heisst aber, dass es entweder gar kein Objekt gibt, das die Eigenschaft A hat (dann ist der Wenn-Dann-Teil trivialerweise wahr), oder dass es genau ein Objekt gibt, das diese Eigenschaft hat. Kurz: Es gibt *höchstens* ein A-Objekt. In der zweiten Formel wird dem dann noch hinzugefügt, dass es auch wirklich ein A-Objekt gibt. Das ergibt zusammengenommen die *eindeutige Existenz* eines A-Objektes: *es gibt genau ein* Objekt, welches die Eigenschaft A hat.

Nun können wir die beiden letzten Sätze von oben wie folgt repräsentieren:

- $\exists \mathrm{h}1 P(x)$
- $\exists ! x P(x)$

Und dies sind dann nur Abkürzungen für:

- $\exists y \forall z (P(z) \rightarrow y = z)$
- $\exists x P(x) \wedge \exists y \forall z (P(z) \rightarrow y = z)$

Es gibt jedoch auch Sätze, die von der Existenz von mehr als nur von einem Gegenstand sprechen:

- Es gibt mindestens zwei Erzbischöfe in Österreich.
- Es gibt höchstens zwei Bischöfe in Salzburg.
- Es gibt genau zwei ordentliche Professoren am Fachbereich Philosophie Salzburg.

Wir wollen dazu die folgenden Abkürzungsregeln einführen:

- $\exists 2 v_1 A :\leftrightarrow \exists v_2 \exists v_3 (v_2 \neq v_3 \wedge A[v_2/v_1] \wedge A[v_3/v_1])$
- $\exists \mathrm{h}2 v_1 A :\leftrightarrow \exists v_2 \exists v_3 \forall v_4 (A[v_4/v_1] \rightarrow v_2 = v_4 \vee v_3 = v_4)$

- $\exists!2vA :\leftrightarrow \exists 2vA \wedge \exists\text{h}2vA$

(Wir schreiben dabei kurz $t_1 \neq t_2$ für die Formel $\neg\ t_1 = t_2$.)

Dies ermöglicht uns, die obigen Sätze wie folgt zu repräsentieren:

- $\exists 2xE(x, o)$
- $\exists\text{h}2xB(x, s)$
- $\exists!2O(x, f)$

Wenn wir von jeweils drei Gegenständen sprechen wollen – mindestens drei, höchstens drei, und genau drei – so verwenden wir die folgenden Abkürzungen:

- $\exists 3v_1A :\leftrightarrow \exists v_2\exists v_3\exists v_4(v_2 \neq v_3 \wedge v_2 \neq v_4 \wedge v_3 \neq v_4 \wedge A[v_2/v_1] \wedge A[v_3/v_1] \wedge A[v_4/v_1])$
- $\exists\text{h}3v_1A :\leftrightarrow \exists v_2\exists v_3\exists v_4\forall v_5(A[v_5/v_1] \to v_2 = v_5 \vee v_3 = v_5 \vee v_4 = v_5)$
- $\exists!3vA :\leftrightarrow \exists 3vA \wedge \exists\text{h}3vA$

Allgemein: Entsprechende Abkürzungen lauten für ein beliebiges n so:

- $\exists nv_1A :\leftrightarrow \exists v_2\exists v_3 \ldots \exists v_{n+1}(v_2 \neq v_3 \wedge v_2 \neq v_4 \wedge \ldots \wedge v_2 \neq v_{n+1} \wedge \ldots \wedge v_n \neq v_{n+1} \wedge A[v_2/v_1] \wedge A[v_3/v_1] \wedge \ldots \wedge A[v_{n+1}/v_1])$
- $\exists\text{h}nv_1A :\leftrightarrow \exists v_2\exists v_3 \ldots \exists v_{n+1}\forall v_{n+2}(A[v_{n+2}/v_1] \to v_2 = v_{n+2} \vee v_3 = v_{n+2} \vee \cdots \vee v_{n+1} = v_{n+2})$
- $\exists!nvA :\leftrightarrow \exists nvA \wedge \exists\text{h}nvA$

Es lässt sich auch unschwer erkennen, dass manche logische Wahrheiten, die Existenzquantoren und das Identitätsprädikat enthalten, implizit arithmetische Wahrheiten ausdrücken: Z.B. lässt sich

- $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge (\exists!2xP(x) \wedge \exists!2xQ(x)) \to \exists!4x(P(x) \vee Q(x))$

auf Basis unserer erweiterten Semantik für die Prädikatenlogik mit Identität als logische Wahrheit nachweisen: Die Formel ist wahr in jeder Interpretation und bei jeder Variablenbelegung. Dabei besagt die Formel aber nichts anderes als: Wenn sich die Menge der P-Dinge und die Menge der Q-Dinge nicht überlappen, und genau zwei P-Dinge und genau zwei Q-Dinge existieren, dann enthält die Menge der Dinge, die P oder Q sind, genau vier Elemente. Oder anders ausgedrückt: $2 + 2 = 4$.

Kein Wunder, dass Philosophen wie Frege nachzuweisen trachteten, dass sich alle arithmetischen Wahrheiten auf logische Wahrheiten zurückführen ließen! (Dennoch betrachtet man dieses Programm des sogenannten *Logizismus* heute als gescheitert: Weshalb das so ist, wird in Einführungsbüchern zur Philosophie der Mathematik wie z.B. [10] behandelt.) Man sollte dabei allerdings beachten, dass der obige logisch wahre Satz mit Anzahlquantoren einerseits und der arithmetische Satz $2 + 2 = 4$ andererseits *syntaktisch* ganz unterschiedlich gebaut sind – wie man mathematische Sätze so prädikatenlogisch repräsentieren kann, dass deren Syntax dabei erhalten bleibt, behandeln wir gleich in der nächsten Sektion.

Abgesehen von Sätzen mit Anzahlquantoren, erfahren auch Sätze wie

- Peter existiert.
- Alles existiert.

nun bequeme Repräsentierungen mittels des Identitätszeichens:

- $\exists x\, x = p$
- $\forall x \exists y\, y = x$

Beide dieser Formeln sind logische Wahrheiten, was semantisch gesehen daran liegt, dass sowohl Individuenkonstanten als auch Individuenvariablen in der Semantik der Prädikatenlogik immer etwas bezeichnen. Selbstverständlich lassen sich auch beide dieser Formeln mit Hilfe von (REF) und (SUB) ohne Prämissen herleiten, d.h. diese Formeln sind beweisbar in der Prädikatenlogik mit Identität. Zum Beispiel im ersten Falle (in dem p eine Individuenkonstante in der vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache ist):

- $\vdash \exists x\, x = p$

  1. $\forall x\, x = x$ (REF)
  2. $p = p$ 1. (UB)
  3. $\exists x\, x = p$ 2. (EE)

In der Anwendung von (EE) in Zeile 3 ist t die Individuenkonstante p, v die Variable x und A die Formel $x = p$: $A[t/v]$ ist dann entsprechend die Formel $p = p$, die in Zeile 2. hergeleitet wurde.

Wir sehen also, dass die Einführung eines logischen Identitätszeichen auch für die Repräesentierung natursprachlicher Sätze und Argumente höchst nützlich ist.

13.2 Andere sprachliche Erweiterungen von prädikatenlogischen Sprachen

Es gibt noch weitere Möglichkeiten, den Zeichenreichtum der prädikatenlogischen Sprachen zu erweitern, ohne dabei deren extensionalen Charakter zu verändern. Insbesondere erlauben manche Autoren, dass singuläre Terme *komplex* gebaut sind. In der Mathematik ist zum Beispiel die Rede von:

- Summe von 2 und 4
- Produkt von 2 und 4

Um die Struktur solcher singulären Terme in der prädikatenlogischen Sprache adäquat repräsentieren zu können, ist es möglich, sogenannte *Funktionsterme* einzuführen, etwa

- $s(2,4)$
- $p(2,4)$

bzw., leicht reformuliert:

- $2+4$
- $2 \cdot 4$

Um solche singulären Terme einführen zu können, muss im wesentlichen nur die Definition von 'singulärer Term' in den prädikatenlogischen Sprachen etwas liberalisiert werden. Die Semantik wird dann ein klein weniger komplexer, und bei Substitutionen in Herleitungen lassen sich nun auch Funktionsterme für Variablen einsetzen. Ansonsten verändert sich aber nicht viel. Unter Verwendung unseres neues Identitätsprädikats, und gegeben die übliche Interpretation der Zahlzeichen, kämen dann beispielsweise die folgenden Formeln als wahr heraus:

- $2+4=6$
- $8=2 \cdot 4$

Genauso gibt es eine weitere Gattung singulärer Terme, die von Bertrand Russell berühmt gemacht wurden[1] – die sogenannten *Kennzeichnungen* bzw. im Englischen: *definite descriptions*. Dabei werden Gegenstände benannt, indem dieselben *beschrieben* werden. Beispiele für solche Kennzeichnungen wären etwa:

[1]Siehe [9].

- der gegenwärtige König von Frankreich
- der Papst
- der Kölner Dom
- der Bundespräsident von Österreich
- die Zahl, die kleiner als sechs und größer als vier ist
- die Zahl, die kleiner als sechs und größer als drei ist
- der Autor der *Principia Mathematica*
- die Sonne unseres Sonnensystems
- der deutsche Bundestagsabgeordnete

Obwohl man kommunikativ intendiert, dass eine Kennzeichnung *genau ein* Objekt bezeichnet, sehen wir an einigen dieser Beispiele, dass dies auch "schiefgehen" kann – dass Kennzeichnungen, im Gegensatz zu unsere Annahme für singuläre Terme in der Prädikatenlogik, nicht unbedingt *genau einen* Gegenstand bezeichnen müssen. Es kann nämlich auch der Fall sein, dass *kein Gegenstand* oder aber *mehrere Gegenstände* die sogenannte *Basis* der Kennzeichnung erfüllen, also den sprachlichen Ausdruck, der auf den definiten Artikel folgt. Es ist klar, dass dies die syntaktische und semantische Behandlung von Kennzeichnungen nicht ganz einfach macht. Wie Russell freilich gezeigt hat, lässt sich eine befriedigende Repräsentierung von solchen Kennzeichnungen rein mit Hilfe der aussagenlogischen Junktoren, der beiden Quantoren und des Identitätszeichens gewährleisten. Aussagesätze mit Kennzeichnungen lassen sich also schon *innerhalb der Prädikatenlogik mit Identität* formalisieren, semantisch interpretieren und in Herleitungen verwenden. Dieses Thema, welches letztlich tief in die Sprachphilosophie führt (siehe z.B. [13]), geht allerdings über die Ziele und Zwecke dieses Buches hinaus.