Teil I

Aussagenlogik

Kapitel 2

Aussagenlogische Analyse

Nachdem wir uns ein wenig Klarheit verschafft haben über die Natur sprachlicher Ausdrücke und unsere Weisen des Umgangs mit sprachlichen Ausdrücken (Verwenden und Erwähnen), und nachdem wir die für uns zentralen sprachlichen Ausdrücke kennengelernt haben – nämlich die Aussagesätze – wollen wir uns nun unserer ersten echten logischen Aufgabe widmen: Der logischen Analyse von Aussagesätzen. Unser Ziel wird es dabei letztlich sein, die logische Form von Aussagesätzen zu ermitteln und in einer Symbolsprache wiederzugeben. Der erste Schritt auf unserem Weg dahin wird darin bestehen, uns Gedanken zur Struktur von Aussagesätzen zu machen, die elementaren logischen Bestandteile von Aussagesätzen kennenzulernen und schlussendlich zu verstehen, wie die Wahrheit bzw. Falschheit von zusammengesetzten Aussagesätzen von der Wahrheit bzw. Falschheit ihrer Aussagesatzteile abhängt. Genau dies wird auch das Thema dieses Kapitels sein.

2.1 Einfache Aussagesätze

Wie wir bereits mehrmals betont haben, wollen wir die logische Form von Aussagesätzen bestimmen, und dazu müssen wir untersuchen, wie Aussagesätze logisch zerlegt bzw. analysiert werden können. Dies heißt, wir müssen die logisch relevanten Bestandteile von Aussagesätzen identifizieren und dann betrachten, wie diese miteinander verknüpft sind.

Hier lässt sich folgende grundlegende Unterscheidung treffen: Es gibt Aussagesätze, deren Teile sämtlich *keine* Aussagesätze sind, und es gibt Aussagesätze, die sehr wohl andere Aussagesätze als echte Bestandteile enthalten. Erstere nennen wir ‘einfach’, letztere ‘komplex’. Beispielsweise ist der Aussagesatz

- Herbert liebt Heidi, und Heidi liebt Josef.

komplex, da er zwei Aussagesätze als echte Bestandteile enthält, die durch 'und' verknüpft sind. Diese beiden Bestandteile selbst sind hingegen einfach.

Wir wollen uns zuerst den einfachen Aussagesätzen zuwenden, die sozusagen so etwas wie die "logischen Atome" der Sprache darstellen. Die "einfachsten" der einfachen Aussagesätze sind dabei die, in denen einem Gegenstand eine Eigenschaft zugesprochen wird. Ein Beispiel für einen solchen Satz ist:

- Der Papst ist fromm.

Dabei ist der Ausdruck 'der Papst' ein Name einer Person, wobei wir unter Namen nicht nur Eigennamen verstehen, sondern alle Ausdrücke, die die sprachliche Funktion haben, auf genau einen Gegenstand Bezug zu nehmen. Der Ausdruck 'fromm' ist ein Adjektiv, welches die Eigenschaft ausdrückt, fromm zu sein. Das Wörtchen 'ist' ist eine sogenannte Kopula, welche wir im Deutschen benötigen, um Namen mit Eigenschaftswörtern zu verbinden. Eigenschaften müssen Gegenständen im Deutschen jedoch keineswegs durch Adjektive zugeschrieben werden, wie die folgenden Beispiele zeigen:

- Der Papst ist ein Deutscher.
- Der Papst betet.

Hier werden die Eigenschaften, ein Deutscher zu sein bzw. zu beten, mit Hilfe einer Nominalphrase bzw. eines Verbs ausgedrückt. Die grammatikalischen Unterschiede zwischen Adjektiven, Nominalphrasen und Verben sind logisch jedoch irrelevant. In einem ersten Schritt der logischen Analyse werden wir sie daher nicht berücksichtigen:

- Fromm(der Papst)
- Deutscher(der Papst)
- Betet(der Papst)

Diese Ausdrücke sind nichts anderes als die Übersetzungen der obigen drei natursprachlichen Sätze ins "Logiker-Deutsch". Wir nennen die ganz links stehenden Ausdrücke von nun an '*Prädikate*' bzw. '*generelle Terme*' und die darauf folgenden Ausdrücke in Klammern '*Namen*' bzw. '*singuläre Terme*'. Generelle Terme sind insofern *generell*, als sie auf viele verschiedene Gegenstände zutreffen können. Singuläre Terme sind *singulär* in dem Sinne, als sie genau ein Objekt bezeichnen "wollen".

Die oben angeführten Prädikate sind alle *ein*stellig, d.h., dass mit diesen Prädikaten immer genau ein singulärer Term einhergeht, bzw., dass sie auf genau einen singulären Term angewandt werden. Ein Prädikat kann jedoch im Prinzip beliebig viele Stellen haben, auch wenn in den natürlichen Sprachen Prädikate mit sehr vielen Stellen kaum bzw. gar nicht vorkommen. Ein Aussagesatz, in dem ein zweistelliges Prädikat vorkommt, ist etwa:

- Herbert ist jünger als Heidi.

Ein wenig reglementiert sieht dies im Logiker-Deutsch so aus:

- Jünger(Herbert, Heidi)

Auf ein zweistelliges Prädikat folgen also zwei Namen. Im Allgemeinen sagt man, dass auf ein n-stelliges Prädikat n Namen folgen, wobei n irgendeine natürliche Zahl ist, d.h. $n = 1, 2, 3, \ldots$ Solche Prädikate, die mehr als eine Stelle aufweisen, drücken keine Eigenschaften, sondern vielmehr Relationen bzw. Beziehungen zwischen Gegenständen aus, in unserem Beispiel etwa die Beziehung des Jüngerseins.

Betrachten wir noch einige Beispiele für mehrstellige Prädikate. Der deutsche Satz

- Linz liegt zwischen Wien und Salzburg.

sieht reglementiert wie folgt aus:

- Dazwischenliegen(Linz, Wien, Salzburg)

Hier findet das dreistelliges Prädikat 'Dazwischenliegen' Verwendung. Auch vierstellige Prädikate trifft man in der deutschen Sprache an:

- Herbert fährt mit Heidi von Salzburg nach Wien.

Dies sieht in Logiker-Deutsch so aus:

- Fahren-mit-von-nach(Herbert, Heidi, Salzburg, Wien).

'Fahren-mit-von-nach' ist also ein vierstelliges Prädikat. Etwas natürlicher ausgedrückt könnte man auch sagen, dass

- ____ fährt mit ____ von ____ nach ____

das vierstellige Prädikat ist, welches in dem deutschen Satz vorkommt. Wir können einfache Aussagesätze also auch so betrachten, dass darin die singulären Terme die "Leerstellen" der Prädikate auffüllen und dass dabei die Reihenfolge der eingesetzten singulären Terme wichtig ist. Denn der Satz

- Herbert fährt mit Heidi von Wien nach Salzburg.

hat natürlich eine völlig andere Bedeutung als unser ursprünglicher Satz. Und der Satz

- Herbert fährt mit Wien von Heidi nach Salzburg.

ist vielleicht sogar sinnlos, bestenfalls aber falsch.

Wir haben oben einfache Aussagesätze dadurch charakterisiert, dass sie keine weiteren Aussagesätze als echte Teile enthalten. Wie wir aber an den Beispielen sehen können, lassen sie sich auch anhand ihrer logischen Form charakterisieren:

> *Einfache Aussagesätze* sind Aussagesätze, deren logische Form eine Folge von $n+1$ Ausdrücken ist, deren erstes Glied ein n-stelliges Prädikat P^n ist, und deren zweites bis $n+1$-tes Glied n singuläre Terme $t_1, \ldots, t_n$ sind; einfache Aussagesätze lassen sich also in folgende Form bringen:
>
> $$P^n(t_1, \ldots, t_n)$$

Einfache Aussagesätze bzw. deren Formen werden in der Literatur auch 'atomar', 'elementar' oder 'primitiv' genannt. Alle Aussagesätze, die nicht einfach sind, werden wir '*komplex*' nennen:

> *Komplexe Aussagesätze* sind Aussagesätze, die nicht einfach sind.

Komplexe Aussagesätze sind demnach so etwas wie die "logischen Moleküle" der Sprache. Wenn wir uns der logischen Analyse komplexer Aussagesätze widmen, müssen wir zunächst eine Entscheidung treffen, was denn überhaupt die logisch relevanten Bestandteile von zusammengesetzten Aussagesätzen sind. Gemäß dieser Entscheidung werden wir entweder Aussagenlogik oder Prädikatenlogik oder (wenn auch nicht in diesem Buch) irgendeine andere Logik betreiben. Im nächsten Abschnitt werden wir uns zunächst mit denjenigen komplexen Aussagesätzen auseinandersetzen, die sich *aussagenlogisch* zerlegen lassen. Die zweite Hälfte dieses Buches wird dann damit beginnen, dass wir uns den Details der sogenannten prädikatenlogischen Analyse von Aussagesätzen widmen werden. Was genau mit der Unterscheidung zwischen 'aussagenlogisch' und 'prädikatenlogisch' gemeint ist, wird jedoch bereits im Laufe der nächsten Sektionen klar werden.

2.2 Komplexe aussagenlogisch zerlegbare Sätze

Wir wollen uns nun also den komplexen Aussagesätzen zuwenden. Wir werden verschiedene Arten und Weisen kennenlernen, wie man einfache Aussagesätze zu komplexen Aussagesätzen zusammensetzen kann, wobei nur manche dieser Zusammensetzungen aussagenlogisch analysiert werden können.

2.2.1 Negationssätze

Eine erste einfache Möglichkeit, komplexe Sätze zu bilden, bieten uns die Ausdrücke 'nicht', 'kein' und ähnliche. Wir können beispielsweise den einfachen Aussagesatz

- Johannes ist Vorarlberger.

auf die folgenden Weisen negieren:

- Johannes ist kein Vorarlberger.
- Johannes ist nicht ein Vorarlberger.
- Es ist nicht der Fall, dass Johannes ein Vorarlberger ist.

Dies sind alles natursprachliche Verneinungen bzw. Negationen des obigen einfachen Aussagesatzes. In der ersten Version steckt die Negation im Wörtchen 'kein', in der zweiten Version (die bestimmt nicht in einem stilistisch einwandfreien Deutsch formuliert ist) wird sie schon deutlicher durch die Verwendung des Wörtchens 'nicht', und in der dritten Version ist die Negation dadurch besonders hervorgehoben, dass wir die negierende Phrase 'es ist nicht der Fall, dass' an den Beginn des Satzes gestellt haben. Da alle diese Versionen dieselbe Bedeutung haben, können wir die Verneinung des einfachen Aussagesatzes im Logiker-Deutsch wie folgt standardisieren:

- Nicht Vorarlberger(Johannes)

Wir setzen also die negierende Phrase 'nicht' immer vor den zu negierenden Satz: Es ist der gesamte Satz 'Vorarlberger(Johannes)', welcher verneint wird. (Eine alternative Analyse bestünde darin, sich den generellen Term 'Vorarlberger' verneint zu denken – die Analyse als Satznegation stellt sich jedoch in vielen Fällen als die weniger komplizierte heraus.)

Während es im Deutschen mehrere Ausdrücke gibt, welche die *Negation* ausdrücken, wollen wir uns in der logischen Sprache auf *genau ein* Zeichen beschränken, und zwar das Symbol $\neg$. Solche aussagenlogische Zeichen, mit Hilfe derer wir aus Sätzen neue Sätze bilden können, nennen wir '*Junktoren*'.

Im folgenden sollen 'A' und 'B' für beliebige Aussagesätze stehen. Wenn A also ein Aussagesatz ist, dann ist

$$\neg A$$

seine Negation. Alle Sätze dieser Form nennen wir '*Negationssätze*'. Wir können den obigen Negationssatz daher auch so anschreiben:

- ¬Vorarlberger(Johannes)

Dabei ist die Negation von A wahr, wenn A falsch ist, und sie ist falsch, wenn A wahr ist. Solche Zusammenhänge lassen sich in sogenannten *Wahrheitstafeln* darstellen:

Wahrheitstafel 1 (Negation)

A	$\neg A$
w	f
f	w

Wie wir sehen, verwenden wir die Zeichen 'w' und 'f' als Abkürzungen für 'wahr' und 'falsch'. Man sagt auch, w und f seien die *Wahrheitswerte* der Wahrheit und Falschheit. Mit dieser Wahrheitstafel ist die Bedeutung des Negationszeichens vollständig erfasst, da wir uns – wie bereits in Kapitel 1 erwähnt – hier nur für die Wahrheit und Falschheit von Aussagesätzen interessieren, zumal gerade diese Eigenschaften von Sätzen für die Wissenschaft von zentraler Bedeutung sind.

Wir können das Negationszeichen nicht nur auf einfache Sätze anwenden, sondern auch auf komplexe. Wenden wir es z.B. auf den obigen Negationssatz an, so erhalten wir:

- ¬¬Vorarlberger(Johannes)

Dieser Satz besagt mehr oder weniger dasselbe wie der ursprüngliche einfache Satz, auch wenn er keineswegs *derselbe* Satz ist, da wir Sätze ja als Satztypen auffassen und nicht als Propositionen. 'Vorarlberger(Johannes)' und '¬¬Vorarlberger(Johannes)' drücken zwar vielleicht dieselbe Proposition aus, aber sie unterscheiden sich als Satztypen, da letzterer Negationszeichen enthält, ersterer aber nicht, letzterer aus 24 Zeichen besteht, ersterer aber aus 22, etc.

2.2.2 Konjunktionssätze

Die Negation bietet uns die Möglichkeit, aus *einem* bereits gegebenen Satz einen weiteren jedenfalls komplexen Satz, eben die Negation des ersteren, zu bilden. Die meisten logischen Verknüpfungen jedoch werden auf *zwei* Sätze angewandt, um dadurch einen neuen Satz zu erzeugen. Die erste Verknüpfung dieser Art, die wir nun kennenlernen, ist die Konjunktion.

Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

- Herbert und Hans sind Oberösterreicher.

Dieser Satz ist eine “deutsche Kurzform” für den gleichbedeutenden Satz:

- Herbert ist Oberösterreicher und Hans ist Oberösterreicher.

Dieser sogenannte Konjunktionssatz besteht aus zwei (einfachen) Teilsätzen. Im Logiker-Deutsch könnten wir ihn auch so schreiben:

- Oberösterreicher(Herbert) und Oberösterreicher(Hans)

Wir wollen nun auch einen Junktor zur Bildung von Konjunktionssätzen einführen, und zwar das Symbol $\wedge$. Wenn also A und B Aussagesätze sind, dann ist

$$(A \wedge B)$$

die Konjunktion dieser beiden Sätze. Die runden Klammern verwenden wir deshalb, da wir so Mehrdeutigkeiten vermeiden können, wie wir später noch sehen werden. Wir nennen alle Sätze dieser Form ‘*Konjunktionssätze*’. Wir können den obigen Konjunktionssatz daher auch so anschreiben:

- (Oberösterreicher(Herbert) $\wedge$ Oberösterreicher(Hans))

Auch hier ist es wieder wichtig festzuhalten, wie die Wahrheitswerte der Teilsätze mit dem Wahrheitswert des gesamten Konjunktionssatzes in Verbindung stehen. Die Konjunktion ist nämlich genau dann wahr, wenn *beide* ihrer Teilsätze wahr sind, denn mit einem Konjunktionssatz will man ja behaupten, dass der eine Teilsatz wahr ist *und* der andere Teilsatz wahr ist. Ist also nur einer der beiden Teilsätze falsch, so ist die gesamte Konjunktion falsch. Dies können wir wieder in einer Wahrheitstafel veranschaulichen.

Wahrheitstafel 2 (Konjunktion)

A	B	$(A \wedge B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Auch hier müssen A und B nicht unbedingt einfache Aussagesätze sein, sondern können selbst bereits zusammengesetzt sein. Z.B. ist auch der Satz

- $\neg$Vorarlberger(Johannes) $\wedge$ (Oberösterreicher(Herbert) $\wedge$ Oberösterreicher(Hans)) ein Konjunktionssatz, dessen erstes *Konjunkt* der Negationssatz

- $\neg$Vorarlberger(Johannes)

ist, und dessen zweites Konjunkt der Konjunktionssatz

- (Oberösterreicher(Herbert) $\wedge$ Oberösterreicher(Hans))

ist.

Man könnte vielleicht argumentieren, dass das natursprachliche 'und' nicht angemessen durch obiges $\wedge$ repräsentiert wäre, da Und-Sätze machmal auch zeitliche Konnotationen mit sich tragen können. Z.B. scheint man durch die Äußerung von 'Sie haben geheiratet und haben ein Kind bekommen' etwas anderes auszudrücken als durch die Äußerung von 'Sie haben ein Kind bekommen und haben geheiratet'. Der britische Philosoph H. Paul Grice[1] argumentierte gegen diese Kritik an der obigen Wahrheitstafel, indem er darauf hinwies, dass wir zwar durch die Äußerung der beiden Sätze Unterschiedliches vermitteln ("implicate") können, dies jedoch nicht heißt, dass die beiden Aussagesätze selbst Unterschiedliches bedeuten und nicht der obigen Wahrheitstafel genügen würden. Dies könne man daran ersehen, dass es logisch konsistent wäre zu sagen: 'Sie haben ein Kind bekommen und haben geheiratet, *jedoch nicht in dieser Reihenfolge*.' Wäre die zeitliche Abfolge ein Teil der wörtlichen Bedeutung von 'und' – wäre sie sozusagen semantisch in die logische Verknüpfung 'und' "eingebaut" – müsste so eine Äußerung ein Widerspruch sein, was aber nicht der Fall sei. Grice zieht daraus den Schluss, dass man die *Semantik*, d.h., die Wahrheitsbedingungen von Aussagesätzen, von der *Pragmatik*, d.h. der kommunikativen Rolle von Äußerungen von Aussagesätzen unterscheiden müsse. Die obige Wahrheitstafel für das 'und' gehöre in die Semantik und sei für diese voll und ganz adäquat. Zur Pragmatik des 'und' müssten dann noch Regeln guter Kommunikation hinzukommen, die überdies sensitiv gegenüber dem Äußerungskontext zu sein hätten. (Wir werden auf die Unterscheidung von Semantik und Pragmatik noch zurückkommen.)

2.2.3 Disjunktionssätze

Die nächste Art und Weise, zwei Sätze zu einem neuen Satz zu verknüpfen, besteht darin, ein 'oder' zwischen die beiden Sätze zu schreiben. Ein Beispiel für einen solchen Satz ist:

- Der Papst kommt nächsten Sommer nach Wien oder nach Salzburg.

[1]Siehe [5].

Im Logiker-Deutsch liest sich dies wie folgt:

- Kommt-nach-im(der Papst, Wien, nächster Sommer) oder
  Kommt-nach-im(der Papst, Salzburg, nächster Sommer)

Wir führen dafür den Junktor $\vee$ in die logische Sprache ein, um aus zwei Aussagesätzen A und B deren sogenannte Disjunktion

$$(A \vee B)$$

bilden zu können. Demgemäß können wir obigen Satz auch wie folgt formulieren:

- (Kommt-nach-im(der Papst, Wien, nächster Sommer) $\vee$
  Kommt-nach-im(der Papst, Salzburg, nächster Sommer))

'nächster Sommer' ist dabei ebenso wie 'der Papst', 'Wien' und 'Salzburg' ein singulärer Term – dieser Term bezieht sich freilich nicht auf eine Person oder eine Stadt, sondern vielmehr auf eine Zeitspanne, eben den nächsten Sommer.

Wir gehen davon aus, dass unser Beispielsatz wahr ist, (i) wenn der Papst nächsten Sommer nach Wien kommt, nicht aber nach Salzburg, (ii) wenn er nächsten Sommer nach Salzburg kommt, nicht aber nach Wien, aber auch (iii) wenn er nächsten Sommer sowohl nach Wien als auch nach Salzburg kommt. Wenn wir diesen Satz also so verstehen, dann haben wir es hier mit der *einschließenden* Disjunktion zu tun, zu welcher die folgende Wahrheitstafel gehört:

Wahrheitstafel 3 (Disjunktion)

A	B	$(A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Analog zu den Konjunktionssätzen lassen sich Disjunktionssätze sowohl aus einfachen als auch aus komplexen Sätzen zusammensetzen.

Wenn wir den vorigen Beispielsatz jedoch so verstehen, dass der Papst im nächsten Sommer entweder nach Wien kommt oder nach Salzburg, aber keinesfalls beide Städte besucht, dann haben wir es mit der *ausschließenden* Disjunktion zu tun. Beispiele, die wir im Sinne einer ausschließenden Disjunktion verstehen könnten, wären:

- Bei diesem chinesischen Menü gibt es Suppe oder Frühlingsrolle als Vorspeise.
- Alex ist männlich oder weiblich.

Diese ausschließende Disjunktion hat natürlich eine andere Wahrheitstafel, nämlich:

Wahrheitstafel 4 (ausschließende Disjunktion)

A	B	$(A \curlyvee B)$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

In der Logik spielt jedoch die einschließende Disjunktion die bei weitem größere Rolle. (In der Mengentheorie, also einem Teil der Mathematik, verhält es sich ganz ähnlich: Dort wird auch die Vereinigung zweier Mengen als grundlegender angesehen als das Bilden der sogenannten "symmetrischen Differenz" zweier Mengen. Vereinigung entspricht dem einschließenden 'oder', symmetrische Differenz dem ausschließenden 'oder'.)

Zudem lässt sich die ausschließende Disjunktion mit Hilfe der einschließenden Disjunktion (und der Negation und Konjunktion) definieren:

$(A \curlyvee B)$ genau dann, wenn $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$.

Später werden wir sehen, dass die Wahrheitstafeln von $(A \curlyvee B)$ und $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$ übereinstimmen. Wir werden das Zeichen $\curlyvee$ für die ausschließende Disjunktion also wieder vergessen und in Zukunft nur mehr die einschließende Disjunktion verwenden. Wenn wir im Folgenden von *Disjunktionssätzen* spechen, so meinen wir immer Sätze, deren logische Form mittels der *einschließenden* oder-Verknüpfung gebildet wird. Auch in obigem 'Bei diesem chinesischen Menü gibt es Suppe oder Frühlingsrolle als Vorspeise' lässt sich übrigens das 'oder' durchaus als einschließend verstehen, man muss sich nur als stillschweigende Zusatzinformation "hinzudenken": ... und natürlich beinhaltet jedes Menü nur eine Speise pro Gang.

2.2.4 Implikationssätze

Zu den wichtigsten Typen von komplexen Aussagesätzen gehören diejenigen, die mit Wenn-dann-Phrasen gebildet werden. Diese Sätze nennt man *Implikationssätze*. Ein Beispiel für einen Implikationssatz ist:

- Wenn Mozart Salzburger ist, dann ist er Österreicher.

Im Logiker-Deutsch sieht dieser Satz wie folgt aus:

- Wenn Salzburger(Mozart), dann Österreicher(Mozart)

Der Junktor $\rightarrow$, den wir als Zeichen für die Implikation in die logische Sprache einführen, steht für das gesamte 'Wenn-dann', d.h., dass wir die in der deutschen Sprache getrennte Phrase zu einem einzigen Symbol "zusammenfassen", welches wir zwischen die Teile des Implikationssatzes setzen. Unser Beispiel lässt sich also mit dem neuen Junktor so formulieren:

- Salzburger(Mozart) $\rightarrow$ Österreicher(Mozart)

Dabei nennt man den Aussagesatz, der vor dem Junktor steht, das '*Antezedens*' des Implikationssatzes, und den Aussagesatz, der nach dem Junktor steht, das '*Konsequens*' des Implikationssatzes.

Während die Angabe der Wahrheitstafeln für die Negation, Konjunktion und Disjunktion relativ unproblematisch war, stellt uns die Angabe der Wahrheitstafel für die Implikation vor größere Schwierigkeiten. Unsere Aufgabe ist es, folgende Wahrheitstafel mit Wahrheitswerten aufzufüllen:

Wahrheitstafel 5

A	B	$(A \rightarrow B)$
w	w	?
w	f	?
f	w	?
f	f	?

Nun wollen wir die Fragezeichen Schritt für Schritt ersetzen – wir werden noch sehen, wohin genau uns das führen wird.

Intuitiv betrachten wir unseren vorigen Beispielsatz zu Mozart doch als wahr. Darüberhinaus wissen wir, dass sowohl das Antezedens als auch das Konsequens dieses Satzes wahr ist, dass also Mozart sowohl Salzburger als auch Österreicher ist. Wir haben also ein Beispiel gefunden, in dem $(A \rightarrow B)$ wahr ist, und auch A und B wahr sind: Wir können daher das erste Fragezeichen in unserer Tafel von oben sicher nicht durch ein 'f' ersetzen, denn sonst müßten wir $(A \rightarrow B)$ auch in unserem Beispiel als falsch bewerten, was kontraintuitiv wäre. Da wir aber dann nur mehr ein 'w' für das erste Fragezeichen einsetzen können, erhalten wir:

Wahrheitstafel 6

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	?
f	w	?
f	f	?

Betrachten wir nun den folgenden Satz:

- Wenn 6 durch 3 teilbar ist, dann ist 6 nicht durch 3 teilbar.

Diesen Satz kann man halbformal so aufschreiben:

- Teilbar-durch$(6, 3) \to \neg$Teilbar-durch$(6, 3)$

Intuitiv ist dieser Satz falsch. Sein Antezedens ist zwar wahr, aber sein Konsequens ist falsch. Wir können daher das zweite Fragezeichen in der Tafel oben nicht durch ein 'w' ersetzen, weil der von uns betrachtete Implikationssatz sonst als wahr bewertet werden müßte, was in unserem Beispiel kontraintuitiv wäre. Es bleibt uns also nur die folgende Erweiterung unserer Tafel:

Wahrheitstafel 7

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	?
f	f	?

Nun zu den zwei verbleibenden Fragezeichen in der letzten Wahrheitstafel: Hier verlassen uns unsere Intuitionen etwas, da wir es nicht gewöhnt sind, Wenn-dann-Sätze zu bewerten, deren Antezedens falsch ist. Wir wollen daher von vornherein keine der verbleibenden vier Möglichkeiten ausschließen:

(1)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w?
f	f	w?

(2)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w?
f	f	f?

(3)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	$f?$
f	f	$w?$

(4)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	$f?$
f	f	$f?$

Lassen wir Möglichkeit (1) vorerst beiseite, und wenden wir uns gleich Möglichkeit (2) zu: Wie wir sehen können, ist gemäß Tafel (2) der Wahrheitswert von $(A \to B)$ immer identisch mit dem Wahrheitswert von B. Was Wahrheit und Falschheit betrifft, könnten wir unter Verwendung der Tafel (2) also immer statt $(A \to B)$ einfach B verwenden. Aber das entspricht keineswegs unserem sprachlichen Verständnis des 'wenn-dann'. Ein Implikationssatz hat nicht notwendigerweise dieselbe Bedeutung noch denselben Wahrheitswertverlauf wie sein Konsequens. Also müssen wir Tafel (2) verwerfen.

Die Tafel (3) werden wir im nächsten Unterabschnitt kennenlernen, sie passt nämlich genau zu den sogenannten Äquivalenzsätzen, wie z.B.

- Hans ist der Bruder von Herbert genau dann, wenn Herbert der Bruder von Hans ist.

die als wahr gelten werden, wenn der linke Teil der Äquivalenz denselben Wahrheitswert aufweist wie der rechte Teil der Äquivalenz. Für die Implikationssätze ist diese Wahrheitstafel dann aber natürlich nicht geeignet, denn Äquivalenzsätze drücken Implikationen "in beide Richtungen" aus: Ein Äquivalenzsatz hat nämlich dieselbe Bedeutung wie $((A \to B) \wedge (B \to A))$ und daher nicht wie $(A \to B)$ allein.

Die Tafel (4) kennen wir bereits – es handelt sich um die Wahrheitstafel der Konjunktion. Aber $(A \to B)$ und $(A \wedge B)$ sollten sicherlich nicht in denselben "logischen Topf" geworfen werden. Also scheiden wir auch Tafel (4) aus.

Damit bleibt uns nur mehr die Möglichkeit (1) übrig:

Wahrheitstafel 8 (Implikation)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wenn wir also die natursprachliche, durch Wenn-dann-Sätze ausgedrückte Implikation *überhaupt* mit einer Wahrheitstafel erfassen können, dann nur durch *diese* Wahrheitstafel. Ein Implikationssatz ist also immer wahr, wenn sein Antezedens falsch ist, und er ist auch immer wahr, wenn sein Konsequens wahr ist. Es gibt nur einen einzigen Fall, in dem er falsch ist: Sein Antezedens ist wahr, und sein Konsequens ist falsch.

Die Logiker sind sich sehr wohl bewusst, dass mit dieser Wahrheitstafel – gerade in den Fällen, in denen das Antezedens falsch ist – die Bedeutung natursprachlicher Implikationssätze nicht immer adäquat wiedergegeben werden kann. Es hat sich aber gezeigt, dass diese Wahrheitstafel für die logische Konstruktion wissenschaftlicher Theorien hinreichend ist und sich als außerordentlich praktisch und nützlich erweist. Weiters stellt die Analyse mit Hilfe obiger Wahrheitstafel auch die *einfachste* Methode dar, Implikationssätze logisch zu analysieren. Für die linguistisch adäquate Analyse mancher natursprachlicher Implikationssätze ist die Wahrheitstafelmethode dennoch nicht geeignet. Oft verwenden wir einen Implikationssatz nämlich, um eine Beziehung zwischen Antezedens und Konsequens auszudrücken, die über eine reine Verknüpfung von Wahrheitswerten hinausgeht.[2]

Geben wir einige Beispiele dazu an:

- Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
- Wenn am 31. Dezember vermehrt Sonnenflecken auftreten, dann kommt es am 1. Jänner zu einem schweren Konjunktureinbruch.

Diese beiden Sätzen könnte man auch so verstehen, dass ein kausaler Zusammenhang zwischen Antezedens und Konsequens zum Ausdruck gebracht werden soll, den man deutlicher auch mit einem Wort wie 'weil' hätte ausdrücken können:

- Weil es regnet, ist die Straße nass.
- Weil am 31. Dezember vermehrt Sonnenflecken auftreten, kommt es am 1. Jänner zu einem schweren Konjunktureinbruch.

[2]Der britische Philosoph H. Paul Grice, den wir bei den Konjunktionssätzen schon erwähnt hatten, hat allerdings argumentiert, dass natursprachliche Implikationssätze (zumindest die im Indikativ formulierten) *semantisch* gesehen sehr wohl immer materiale Implikationen sind, d.h. der Wahrheitstafel der materialen Implikation genügen, dass Äußerungen derselben jedoch *pragmatisch* mit verschiedenen Konnotationen versehen sein können, die sich aus den Regeln unserer Kommunikationspraxis heraus erklären lassen. Nach Grice wäre also die Wahrheitstafelmethode sehr wohl immer auf solche Wenn-dann-Sätze anwendbar, soweit die semantischen Eigenschaften derselben betroffen sind und nicht die pragmatischen. Mehr dazu findet sich unter [5]. Die Unterscheidung von Semantik und Pragmatik werden wir auch zu Beginn des Kapitels 6 kurz behandeln.

Wir werden unten auf S.58 sehen, dass der Wahrheitswert solcher Sätze nicht alleine vom Wahrheitswert seiner Teilsätze abhängt und daher die Bedeutung von 'weil' nicht durch eine Wahrheitstafel erfasst werden kann.

Ähnlich wie bei den Kausalsätzen verhält es sich bei den sogenannten *irrealen* oder *kontrafaktischen Konditionalsätzen*, wie z.B.:

- Wenn Oswald Kennedy nicht erschossen hätte, dann wäre Nixon niemals Präsident geworden.

Auch solche Sätze sind einer logischen Analyse mittels Wahrheitstafel nicht zugänglich. Insbesondere würde man einen solchen im irrealen Konjunktiv formulierten Wenn-dann-Satz nicht schon deshalb als wahr bewerten wollen, weil sein Wenn-Teil falsch ist, wie es ja gemäß unserer Wahrheitstafel oben der Fall wäre. Insgesamt stellt sich die Wahrheitstafel von oben als ungeeignet für die Analyse von Implikationssätzen im *Konjunktiv* dar (während die Wahrheitstafel für die Analyse von Implikationssätzen im *Indikativ* – also *nicht* in der Möglichkeitsform - weit vielversprechender ist).

Wir müssen uns überhaupt gänzlich von der Idee befreien, dass irgendein inhaltlicher Zusammenhang zwischen dem Antezedens und dem Konsequens eines Implikationssatzes bestehen muß. So etwas mag zwar im Alltag selten vorkommen, aber man kann doch sinnvollerweise sagen:

- Heute ist Dienstag und der Papst ist Katholik.
- Heute ist Dienstag oder der Papst ist Katholik.

Genauso kann man aber sinnvollerweise folgenden Implikationssatz behaupten:

- Wenn heute Dienstag ist, dann ist der Papst Katholik.

Das Konsequens ist wahr, daher ist gemäß der Wahrheitstafel für die Implikation auch der Implikationssatz wahr.

Die Analyse von Implikationssätzen, die kausale, zeitliche oder andere inhaltliche Zusammenhänge zwischen den Teilsätzen ausdrücken, ist *nicht* Gegenstand der elementaren Aussagenlogik, aber ein wichtiger Forschungsschwerpunkt der philosophischen Logik.[3] Das soll aber nicht heißen, dass es nicht auch sehr gute Argumente dafür gibt, einen erklecklichen Teil der Wenn-dann-Sätze der natürlichen Sprache mittels des $\rightarrow$ mit der vorher diskutierten Wahrheitstafel zu analysieren. In der Tat werden wir später noch einige solche Argumente kennenlernen. Wenn man übrigens klarstellen will, dass man das 'wenn-dann' in der durch die obige Wahrheitstafel festgelegte Bedeutung meint, dann fügt

[3] Siehe [7].

man oft hinzu, man meine das *materiale* wenn-dann bzw. das *materiale* Implikationszeichen. 'Material' bedeutet dann so viel wie: rein von Wahrheitswerten abhängig.

Manchmal sprechen wir auch davon, dass etwas eine Ursache für etwas anderes ist, wenn wir dabei eigentlich aber nur an hinreichende oder notwendige Bedingungen denken. Diese können wir in der Aussagenlogik jedoch sehr wohl behandeln, denn die Termini 'hinreichende Bedingung' und 'notwendige Bedingung' lassen sich hier exakt definieren. Wenn wir etwa sagen:

- Heidis fleißige Mitarbeit in der Lehrveranstaltung "Logik 1" ist eine hinreichende Bedingung für ihren positiven Abschluss dieser Lehrveranstaltung

so ist dies ein falscher Satz. Wenn wir hingegen sagen:

- Heidis fleißige Mitarbeit in der Lehrveranstaltung "Logik 1" ist eine notwendige Bedingung für ihren positiven Abschluss dieser Lehrveranstaltung

so ist dies wohl ein wahrer Satz. Denn wäre der erste Satz wahr, so müsste Heidi über die fleißige Mitarbeit hinaus nichts weiter dazutun, um eine positive Note zu erhalten; dafür muß sie aber auch und vorallem eine Klausur bestehen, etc. Ihre fleißige Mitarbeit ist also nicht *hinreichend* für ihren positiven Abschluss. Der zweite Satz ist aber vermutlich wahr, da sie ohne fleißige Mitarbeit eben kein Verständnis für Logik entwickeln wird und daher dann auch keine positive Note erhalten wird, d.h. ihre fleißige Mitarbeit ist *notwendig* für den positiven Abschluss.

So viel zu den sprachlichen Intuitionen, die der Redeweise von 'hinreichend für' und 'notwendig für' unterliegen – nun zu der einfachsten Weise, diese Intuitionen präziser zu fassen: Überlegungen analog zu den obigen lassen sich auch an der Wahrheitstafel für die Implikation ablesen: Ein Implikationssatz $(A \to B)$ ist ja genau dann falsch, wenn sein Antezedens A wahr und sein Konsequens B falsch ist – die Wahrheit des Antezedens zieht also gleichsam die Wahrheit des Konsequens nach sich, falls der Implikationssatz wahr ist. Das Antezedens ist also immer eine hinreichende Bedingung für das Konsequens – kurz:

- Wenn Antezedens, so Konsequens.

An der Wahrheitstafel für die Implikation sieht man aber auch, dass die Falschheit des Konsequens die Falschheit des Antezedens gewissermaßen nach sich zieht, falls der Implikationssatz wahr ist. Dies bedeutet, dass das Konsequens immer eine notwendige Bedingung für das Antezedens ist – ohne Bestehen des Konsequens kein Bestehen des Antezedens. Denn wenn das Konsequens nicht besteht, dann besteht auch das Antezedens nicht.

Also ist bei einem Satz der Form

- $(A \to B)$

das Antezedens A immer die hinreichende Bedingung für das Konsequens B bzw. B die notwendige Bedingung für A. Wir halten somit fest:

- Ein Satz A ist eine *hinreichende Bedingung* für einen Satz B genau dann, wenn $(A \to B)$ wahr ist.

- Ein Satz B ist eine *notwendige Bedingung* für einen Satz A genau dann, wenn $(A \to B)$ wahr ist.

Übrigens werden notwendige Bedingungen oftmals auch ausgedrückt, indem das Wörtchen 'nur' an geeigneter Stelle platziert wird. Statt

- Heidis fleißige Mitarbeit in der Lehrveranstaltung "Logik 1" ist eine notwendige Bedingung für ihren positiven Abschluss dieser Lehrveranstaltung

kann man nämlich auch kürzer sagen:

- Nur wenn Heidi in der Lehrveranstaltung "Logik 1" fleißig mitarbeitet, wird sie diese Lehrveranstaltung positiv abschließen.

Durch das Hinzufügen des 'nur' wird aus der hinreichenden Bedingung eine notwendige. Während in

- Wenn es regnet, ist die Straße nass. $(A \to B)$

das Regnen eine *hinreichende* Bedingung für die Nässe der Straße ist, ist in

- Nur wenn es regnet, ist die Straße nass. $(B \to A)$

das Regnen eine notwendige Bedingung für die Nässe der Straße. Der letzte Satz sagt also nichts anderes aus, als:

- Wenn die Straße nass ist, dann regnet es. $(B \to A)$

Das Hinzufügen des 'nur' dreht also gleichsam den Implikationspfeil um.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass Implikationssätze der folgenden Formen im Allgemeinen paarweise gleichbedeutend sind:

- $(A \to B)$.
- Wenn A, (dann) B.
- B, wenn A.
- Nur wenn (auch) B, (dann) A.
- Nur A, wenn (auch) B.
- A nur dann, wenn (auch) B.
- A ist hinreichend dafür, dass B.
- B ist notwendig dafür, dass A.
- A ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass B.
- B ist eine notwendige Bedingung dafür, dass A.

Erläutern wir dies nochmals anhand eines Beispiels: Wenn wir 'A' durch 'Etwas ist blau' und 'B' durch 'Etwas ist farbig' ersetzen, dann erhalten wir lauter Aussagesätze, die allesamt von ein und derselben Form $(A \to B)$ sind:

- Wenn etwas blau ist, dann ist es farbig.
- Etwas ist farbig, wenn es blau ist.
- Nur wenn etwas auch farbig ist, ist es blau.
- Etwas ist nur blau, wenn es auch farbig ist.
- Etwas ist blau nur dann, wenn es auch farbig ist.
- Dass etwas blau ist, ist hinreichend dafür, dass es farbig ist.
- Dass etwas farbig ist, ist notwendig dafür, dass es blau ist.
- Dass etwas blau ist, ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass es farbig ist.
- Dass etwas farbig ist, ist eine notwendige Bedingung dafür, dass es blau ist.

Alle diese Sätze haben exakt dieselbe logische Form, die mittels $\to$ angegeben werden kann.

2.2.5 Äquivalenzsätze

Als letzte Möglichkeit zur Zusammensetzung von Aussagesätzen, die wir mittels Wahrheitstafeln behandeln können, wollen wir die *Äquivalenz* anführen. Ein Beispiel für einen Äquivalenzsatz ist:

- Herbert küsst Heidi genau dann, wenn Heidi Herbert küsst.

Ein wenig in logische Form gebracht, sieht dieser Satz so aus:

- Küsst(Herbert, Heidi) genau dann, wenn Küsst(Heidi, Herbert)

Das logische Symbol für Äquivalenz ist der Doppelpfeil $\leftrightarrow$. Im Logiker-Deutsch sieht unser Beispielsatz dann wie folgt aus:

- Küsst(Herbert, Heidi) $\leftrightarrow$ Küsst(Heidi, Herbert)

Der Doppelpfeil soll uns daran erinnern, dass – wie wir oben bereits erwähnt haben – Äquivalenzsätze gleichbedeutend mit der Konjunktion zweier Implikationssätze sind. D.h., ein Äquivalenzsatz

- $(A \leftrightarrow B)$

hat dieselbe Bedeutung wie

- $((A \to B) \land (B \to A))$

'Äquivalenz' heißt ja nichts anderes als 'Gleichwertigkeit', und bei uns heißt dies: gleichwertig hinsichtlich der Wahrheitswerte der Teilsätze. Wenn die beiden Teilsätze eines Äquivalenzsatzes also denselben Wahrheitswert haben, dann ist der Äquivalenzsatz wahr, haben sie unterschiedliche Wahrheitswerte, so ist er falsch:

Wahrheitstafel 9 (Äquivalenz)

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Da ja ein Äquivalenzsatz gleichbedeutend ist mit der Konjunktion der entsprechenden Implikationssätze, hätten wir diese Wahrheitstafel auch aus den Wahrheitstafeln für Implikation und Konjunktion erschließen können.

Noch etwas ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen Implikationssätzen und Äquivalenzsätzen: Anstatt 'A genau dann, wenn B' zu sagen, darf man gleichbedeutend formulieren: A ist eine (zugleich) notwendige und hinreichende Bedingung für B. Denn dies heißt ja wiederum nichts anderes als: A ist eine notwendige Bedingung für B (d.h., $B \to A$) und A ist auch eine hinreichende Bedingung für B (d.h., $A \to B$). Und Äquivalenz ist ja, wie gesagt, nichts anderes als Implikation in beide Richtungen.

Wenn wir im Übrigen in diesem Buch das eine oder andere Mal kurz 'gdw' schreiben, so wird das einfach eine bequeme Abkürzung von 'genau dann wenn' sein.

2.2.6 Aussagenlogische Zerlegbarkeit

Wir haben nun alle Aussagesätze kennengelernt, die wir als aussagenlogisch zerlegbar betrachten wollen. Wir werden uns also merken:

> Ein Aussagesatz ist *aussagenlogisch zerlegbar* genau dann, wenn er entweder die Negation eines Aussagesatzes ist, oder die Konjunktion, Disjunktion, Implikation oder Äquivalenz zweier Aussagesätze ist.

Eine unmittelbare Folgerung dieser Festlegung ist, dass einfache Aussagesätze aussagenlogisch unzerlegbar sind, da sie ja keine Negations-, Konjunktions-, Disjunktions-, Implikations- oder Äquivalenzsätze sind.

Gemäß der fünf Kategorien aussagenlogisch zerlegbarer Sätze werden wir später die Sprache der Aussagenlogik aufbauen, welche zwar diejenige logische Sprache ist, auf der alle anderen logischen Sprachen basieren, die aber keineswegs selbst schon ausdrucksstark genug ist, um in ihr sämtliche Aussagesätze der natürlichen Sprache *adäquat* logisch analysieren zu können. Das ist aber auch gar nicht ihre Aufgabe. Im nächsten Abschnitt werden wir einige Beispiele für aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätze kennenlernen, die sich der aussagenlogischen Analyse "widersetzen". Manche davon werden sich im zweiten Teil dieses Buches jedoch als *prädikatenlogisch* zerlegbar herausstellen, und die prädikatenlogische Sprache wird als hinreichend ausdrucksstart erweisen, um in ihr das Gros der Wissenschaftssprachen erfolgreich repräsentieren zu können. Darüber hinaus gehende aussagenlogisch unzerlegbare Aussagesätze werden wir in diesem Buch nicht mehr analysieren, aber es gibt sehr wohl andere Erweiterungen der logischen Sprache, in denen dies möglich ist. Diese sind dann das Thema von Erweiterungen der Prädikatenlogik, welche jedoch nicht mehr in dieser Vorlesung behandelt werden können.

2.3 Komplexe aussagenlogisch unzerlegbare Sätze

Die erste Kategorie der aussagenlogisch unzerlegbaren Sätze ist – wie wir gesehen haben – die der einfachen Aussagesätze. Diese sind aussagenlogisch unzerlegbar, da sie keine Aussagesätze mehr als echte Teile enthalten, sondern "nur" singuläre und generelle Terme. Diese Terme werden wir aber erst in der Prädikatenlogik als echte logische Bestandteile von Aussagesätzen analysieren können. Die aussagenlogisch unzerlegbaren Sätze, die wir nun kennenlernen werden, können sehr wohl andere Aussagesätze als echte Teile enthalten, diese sind jedoch nicht mittels den aussagenlogischen Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ verknüpft, sondern durch andere logische Zeichen, die uns in einer aussagenlogischen Analyse nicht zur Verfügung stehen. Es gibt also neben den einfachen (und somit aussagenlogisch unzerlegbaren) Aussagesätzen eine Reihe von *komplexen* aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätzen, von denen wir nur eine kleine, philosophisch relevante Auswahl betrachten wollen.

Wir haben oben gesehen, dass materiale Implikationssätze keinen kausalen Zusammenhang zwischen Antezedens und Konsequens ausdrücken. In der natürlichen Sprache gibt es freilich sehr wohl sinnvolle Kausalsätze, welche sich nur nicht als aussagenlogisch analysierbar herausstellen. Ein Beispiel für einen solchen Kausalsatz ist die alltagspsychologische Feststellung:

- Herbert ist glücklich, weil Heidi ihn geküsst hat.

Vermutlich ist es bei diesem und den meisten Kausalsätzen so, dass, wenn der Kausalsatz wahr ist, beide seiner Teilsätze auch wahr sind. D.h., wenn mindestens ein Teilsatz falsch ist, dann ist zwangsläufig auch der Kausalsatz falsch. Wenn wir aber nur wissen, dass beide Teilsätze wahr sind, dann können wir rein aussagenlogisch betrachtet noch nichts über den Wahrheitswert des Gesamtsatzes aussagen, wie wir an folgenden Beispielen sehen können:

- Die Autobahn ist nass, weil es geregnet hat.

- Die Autobahn ist asphaltiert, weil es geregnet hat.

Nehmen wir an, die Autobahn ist wirklich nass, sie ist natürlich auch asphaltiert, und es hat vor kurzem geregnet. Dann sind in beiden Beispielsätzen beide Teilsätze wahr, aber nur der erste Kausalsatz ist wahr, da eben der entsprechende Kausalzusammenhang besteht, der zweite hingegen ist falsch. Wir können also keine vollständige Wahrheitstafel für den Kausaloperator 'weil' angeben, sondern nur eine partielle:

Wahrheitstafel 10 (Kausalität)

A	B	$(A, \text{weil } B)$
w	w	?
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Hier können wir das Fragezeichen in der ersten Zeile nicht durch einen konkreten Wahrheitswert ersetzen; aber eine Wahrheitstafel, in der nicht alle Zeilen vollständig ausgefüllt sind, ist eigentlich gar keine Wahrheitstafel, d.h., dass die Bedeutung des Kausaloperators 'weil' mit aussagenlogischen Mitteln nicht angegeben werden kann, er mithin also *kein* aussagenlogischer Junktor sein kann. Kausalsätze werden eingehender in der Konditionallogik[4] – der Logik der (insbesondere kontrafaktischen) Wenn-dann-Sätze – sowie in der Wissenschaftstheorie und in der Metaphysik behandelt.

In der Philosophie im Allgemeinen, im speziellen aber in der Metaphysik, spielen auch sogenannte *(alethische) Modalsätze* eine wichtige Rolle. In diesen geht es um Möglichkeit und Notwendigkeit:

1. Es ist möglich, dass es intelligentes Leben auf der Erde gibt.

2. Es ist möglich, dass es intelligentes Leben auf dem Mond gibt.

3. Es ist möglich, dass $2 + 2 = 5$.

4. Notwendigerweise gilt, dass $2 + 2 = 5$.

5. Notwendigerweise gilt, dass $2 + 2 = 4$.

6. Notwendigerweise gilt, dass es intelligentes Leben auf der Erde gibt.

Wie wir gleich zeigen werden, ist auch die Bedeutung solcher Sätze aussagenlogisch nicht eindeutig durch den Wahrheitswert ihrer Teilsätze bestimmt. Die Wahrheitswerte solcher Sätze können erst in einer Erweiterung der Aussagenlogik, nämlich der *(alethischen) Modallogik*[5] bestimmt werden, auf die wir hier natürlich nicht weiter eingehen werden. Wir wollen nur die üblichen logischen Symbole für Möglichkeit ($\Diamond$) und Notwendigkeit ($\Box$), die in der Modallogik Verwendung finden, einführen, um eine konzisere Notation zur Verfügung zu haben. Diese beiden Symbole werden auch 'Möglichkeitsoperator' und 'Notwendigkeitsoperator' genannt. Die Sätze 3 und 5 sehen dann wie folgt aus:

[4] Siehe [7].
[5] Siehe [3].

- $\Diamond\, 2 + 2 = 5$
- $\Box\, 2 + 2 = 4$

Wenn ein Satz A wahr ist, so ist offensichtlich auch der Satz $\Diamond A$ wahr, da die Wahrheit des Satzes A doch die Möglichkeit des Satzes A impliziert, wie wir an Satz 1 sehen: Schon daraus, dass es in der Tat intelligentes Leben auf der Erde gibt, folgt doch, dass es möglich ist, dass es intelligentes Leben auf der Erde gibt. Wenn wir jedoch nur wissen, dass ein Satz A falsch ist, können wir noch nichts über den Wahrheitswert von $\Diamond A$ sagen; denn es gibt Fälle, in denen A falsch ist, $\Diamond A$ jedoch wahr (wie eventuell in Satz 2), und es gibt Fälle in denen beide Sätze falsch sind (wie in Satz 3). Denn es gibt kein intelligentes Leben auf dem Mond, obwohl es vermutlich möglich wäre, dass es intelligentes Leben auf dem Mond gäbe, und es ist weder so, dass 2+2=5 ist, noch ist es so, dass es möglich wäre, dass 2+2=5. Daher können wir auch für $\Diamond$ nur eine partielle Wahrheitstafel angeben:

Wahrheitstafel 11 (Möglichkeit)

A	$\Diamond A$
w	w
f	?

Nun zur Notwendigkeit: Wenn ein Satz A falsch ist, so ist auch der Satz $\Box A$ falsch, da die Falschheit des Satzes A zeigt, dass A nicht mit Notwendigkeit gelten kann, wie wir an Satz 4 sehen. Wenn wir andererseits nur wissen, dass der Satz A wahr ist, dann können wir wiederum noch nichts über den Wahrheitswert von $\Box A$ sagen; denn hier gibt es Fälle, in denen A wahr ist, $\Box A$ aber falsch (wie in Satz 6), und es gibt Fälle in denen beide Sätze wahr sind (wie in Satz 5). So können wir auch für $\Box$ nur eine partielle Wahrheitstafel angeben:

Wahrheitstafel 12 (Notwendigkeit)

A	$\Box A$
w	?
f	f

Weitere Kategorien komplexer aussagenlogisch unzerlegbarer Sätze sind die der *epistemischen* und *doxastischen Modalsätze*[6], welche vor allem für die philosophische Disziplin der Erkenntnistheorie von fundamentaler Bedeutung

[6] Siehe [2].

sind. Dies sind Sätze, in denen von Wissen bzw. Glauben oder Überzeugung die Rede ist (wobei Glauben hier nicht religiös, sondern im Sinne von Führwahrhalten verstanden wird). Ein epistemischer Satz ist etwa:

- Otto weiß, dass Heinrich Vorarlberger ist.

Ein wichtiges Prinzip der Erkenntnistheorie besagt, dass Wissen Wahrheit impliziert, d.h. bezüglich unseres Beispiels: Wenn Otto weiß, dass Heinrich Vorarlberger ist, dann ist es auch wahr, dass Heinrich Vorarlberger ist. Das heißt wiederum, dass, wenn es falsch ist, dass Heinrich Vorarlberger ist, Otto auch nicht weiß, dass er Vorarlberger ist. Allgemein gilt also: Wenn A falsch ist, dann ist auch KA falsch, wobei wir das Symbol K in der logischen Sprache für die natursprachliche Phrase '... weiß, dass' verwenden. (Das K rührt übrigens vom englischen Wort '*knowledge*' her.) Dies führt uns zu folgender abermals partieller Wahrheitstafel des Wissensoperators K:

Wahrheitstafel 13 (Wissen)

A	KA
w	?
f	f

Da es aber offensichtlich sowohl wahre Sätze gibt, die nicht gewußt werden, als auch wahre Sätze, die gewußt werden, ist es uns nicht möglich, das Fragezeichen in der ersten Zeile durch einen eindeutigen Wahrheitswert zu ersetzen. Die Bedeutung des Wissensoperators K kann also ebenfalls nicht durch eine Wahrheitstafel angegeben werden.

Noch schlimmer ist es um die doxastischen Sätze bestellt. Wie wir alle aus eigener (leidvoller) Erfahrung wissen, gibt es (i) Sätze, die wahr sind und geglaubt werden, (ii) Sätze, die wahr sind und nicht geglaubt werden, (iii) Sätze, die falsch sind und geglaubt werden, und (iv) Sätze, die falsch sind und nicht geglaubt werden. Hier sieht die Wahrheitstafel für den Glaubensoperator B (von '*belief*'), den wir als Symbol für die Phrase '... glaubt, dass' verwenden, also besonders dürftig aus:

Wahrheitstafel 14 (Glauben)

A	BA
w	?
f	?

Auch doxastische (also: Glaubens-) Operatoren können daher nicht im Rahmen der Aussagenlogik behandelt werden.

Nach der Metaphysik und Erkenntnistheorie wollen wir nun noch Sätze betrachten, die in einer weiteren philosophischen Hauptdisziplin eine zentrale Rolle spielen, nämlich in der Ethik: dies sind die *deontischen* (oder *normativen*) *Modalsätze*. Typische Beispiele dafür sind:

- Studenten müssen immer brav und artig sein.
- Es ist verboten, im Hörsaal Fußball zu spielen.
- Es ist erlaubt, den Lehrer zu loben und zu preisen.

Es geht hier also um Gebote, Verbote und Erlaubnisse. Bezüglich dieser Sätze gibt es unterschiedliche Auffassungen: Manche Philosophen meinen, dass sie Aussagesätze sind, die also wahr oder falsch sind; andere sind jedoch der Meinung, dass es nicht die semantische Funktion von deontischen Sätzen ist, die Wirklichkeit zu beschreiben, sondern vielmehr gewisse "richtige" Einstellungen und Gedanken in uns hervorzurufen und uns damit zu einem "moralisch korrekten" Leben anzuleiten. Wie schon einmal erwähnt, sind diese Sätze in letzterem Falle natürlich keine Aussagesätze und somit auch nicht wahr oder falsch, sondern haben bestenfalls "Geltung" bzw. "Richtigkeit". Wer jedoch die erste Auffassung bevorzugt, kann versuchen, Wahrheitstafeln für deontische Sätze anzugeben. Doch genau wie beim Glaubensoperator gibt es auch bei den deontischen Operatoren sämtliche Kombinationsmöglichkeiten von Wahrheit und Falschheit für den Ausgangssatz A einerseits und den daraus gebildeten Gebotssatz OA (vom englischen '*obligatory*'), den Verbotssatz FA (vom englischen '*forbidden*') und den Erlaubnissatz PA (vom englischen '*permitted*') andererseits. Wir verzichten daher darauf, die partiellen Wahrheitstafeln für diese Operatoren anzugeben, da sie uns überhaupt nichts mehr über deren Bedeutung sagen können. Das heißt aber nicht, dass diese deontischen Operatoren keinerlei logischen Analyse zugänglich wären: In der Tat beschäftigt sich ein ganzes Teilgebiet der philosophischen Logik – die deontische Logik[7] – mit der Logik dieser logischen Junktoren.

Als letzte Kategorie komplexer aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesätze wollen wir die der *generellen Sätze* anführen. Die prominentesten Vertreter dieser Kategorie sind die All- und Existenzaussagesätze, welche wir im zweiten Teil dieser Vorlesung prädikatenlogisch analysieren werden. Beispiele für solche Sätze sind

- Alle Österreicher sind strebsam und fleißig.

[7] Siehe [1].

- Es gibt Österreicher, die strebsam und fleißig sind.

Wie wir später sehen werden, ist auch nur der Versuch der Angabe einer Wahrheitstafel für solche Sätze zum Scheitern verurteilt. Bestenfalls könnte man ein "Gebilde" dieser Art angeben:

Wahrheitstafel 15 (??? Allsatz ???)

$P(x)$	$\forall x P(x)$
w	
w	
$\vdots$	
f	
f	
$\vdots$	

Der Wahrheitswert von $\forall x P(x)$ ("Alles hat die Eigenschaft P") würde von den Wahrheitswerten des "unbestimmten" Ausdrucks $P(x)$ abhängen. Dabei müsste aber x verschiedene "Werte" annehmen können, unter Umständen auch unendlich viele Werte (wie in "Alle Zahlen…"). All das müsste präzisiert werden – und *wird* auch präzisiert werden, nämlich später in der Prädikatenlogik – diese Präzisierungen übersteigen jedoch die Ausdruckskraft einer einfachen Wahrheitstafel. (Genauso verhält es sich bei den Existenzsätzen.)

Das tut aber momentan nichts zur Sache: In diesem ersten aussagenlogischen Teil der Vorlesung wird es für uns nur wichtig sein, dass Sätze dieser Art aussagenlogisch unzerlegbar sind und sich damit einer aussagenlogischen Analyse verwehren.

Noch ein kleiner Vorgriff auf die prädikatenlogischen Sprachen, die wir im zweiten Teil dieses Buches behandeln werden: Der Aussagesatz 'Alles ist materiell' ist ebenfalls ein Allsatz und somit gemäß unserer Klassifikation ein komplexer aussagenlogisch unzerlegbarer Satz. Doch man mag sich die Frage stellen, welcher echte Teil von diesem denn nun wiederum ein Aussagesatz sein soll? So einen Teil müsste es ja geben, wenn es sich bei 'Alles ist materiell' wirklich um einen komplexen Aussagesatz handeln soll. Die Antwort auf diese Frage wird sich deutlicher nach der Behandlung der prädikatenlogischen Sprache erschließen: Denn in dieser wird 'Alles ist materiell' mittels einer Formel der Form $\forall x M(x)$ repräsentiert werden, in der $\forall x$ für 'für alle x' steht und $M(x)$ für 'x ist materiell'. Der letztere Formelteil $M(x)$, so könnte man sagen, repräsentiert dabei einen Satz der Art 'es ist materiell', welcher als Aussagesatz bezeichnet werden darf, solange klargestellt ist, wofür 'es' in dem jeweiligen Kontext stehen soll. Das heißt, 'Alles ist materiell' wird letztlich verstanden werden als: *Für alles gilt, dass es materiell ist.* Somit ist dann 'Es ist materiell' ein Aussagesatz, der sich als echter Teil von 'Alles ist materiell' (bzw. 'Für alles gilt, dass es materiell ist') herausstellt. Mithin ist dann 'Alles ist materiell' in der Tat ein komplexer Aussagesatz, weil er einen weiteren Aussagesatz als echten Teil enthält.

2.4 Klassifikation von Aussagesätzen

Wir möchten zum Abschluss dieser Sektion noch eine Übersicht über die von uns vorgenommene Klassifikation der Aussagesätze geben:

Aussagesätze

einfach (aussagenlogisch unzerlegbar) | *komplex*

aussagenlogisch zerlegbar:
Negationssätze
Konjunktionssätze
Disjunktionssätze
Implikationssätze
Äquivalenzsätze

aussagenlogisch unzerlegbar:
Kausalsätze
alethische Modalsätze
epistemische Modalsätze
doxastische Modalsätze
deontische Modalsätze
generelle Sätze
⋮

2.5 Argumente

Weder in der Philosophie noch in den Wissenschaften ist es ausreichend, einfach Behauptungen aufzustellen, d.h. durch die bloße Äußerung eines Aussagesatzes etwas ohne weitere Begründung zu behaupten. Stattdessen müssen wir *Argumente* für unsere Behauptungen vorbringen. Ein *gültiges* Argument kann einem nämlich zusätzlich einen guten *Grund* dafür bieten, an die jeweilige Behauptung zu glauben, die die Konklusion des Argumentes ist. Demgemäß ist es nicht alleine wichtig, die logische Form von Aussagesätzen herauszufinden, sondern insbesondere auch die von Argumenten. Mit der logischen Form von Argumenten werden wir uns ausführlich in Abschnitt 3.2 auseinandersetzen.

Zunächst aber wollen wir nur einige Beispiele von Argumenten angeben, festlegen, was überhaupt ein Argument ist, und die übliche Terminologie einführen, mit deren Hilfe man über Argumente und deren Bestandteile spricht. Ein klassisches Beispiel für ein natursprachliches Argument ist:

- Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.

Dieses Argument besteht aus drei Aussagesätzen. Die ersten beiden Aussagesätze sind die *Prämissen* des Argumentes, d.h. sie werden vorausgesetzt bzw. angenommen. Der letzte Aussagesatz beginnt mit einem ‘also’, welches die *Konklusion* des Argumentes einleitet, d.h. in unserem Fall den Aussagesatz ‘Sokrates ist sterblich’. Die Konklusion eines Argumentes soll üblicherweise durch die Prämissen des Argumentes gestützt werden, und *Konklusionsindikatoren* wie ‘also’ zeigen den Übergang von den Prämissen zur Konklusion an. Um diese Struktur zu verdeutlichen, kann man das natursprachliche Argument in folgende traditionelle Standardform bringen:

(Arg. 1) Alle Menschen sind sterblich.

Sokrates ist ein Mensch.

Also: Sokrates ist sterblich.

Wir schreiben also alle Prämissen untereinander, lassen einen horizontalen Strich folgen, und schreiben schließlich den Konklusionsindikator ‘also:’, gefolgt von der Konklusion.

Das nächste Beispiel schreiben wir gleich in Standardform an:

(Arg. 2) Alle Menschen sind sterblich.

Sokrates ist ein Fisch.

Also: Sokrates ist ein Philosoph.

Dieses Argument ist – im Gegensatz zu vorigem – offensichtlich “unsinnig”, aber es ist nichtsdestotrotz ein Argument. Argumente müssen also nicht “vernünftig” oder gar gültig sein, es ist nur wichtig, dass sie eine gewisse Form haben.

Auch die folgende Folge von Aussagesätzen ist ein Argument:

(Arg. 3) Der Papst kommt nächsten Sommer nach Wien oder nach Salzburg.

Der Papst kommt aber nächsten Sommer nicht nach Wien.

Daher: Der Papst kommt nächsten Sommer nach Salzburg.

Wir sehen, dass es in der deutschen Sprache die verschiedensten Konklusionsindikatoren gibt, etwa:

also, daher, somit, folglich,...

Da alle diese Ausdrücke dasselbe bedeuten, werden wir in der logischen Sprache jedoch nur einen einzigen Konklusionsindikator verwenden, nämlich

$\therefore$

Im Abschnitt 3.2 werden wir die Form eines Argumentes mit den Prämissen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ und der Konklusion B daher einfach so schreiben:

$$A_1, \ldots, A_{n-1} \therefore B$$

Wir halten fest:

Ein *Argument* ist eine Folge von n (wobei $n > 0$) Aussagesätzen,

1. deren erster bis $n-1$-ter Aussagesatz ‘Prämisse’ genannt werden, und
2. deren n-ter Satz durch einen Konklusionsindikator eingeleitet wird, welchem ein Aussagesatz folgt, der ‘Konklusion’ genannt wird.

Wir haben also auch den Fall eines Argumentes eingeschlossen, welches eine “Folge” von genau einem Aussagesatz ist, für das also $n = 1$ gilt. Sein erster und einziger Satz ist zugleich die Konklusion des Argumentes, d.h. es gibt keine Prämissen, wie dies beispielsweise bei folgendem Argument der Fall ist:

Also: Sokrates ist identisch mit Sokrates.

Die Konklusion ‘Sokrates ist identisch mit Sokrates’ ist hier schon für sich genommen unzweifelhaft wahr; entsprechend deutet das Fehlen der Prämissen an, dass die Wahrheit eines Satzes dieser Form gar nicht mehr durch irgendwelche Prämissen gestützt werden muss.

Argumente wirken auf den ersten Blick sehr ähnlich den Implikationssätzen, und in der Tat werden wir noch einige interessante Beziehungen zwischen diesen beiden Klassen von sprachlichen Ausdrücken kennenlernen. Dennoch sollte man diese klar auseinanderhalten: Implikationssätze sind wahr oder falsch und somit Aussagesätze, während es keine Sinn ergibt, von einem Argument als 'wahr' oder 'falsch' zu sprechen. Argumente können sich jedoch, wie wir in Bälde sehen werden, als logisch gültig oder ungültig herausstellen. Argumente sind eben bestimmte *Folgen* von Aussagesätzen, in den ebenfalls ein Konklusionindikator vorkommt, sie sind freilich nicht selbst Aussagesätze. Entsprechend lässt sich ein Implikationssatz verneinen, während man nicht sinnvoll von der Verneinung eines Argumentes sprechen kann. Usw.