# Kapitel 4

# Die aussagenlogische Sprache

Wir haben bereits Symbole eingeführt, um aussagenlogisch unzerlegbare Aussagesätze zu repräsentieren, nämlich

$p, q, \ldots$

Außerdem haben wir Junktoren – also weitere Symbole – dazu verwendet, um in der formalen Sprache Negationsphrasen, Konjunktionsphrasen, etc. zu repräsentieren. Eigentlich wissen wir aber noch gar nicht, zu welcher *Sprache* diese Symbole genau gehören. Offensichtlich handelt es sich dabei um eine "künstlich" kreierte formale Sprache – der Zweck dieses Kapitels ist es nun, diese formale Sprache exakt aufzubauen: die Sprache der Aussagenlogik.

## 4.1 Das Alphabet der aussagenlogischen Sprache

Wenn man eine Sprache definieren will, muss man zunächst einmal angeben, aus welchen Bestandteilen die Ausdrücke der Sprache denn zusammengesetzt sein sollen. Wir müssen uns also zunächst dem *Alphabet* oder *Vokabular* der aussagenlogischen Sprache zuwenden. Bei formalen Sprachen ist es im Allgemeinen so, dass die Zeichen des Alphabets in drei Kategorien eingeteilt werden können, und zwar in die folgenden:

1. Deskriptive Zeichen.
2. Logische Zeichen.
3. Hilfszeichen.

Wie wir später sehen werden, ist es die Funktion der deskriptiven Zeichen, auf die Welt Bezug zu nehmen oder jedenfalls in Abhängigkeit davon, wie die Welt beschaffen ist, etwas Bestimmtes zu bezeichnen oder auszudrücken oder bewertet zu werden. Dies ist freilich höchst vage, und es ist eine unserer Aufgaben in diesem Buch, Phrasen dieser Art einen exakten Sinn zu geben. Dazu wird es sich als nötig erweisen, diese Zeichen mit einem semantischen "Wert" zu versehen, sie also zu interpretieren, wobei – wie wir noch sehen werden – diese Interpretation bis zu einem gewissen Grad frei gewählt werden kann; die "Bedeutung" der deskriptiven Zeichen ist also nicht fix.

Ganz anders verhält es sich bei den logischen Zeichen. Sie haben sehr wohl eine fixe Bedeutung, die aber nicht dadurch gegeben ist, dass wir ihnen einen festen semantischen Wert zuordnen, sondern vielmehr dadurch, dass logische Regeln – seien sie syntaktischer oder semantischer Natur – ihre Bedeutung eindeutig festlegen. Die Verwendung der logischen Zeichen ermöglicht es uns ja erst, die logische Form sprachlicher Ausdrücke auf eindeutige Weise herauszuarbeiten.

Die Hilfszeichen schließlich dienen alleine dazu, Mehrdeutigkeiten zu vermeiden und die Lesbarkeit der Formeln zu fördern.

Gemäß dieser Einteilung sieht nun das Alphabet unserer aussagenlogischen Sprache wie folgt aus:

1. Aussagenvariablen: $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$, $p_5$, $p_6$, $p_7$, $p_8$,...
2. Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
3. Hilfszeichen: (, )

Unsere deskriptiven Zeichen sind also alleine die Aussagenvariablen, was sich später darin zeigen wird, dass wir dieselben als wahr oder falsch bewerten werden. Es gibt übrigens genauso viele Aussagenvariablen wie natürliche Zahlen in unserem Alphabet, also unendlich viele. Junktoren hingegen gibt es nur fünf, und wir haben dieselben ja bereits in den vorigen Kapiteln kennengelernt. Als die einzigen Hilfszeichen werden wir die linke runde Klammer und die rechte runde Klammer verwenden.

Statt '$p_1$', '$p_2$', '$p_3$', '$p_4$', '$p_5$' werden wir außerdem meist '$p$', '$q$', '$r$', '$s$', '$t$' schreiben, um nicht ständig zu Subindizes greifen zu müssen.

Mit diesem Alphabet können wir nun beliebige Zeichenfolgen bilden, und zwar einfach dadurch, dass wir die Elemente des Alphabets "hintereinanderschreiben". Einige Beispiele dafür sind:

- $(p \wedge q)$
- (((
- $\neg r$

- $\vee\wedge)p($
- $s$
- $(p \wedge p) \to p)$

Nun ist es in der natürlichen Sprache freilich so, dass wir durch ein beliebiges Aneinanderreihen von Buchstaben nicht notwendigerweise auch grammatikalisch wohlgeformte Ausdrücke erzeugen. Genauso verhält es sich bei den formalen Sprachen. Demgemäß ist auch nicht jede Zeichenfolge aus der obigen Liste grammatikalisch wohlgeformt, und zwar im Sinne der im folgenden zu spezifizierenden Grammatik der aussagenlogischen Sprache.

## 4.2 Die Grammatik der aussagenlogischen Sprache

In den natürlichen Sprachen gibt es viele verschiedenartige grammatikalische Kategorien, die Grammatik der aussagenlogischen Sprache ist jedoch höchst einfach. Wir werden in wenigen einfachen Schritten angeben können, was eine (wohlgeformte) aussagenlogische Formel ist. Damit wissen wir dann auch, welche Zeichenfolgen, die aus Elementen unseres Alphabets gebildet werden können, grammatikalisch wohlgeformt sind – eben alle und nur die Formeln. Um auf beliebige Formeln Bezug nehmen zu können, werden wir im folgenden die sogenannten Metavariablen '$A$', '$B$', '$C$', '$D$',... verwenden. Diese Zeichen benützen wir also insbesondere, wenn wir etwas über *alle* Formeln der aussagenlogischen Sprache aussagen wollen, oder wenn wir ausdrücken wollen, dass eine Formel der aussagenlogischen Sprache *existiert*, die diese oder jene Eigenschaft hat: Wir werden dann z.B. sagen, dass für alle Formeln $A$ der aussagenlogischen Sprache gilt, dass ... der Fall ist, oder dass es eine Formel $B$ der aussagenlogischen Sprache gibt, für die ... der Fall ist. Das 'Meta' in 'Metavariable' rührt daher, dass diese Metavariablen nicht selbst Teil der Sprache sind, über die wir sprechen wollen – der sogenannten Objektsprache, in unserem Fall: die aussagenlogische Sprache – sondern derjenigen Sprache angehören, in der wir über die Objektsprache sprechen – der sogenannten Metasprache (in unserem Falle: Deutsch ergänzt durch diverse formale Ausdrücke).

Die Menge der Formeln der aussagenlogischen Sprache können wir nun wie folgt festlegen:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
2. Wenn $A$ eine Formel ist, dann ist auch $\neg A$ eine Formel.

3. Wenn sowohl $A$ als auch $B$ Formeln sind, dann ist auch $(A \wedge B)$ eine Formel.

4. Wenn sowohl $A$ als auch $B$ Formeln sind, dann ist auch $(A \vee B)$ eine Formel.

5. Wenn sowohl $A$ als auch $B$ Formeln sind, dann ist auch $(A \rightarrow B)$ eine Formel.

6. Wenn sowohl $A$ als auch $B$ Formeln sind, dann ist auch $(A \leftrightarrow B)$ eine Formel.

7. Nur solche Zeichenfolgen sind Formeln, die sich mit Hilfe der Regeln 1–6 bilden lassen.

Wir nennen die gemäß Regel 1 gebildeten Formeln auch '*atomare Formeln*', die gemäß Regel 2 gebildeten Formeln '*Negationsformeln*', die gemäß Regel 3 gebildeten Formeln '*Konjunktionsformeln*', die gemäß Regel 4 gebildeten Formeln '*Diskunktionsformeln*', die gemäß Regel 5 gebildeten Formeln '*Implikationsformeln*' und die gemäß Regel 6 gebildeten Formeln '*Äquivalenzformeln*'. Alle Formeln, die nicht atomar sind, d.h. deren Bildung wenigstens eine der Regeln 2–6 involviert, werden wir *komplex* nennen. Die gesamte Menge aller Formeln bezeichnen wir auch mit '$\mathcal{F}$'.

Eine Definition der obigen Art nennt man übrigens 'rekursiv' oder auch 'induktiv'. Dabei beginnt man mit einer "Ausgangsmenge": In unserem Falle ist dies die Menge der Aussagenvariablen. Dies findet in unserer Definition in Regel 1 seinen Ausdruck. Sodann gibt man Regeln an, mit deren Hilfe die Ausgangsmenge Schritt für Schritt erweitert wird. In unserer Definition werden dadurch immer "größere" Negationsformeln, Konjunktionsformeln, Disjunktionsformeln, Implikationsformeln und Äquivalenzformeln hinzugefügt, wie man an den Regeln 2–6 sieht. Endlich schließt man diese Erweiterung ab, indem man alle "unerwünschten" Elemente ausschließt, nämlich alle diejenigen, die man mit Hilfe der bisher angegeben Regeln nicht hat erzeugen können. Dies wird in unserem Falle durch Regel 7 deutlich.

Veranschaulichen wir uns dies anhand eines Beispiels: Da $p$, $q$ und $r$ Aussagenvariablen sind, sind

- $p$, $q$, $r$

gemäß Regel 1 auch Formeln (und zwar derer drei). Daher ist gemäß Regel 2 auch

- $\neg p$

eine Formel (nämlich eine Negationsformel), sowie gemäß Regel 3

- $(q \wedge r)$

eine Formel (nämlich eine Konjunktionsformel). Somit ergibt sich gemäß Regel 4, dass

- $(\neg p \vee (q \wedge r))$

ebenfalls eine Formel ist (eine Disjunktionsformel). Indem wir erneut Regel 2 auf diese Formel anwenden, erhalten wir

- $\neg(\neg p \vee (q \wedge r))$

als Formel (wieder eine Negationsformel). Eine abermalige Anwendung von Regel 2 ergibt, dass auch

- $\neg\neg(\neg p \vee (q \wedge r))$

eine Formel ist (ebenfalls eine Negationsformel). Da – wie wir schon gesehen haben – aber auch $p$ eine Formel ist, ist gemäß Regel 5

- $(\neg\neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow p)$

eine Formel (nämlich eine Implikationsformel). Regel 6 erlaubt es uns nun, auch

- $((\neg\neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow p) \leftrightarrow (\neg\neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow p))$

als eine Formel (eine Äquivalenzformel) zu betrachten. Usw. Wie wir sehen, enthält unsere aussagenlogische Sprache Formeln beliebiger endlicher Länge, da die obigen Regeln wieder und wieder angewendet werden können, um komplexere und noch komplexere Formeln zu bilden.

Von den obigen Zeichenfolgen in Abschnitt 4.1 sind die erste, dritte und fünfte Zeichenfolge Formeln, die anderen jedoch nicht, denn letztere können nicht durch Anwendungen der Regeln 1–6 gebildet werden und sind somit gemäß Regel 7 keine Formeln.

Unsere Definition erlaubt es uns nun, für jede beliebige Zeichenfolge, die aus Elementen unseres Alphabets gebildet ist, festzustellen, ob diese eine Formel ist oder nicht. Bringen wir einige Beispiele dazu:

(a) $(p \wedge q)$

(b) $p$

(c) $(p \rightarrow (q \vee \neg q))$

(d) $(\neg m \wedge p)$

(e) $p \vee q$

(f) $((p \wedge q) \leftrightarrow r)$

(g) $\neg(r)$

(h) $(q \rightarrow (p \vee r)$

Zeichenfolge (a) ist aufgrund der Regeln 1 und 3 eine Formel, (b) alleine aufgrund der Regel 1, (c) ist aufgrund der Regeln 1, 2, 4 und 5 eine Formel, (d) stellt sich nicht als Formel heraus, da wir $m$ nicht als Aussagenvariable eingeführt haben (und somit $m$ gar nicht in unserem Alphabet vorkommt); (e) ist keine Formel, da Disjunktionsformeln immer geklammert sein müssen; (f) ist aufgrund der Regeln 1, 3 und 6 eine Formel, (g) ist keine Formel, da Aussagenvariablen nicht geklammert werden dürfen; und (h) ist keine Formel, weil man gemäß unserer Definition beweisen kann, dass es in jeder Formel gleich viele linke Klammern wie rechte Klammern geben muss.

Die Verwendung von Klammern rührt von folgender Beobachtung her: Sagen wir, jemand hätte es mit der Zeichenfolge

- $(p \wedge q \vee r)$

zu tun. Was genau soll damit dann gemeint sein? Ist es die Disjunktionsformel

- $((p \wedge q) \vee r)$

oder doch die Konjunktionsformel

- $(p \wedge (q \vee r))$

Wie immer die Antwort auch ausfällt: Die Auswirkungen auf die Bedingungen, unter denen die nämliche Formel wahr ist, und darauf, welche Schlüsse sich aus der Formel ziehen lassen, könnten gravierend sein. Deshalb ist es sinnvoll, etwaige Unklarheiten gleich von vornherein durch die Verwendung von Klammern zu beseitigen. Gemäß unserer obigen Formationsregeln ist dann

- $(p \wedge q \vee r)$

gar keine Formel, während es sich bei $((p \wedge q) \vee r)$ und $(p \wedge (q \vee r))$ um zwei – voneinander verschiedene – Formeln handelt.

Im Gegensatz zu den zweistelligen logischen Junktoren lässt sich zeigen, dass Anwendungen des einstelligen Negationsoperators $\neg$ nicht zu Mehrdeutigkeiten führen können: Jedes Vorkommnis von $\neg$ bezieht sich immer auf die eindeutig bestimmte darauf folgende Formel. Daher brauchen Anwendungen von $\neg$ auch nicht geklammert zu werden und entsprechend haben wir unsere obige Definition der Menge der aussagenlogischen Formeln auch angelegt.

## 4.3 Aussagenlogische Argumentformen

Wie wir bereits im letzten Kapitel gesehen haben, lassen sich aussagenlogische Formeln als die aussagenlogischen Formen von Aussagesätzen deuten. Wenn wir unserer aussagenlogischen Sprache nun noch Argumentformen hinzufügen wollen – aussagenlogische Formen von Argumenten – so müssen wir sowohl unser Alphabet als auch unsere Grammatik leicht verändern.

Beginnen wir damit, das aussagenlogische Alphabet um folgende Symbole zu ergänzen:

- Konklusionsindikator: $\therefore$
- Hilfszeichen: ,

Das logische Zeichen $\therefore$ kennen wir ja schon aus Abschnitt 2.5, p.66, in dem wir es als formalen Konklusionsindikator eingeführt haben. Der Beistrich dient nur dazu, die Prämissen einer Argumentform deutlich voneinander zu trennen. So können wir also festsetzen:

> Eine *Argumentform* ist eine Zeichenfolge $A_1, \ldots, A_{n-1} \therefore B$, wobei
>
> 1. alle $A_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ aussagenlogische Formeln sind, welche durch Beistriche voneinander getrennt sind und 'Prämissen' genannt werden, und
> 2. $B$ eine aussagenlogische Formel ist, welche durch $\therefore$ eingeleitet und 'Konklusion' genannt wird.

Wir lassen auch hier wieder den "Grenzfall" $n = 1$ zu, d.h., dass eine Argumentform *gar keine* Prämissen hat. So eine Argumentform hätte also die Form $\therefore B$.

Beispielsweise ist die Zeichenfolge

- $\neg p, (p \wedge q) \therefore r$

eine Argumentform gemäß unserer Formelregeln 1, 2 und 3 sowie der Definition von Argumentformen.

## 4.4 Klammerersparnisregeln

Komplexe Formeln können rasch recht unübersichtlich werden, was zum Teil auf die Verwendung allzu vieler Klammern zurückzuführen ist, wie man etwa an folgendem Beispiel unschwer erkennen kann:

- $\neg(\neg\neg((\neg((p \vee \neg q) \wedge r) \vee s) \rightarrow t) \leftrightarrow (p_6 \vee \neg\neg p_7))$

Wir können jedoch sogenannte *Klammerersparnisregeln* einführen, mit deren Hilfe unsere Formeln wieder ein wenig besser lesbar werden. Wir dürfen jedoch nur dann Klammern weglassen, wenn es eindeutig festgelegt ist, wie wir die ursprüngliche (und eigentliche) Formel wiederherstellen können. Die Regeln, die wir im folgenden angeben werden, berücksichtigen dies.

Kommen wir also zur *Klammerersparnisregel 1*:

(KE1) Die äußersten Klammern einer Formel dürfen weggelassen werden.

Üblicherweise werden wir also etwa

- $p \wedge q$ statt $(p \wedge q)$,
- $r \vee (s \wedge t)$ statt $(r \vee (s \wedge t))$,
- $\neg p \rightarrow q$ statt $(\neg p \rightarrow q)$ und
- $(p \wedge r) \leftrightarrow q$ statt $((p \wedge r) \leftrightarrow q)$.

schreiben.

Die *Klammerersparnisregel 2* lautet:

(KE2) Die Junktoren $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.

Dies heißt, dass wir Klammern um Konjunktions- und Disjunktionsformeln weglassen dürfen, wenn diese Formeln unmittelbare Teilformeln einer Implikations- oder Äquivalenzformel sind. Wir schreiben also (unter gleichzeitiger Verwendung von (KE1))

- $p \rightarrow q \wedge r$ statt $(p \rightarrow (q \wedge r))$,
- $p \vee q \rightarrow r$ statt $((p \vee q) \rightarrow r)$,
- $q \vee \neg r \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ statt $((q \vee \neg r) \leftrightarrow (q \rightarrow p))$

Die Klammern, die im letzten Beispiel noch übrig sind, dürfen freilich *nicht* weggelassen werden, da sonst die eindeutige Lesbarkeit nicht mehr gewährleistet wäre.

Zum Vergleich: Wir dürfen nicht etwa

- $p \leftrightarrow \neg p \wedge (s \vee r)$ statt $(p \leftrightarrow \neg(p \wedge (s \vee r)))$

schreiben: Das Negationszeichen $\neg$, für das wir keine eigenen Klammern eingeführt haben, wird ja gemäß den syntaktischen Regeln für aussagenlogische Formeln immer so gelesen, dass es sich auf die unmittelbar folgende Formel bezieht; in $\neg p \wedge (s \vee r)$ ist aber die unmittelbar auf $\neg$ folgende Formel die Aussagenvariable $p$ und nicht etwa die Konjunktionsformel $(p \wedge (s \vee r))$. Wollte man $\neg$ auf $(p \wedge (s \vee r))$ beziehen, so müßte man unbedingt die äußeren Klammern in $(p \wedge (s \vee r))$ belassen, was aber in $p \leftrightarrow \neg p \wedge (s \vee r)$ nicht der Fall ist. Demnach kann $p \leftrightarrow \neg p \wedge (s \vee r)$ nicht kurz für $(p \leftrightarrow \neg(p \wedge (s \vee r)))$ stehen, sondern vielmehr für $(p \leftrightarrow (\neg p \wedge (s \vee r)))$.

(KE2) erinnert uns an den Mathematikunterricht, in dem wir gelernt haben: "Punktrechnung geht vor Strichrechung", d.h., das Multiplikationszeichen bindet stärker als das Additionszeichen. Auf diese Weise erhält man dann: $a \cdot b + c$ ist identisch mit $(a \cdot b) + c$ und nicht etwa mit $a \cdot (b + c)$.