

Kapitel 5

Die aussagenlogische Semantik

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir die erste Aufgabe, die wir uns in der Logik stellen, nämlich die logischen Formen natursprachlicher Ausdrücke aufzufinden, im (sehr einfachen) Rahmen der Aussagenlogik zu einem guten Ende gebracht. Wir sind nun in der Lage, die logische Struktur von Aussagesätzen zu klassifizieren, Aussagesätze und Argumente durch Formeln zu repräsentieren, und wir haben völlige Klarheit darüber erlangt, welche aussagenlogischen Formeln uns potentiell für diesen Prozess der Repräsentierung zur Verfügung stehen. Die Angabe der logischen Formen von Aussagesätzen und Argumenten ist deswegen so wichtig, weil wir damit die Mehrdeutigkeiten und Vagheiten der natürlichen Sprachen vermeiden, um sodann später definitiv sagen zu können, ob denn ein Aussagesatz oder ein Argument (bzw. dessen logische Formen) gewisse logisch relevante Eigenschaften hat oder in logisch relevanten Beziehungen zu anderen Aussagesätzen oder Argumenten steht. Wir können dann etwa exakt bestimmen, wie die Wahr- bzw. Falschheit eines komplexen Satzes von der Wahr- bzw. Falschheit seiner Teilsätze abhängt, was es bedeutet, dass ein Satz aus rein logischen Gründen wahr oder falsch ist, was es heißt, dass ein Satz aus einem anderen logisch folgt, was ein logisch gültiges Argument ist, etc. Um all diese logisch relevanten Eigenschaften und Beziehungen soll es nun in diesem Kapitel gehen.

5.1 Wahrheitstafeln

Eine Methode, um solche logischen Eigenschaften und Beziehungen von Formeln und Argumentformen feststellen zu können, ist die sogenannte Wahr-

heitstafelmethode. In Kapitel 2.2 haben wir bereits die Bedeutung unserer Junktoren anhand von Wahrheitstafeln kennengelernt. Davon ausgehend wollen wir uns nun im Detail der Frage zuwenden, wie die Wahrheitstafeln *beliebig komplexer* Formeln aussehen. Mit Hilfe dieser Wahrheitstafeln werden wir in der Lage sein anzugeben, unter welchen Bedingungen eine komplexe Formel wahr bzw. falsch ist bzw. wann eine Formel logisch wahr oder logisch falsch und wann ein Argument logisch gültig oder ungültig ist.

5.1.1 Wahrheitstafeln für Aussagesätze und Formeln

Wie sieht zum Beispiel die Wahrheitstafel für die komplexe Formel

$$\bullet p \vee q \rightarrow p \wedge q$$

aus? Zuerst suchen wir sämtliche Aussagenvariablen in der Formel, also in unserem Fall p und q . Dann schreiben wir diese Aussagenvariablen nebeneinander auf und fügen die zu bewertende Formel rechts hinzu. Wenn wir noch die entsprechenden Linien anbringen, dann sieht das Ergebnis dieser noch sehr unvollständigen Wahrheitstafel wie folgt aus:

p	q	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$

Da wir doch feststellen wollen, wie der Wahrheitswert einer komplexen Formel von den Wahrheitswerten der Teilformeln abhängt, müssen wir zuerst die “kleinsten” Teilformeln bewerten, nämlich die Aussagenvariablen. Dabei gibt es jedoch nicht nur eine, sondern mehrere Möglichkeiten der Bewertung, die sich dadurch ergeben, dass man die Wahrheitswerte w und f auf alle möglichen Weisen den in der Formel vorkommenden Aussagenvariablen zuordnet. Diese Wahrheitswertkombinationen kann man mit dem österreichischen Philosophen Ludwig Wittgenstein – der als einer der ersten die Wahrheitstafelmethode zwecks der logischen Analyse einführte – auch ‘Wahrheitsmöglichkeiten’ nennen.¹ Wenn wir also – wie in unserem Beispiel – zwei Aussagenvariablen p und q gegeben haben, dann haben wir die folgenden vier Möglichkeiten, die zwei Wahrheitswerte w und f auf die beiden Aussagenvariablen zu verteilen:

1. p wird mit w bewertet und q wird mit w bewertet.
2. p wird mit w bewertet und q wird mit f bewertet.

¹Vgl. [15].

3. p wird mit f bewertet und q wird mit w bewertet.
4. p wird mit f bewertet und q wird mit f bewertet.

Tragen wir nun jede dieser Möglichkeiten in die Zeilen unserer unvollständigen Wahrheitstafel unter p und q ein, dann erhalten wir:

p	q	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Nun können wir Schritt für Schritt jede Zeile vervollständigen, und dazu gehen wir wie folgt vor: Wir bewerten die Teilformeln der Gesamtformel “von innen nach außen”, d.h. zuerst werden die nach den Aussagenvariablen “nächstgrößeren” bewertet, dann wiederum die “nächstgrößeren”, bis wir bei der zu bewertenden Gesamtformel angekommen sind. Die nach den Aussagenvariablen “innersten” Formeln sind in unserem Fall $p \vee q$ sowie $p \wedge q$, da gemäß unseren Klammerersparnisregeln $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ ja nichts anderes ist als $((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$. Zunächst bewerten wir also die Teilformel $p \vee q$ gemäß der bereits bekannten Wahrheitstafel für die Disjunktionsformeln von S.46 und schreiben das Ergebnis dieser Bewertung unter den Junktoren von $p \vee q$, also das $\vee$:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$
w	w	w	w	
w	f	w	f	
f	w	w	f	
f	f	f	f	

Auf analoge Weise bewerten wir $p \wedge q$ unter Zuhilfenahme der Wahrheitstafel für die Konjunktionsformeln von S.44 und schreiben das Ergebnis unter den Junktoren $\wedge$:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$
w	w	w	w	
w	f	w	f	
f	w	w	f	
f	f	f	f	

Schließlich können wir die Wahrheitswerte der ganzen Implikationsformel $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ ergänzen, indem wir aus den Wahrheitswerten der beiden Teilformeln mit Hilfe der Wahrheitstafel für Implikationsformeln von S.50 die Wahrheitswerte für die Gesamtformel bestimmen:

p	q	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$		
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	w	f	f
f	f	f	w	f

Das Endergebnis dieser Bewertung mittels einer Wahrheitstafel ist nun die Spalte unter dem *Hauptjunktork* der Gesamtformel, im aktuellen Falle also die Spalte unter dem Implikationszeichen $\rightarrow$. Diese Spalte wollen wir auch als den ‘Wertverlauf’ dieser Formel bezeichnen. Der Hauptjunktork einer Formel ist der ‘äußerste’ Junktork der Formel; bei einer Negationsformel ist dies selbstverständlich ein $\neg$, bei einer Konjunktionsformel ein $\wedge$, bei einer Disjunktionsformel ein $\vee$, bei einer Implikationsformel ein $\rightarrow$ und bei einer Äquivalenzformel ein $\leftrightarrow$.

Um ein wenig mehr Übung zu bekommen, sehen wir uns gleich noch ein Beispiel an. Erstellen wir die Wahrheitstafel für die Formel $p \wedge (q \rightarrow \neg p)$:

p	q	$p \wedge (q \rightarrow \neg p)$		
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	w

Um diese Wahrheitstafel zu erhalten, bewerten wir zuerst die ‘innerste’ komplexe Formel, nämlich $\neg p$, gemäß unserer Wahrheitstafel für Negationsformeln von S.42. Dann können wir gemäß der Wahrheitstafel für Implikationsformeln die Formel $q \rightarrow \neg p$ bewerten, um schließlich die Gesamtformel gemäß der Wahrheitstafel für Konjunktionsformeln zu bewerten. Der Hauptjunktork dieser Formel ist nämlich das Konjunktionszeichen $\wedge$.

Die Formeln, für die wir bisher Wahrheitstafeln erstellt haben, haben nur zwei Aussagenvariablen enthalten. Wie sieht es jedoch etwa mit der Formel $p \rightarrow q \wedge \neg r$ aus, die drei Aussagenvariablen enthält? Hier gibt es freilich mehr Möglichkeiten, die Aussagenvariablen mit w und f zu bewerten. Denn jede Bewertungsmöglichkeit für p und q läßt sich auf zwei Arten zu einer Bewertungsmöglichkeit für p, q und r erweitern, je nach dem, ob man r mit w oder f bewertet. Wir erhalten insgesamt also doppelt so viele Bewertungsmöglichkeiten für drei Aussagevariablen und somit doppelt so viele Zeilen in der Wahrheitstafel:

p	q	r	$p \rightarrow q \wedge \neg r$		
w	w	w	f	f	f
w	w	f	w	w	w
w	f	w	f	f	f
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	f	f
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	f	f
f	f	f	w	f	w

Eine Wahrheitstafel für eine Formel mit vier Aussagenvariablen hätte demgemäß bereits 16 Zeilen, etc. Achtung: Bevor man eine Wahrheitstafel erstellt, sollte man sich ganz klar sein, für *welche* Formel man dies tut: Im obigen Beispiel erfolgt dies nicht etwa für die Formel $((p \rightarrow q) \wedge \neg r)$, sondern vielmehr für die Formel $(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$. Ansonsten wird man viel Arbeit umsonst leisten.

Noch eine Anmerkung: Die Reihenfolge, in der wir die verschiedenen Vorkommnisse von ‘ w ’ und ‘ f ’ links von dem senkrechten Strich in Zeilen angeordnet haben, ist keineswegs willkürlich. Man stelle sich vor, ‘ w ’ wäre wie ‘a’ und ‘ f ’ wäre wie ‘b’ im deutschen Alphabet. Dann würde man in einem Lexikon oder einem Telefonbuch ‘ www ’ vor ‘ wwf ’ einordnen, ‘ wwf ’ wiederum vor ‘ wfw ’ usw., genauso wie man etwaige Fachausdrücke oder Namen ‘ aaa ’ vor ‘ aab ’ einordnen würde, ‘ aab ’ wiederum vor ‘ aba ’ usw. Die obige Anordnung der Wahrheitswertreihen links vom senkrechten Strich nennt man daher auch *lexikographisch*.

Wir wollen nun nochmals zusammenfassen, wie man eine Wahrheitstafel für eine beliebige Formel A erstellt:

1. Man stelle fest, welche verschiedenen Aussagenvariablen in A vorkommen, und schreibe diese Aussagenvariablen in der Reihenfolge ihres Vorkommens im Alphabet in eine Reihe.
2. Daneben schreibe man die zu bewertende Formel an.
3. Handelt es sich um n verschiedene Aussagenvariablen, so gibt es 2^n verschiedene Möglichkeiten die Wahrheitswerte auf die Aussagenvariablen von A zu verteilen. Man schreibe also in 2^n Zeilen die möglichen Wahrheitswerte unter die Aussagevariablen, und zwar so, dass in der Spalte unter der ersten Aussagenvariable Folgen von ws und Folgen von fs alternieren, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2}$ hat, in der Spalte unter der zweiten Aussagenvariable wiederum Folgen von ws und Folgen von fs alternieren, wobei nun jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{4}$ hat, etc.; allgemein stehen in der Spalte unter der k -ten Aussagenvariable alternierend

Folgen von ws und Folgen von fs , wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2^k}$ besitzt.

4. Man berechne “von innen nach außen” die Wahrheitswerte für die Teilformeln von A und schließlich für die gesamte Formel A selbst. Unter dem Hauptjunktoren von A läßt sich die Bewertung von A ablesen.

Wir können die Wahrheitstafeln nun auf vielfältige Weise anwenden. Wenn wir z.B. wissen wollen, unter welchen Bedingungen ein Aussagesatz wahr oder falsch ist, d.h., wie “die Welt” beschaffen sein muss, dass er mit ihr übereinstimmt bzw. nicht übereinstimmt, dann bestimmen wir seine logische Form mittels Repräsentierung und erstellen sodann für diese logische Form die Wahrheitstafel. Betrachten wir etwa den folgenden Aussagesatz:

- Wenn Herbert Heidi heiratet oder Heidi Herbert heiratet, dann heiratet Herbert Heidi und Heidi heiratet auch Herbert.

Da wir nun schon geübt im Repräsentieren sind, haben wir seine logische Form schnell herausgefunden und erkennen, dass sie nichts anderes ist als die Formel in unserem ersten Beispiel für Wahrheitstafeln auf S.102:

- $p \vee q \rightarrow p \wedge q$

Gemäß der Wahrheitstafel dieser Formel auf S.104 ist diese Formel genau dann wahr, wenn p und q denselben Wahrheitswert haben – entweder beide wahr oder beide falsch. Für unseren Aussagesatz heißt dies nun nichts anderes als, dass er genau dann wahr ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Herbert heiratet Heidi und Heidi heiratet Herbert.
- Herbert heiratet Heidi nicht und Heidi heiratet Herbert nicht.

Dies läßt sich noch einfacher ausdrücken. Wie man nämlich bei einem Vergleich der Wahrheitstafel für unsere Formel mit der Wahrheitstafel für Äquivalenzformeln auf S.56 feststellt, stimmen diese in ihrem Wertverlauf völlig überein. Unsere Formel besagt also – von einem aussagenlogischen Standpunkt betrachtet – nichts anderes als:

- $p \leftrightarrow q$

Diese beiden Formeln haben also dieselbe aussagenlogische Bedeutung, auch wenn es sich dabei um zwei ganz unterschiedliche Formeln handelt – z.B kommt in der einen Formel das Äquivalenzzeichen $\leftrightarrow$ vor, in der anderen hingegen nicht. Unser Beispielsatz von oben sagt also (soweit unsere Zwecke betroffen sind) genau dasselbe aus wie:

- Herbert heiratet Heidi genau dann, wenn Heidi Herbert heiratet.

Die bisher in diesem Kapitel betrachteten Formeln haben allesamt die Eigenschaft, dass ihre Wertverläufe sowohl *ws* als auch *fs* enthalten, dass sie also unter gewissen Umständen wahr sind und unter anderen Umständen falsch. Dies stellt in gewissem Sinne den “Normalfall” dar. Denn, wenn wir beispielsweise eine Aussage über die Welt treffen, um Informationen festzuhalten bzw. zu übermitteln, dann hängt die Wahrheit bzw. Falschheit des Aussagesatzes doch von der Beschaffenheit unserer Welt ab. Sähe die Welt anders aus, so könnte der Aussagesatz ja auch einen anderen Wahrheitswert haben, also Sätze, die tatsächlich wahr sind, könnten falsch sein, und Sätze, die tatsächlich falsch sind, könnten wahr sein. Dies gilt sowohl für den Alltag als auch für die Wissenschaften. Selbst Naturgesetze könnten in einer anderen “logisch vorstellbaren” Welt falsch sein. Alle solchen Sätze bzw. deren logische Formen, werden in der Logik als ‘*kontingent*’ bezeichnet. Später, in Abschnitt 5.2, werden wir diesen Begriff der Kontingenz exakt festlegen.

Es gibt aber auch Aussagesätze, die unabhängig davon, wie die Welt beschaffen ist, “immer wahr” oder auch “immer falsch” sind. Solche Sätze sind also aus rein logischen Gründen wahr oder falsch. Sehen wir uns dazu das folgende Beispiel an:

- Heute ist Dienstag oder auch nicht.

Wenn wir diesen Satz in der Sprache der Aussagenlogik repräsentieren, dann erhalten wir:

- $p \vee \neg p$

Die Wahrheitstafel für diese Formel sieht dann wie folgt aus:

p	$p \vee \neg p$
w	$w \ f$
f	$w \ w$

Wie wir sehen, besteht der Wertverlauf dieser Formel aus lauter *ws*. Entsprechend ist der obige Aussagesatz unabhängig davon, ob heute Dienstag ist oder nicht, wahr. Sehen wir uns noch ein weiteres Beispiel ähnlicher Art an:

- Wenn es jetzt weder regnet noch schneit, dann ist es nicht so, dass es jetzt regnet oder schneit.

Die logische Form dieses Satzes ist:

- $\neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg(p \vee q)$

Das Antezedens des Implikationssatzes ist ein Satz der Form ‘Weder A noch B ’, und solche Sätze haben als logische Form $\neg A \wedge \neg B$, da ja durch das ‘weder ... noch’ die beiden Teilsätze A und B verneint werden. Und die entsprechende Wahrheitstafel sieht nun so aus:

p	q	$\neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg(p \vee q)$					
w	w	f	f	f	w	f	w
w	f	f	f	w	w	f	w
f	w	w	f	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w	f

Solche Sätze und ihre logischen Formen werden wir in Abschnitt 5.2 als *tautologisch* definieren. Tautologien sind in jeder “möglichen Welt” wahr, Tautologien bleiben sogar wahr, wenn man die Bedeutung sämtlicher in ihnen vorkommenden deskriptiven Zeichen variiert. Wenn etwa ‘regnen’ soviel wie ‘hageln’ bedeuten würde, und ‘schneien’ soviel wie ‘stürmen’, dann würde unser letzter Beispielsatz soviel besagen wie

- Wenn es jetzt weder hagelt noch stürmt, dann ist es nicht so, dass es jetzt hagelt oder stürmt

und wäre selbstverständlich wiederum wahr, ja sogar tautologisch. Tautologien sind daher die *logischen Gesetze* der Aussagenlogik, ihre Wahrheit rührt allein daher, wie wir die Bedeutung der logischen Zeichen festgelegt haben. Während beispielsweise Physiker die Gesetze zu entdecken trachten, die in *unserer* (tatsächlichen oder aktuellen) Welt wahr sind, beschäftigen sich Logiker mit Gesetzen, die nicht nur in unserer Welt wahr sind, sondern aus rein logischen Gründen wahr sein *müssen* – in allen *logisch möglichen* Welten wahr sind.

Wir haben oben schon erwähnt, dass es auch Sätze gibt, die “immer falsch” sind. Sehen wir uns auch dazu Beispiele an:

- Die Zahl 3 ist weder gerade noch ungerade.

Die aussagenlogische Form dieses Aussagesatzes ist:

- $\neg p \wedge \neg \neg p$

Die Aussagenvariable p steht in diesem Fall für den Teilsatz ‘Die Zahl 3 ist gerade’. Der zweite Teilsatz ‘Die Zahl 3 ist ungerade’ ist nichts anderes als die Negation des ersten Teilsatzes und hat daher die logische Form $\neg p$. Die Wahrheitstafel für diese Formel sieht nun so aus:

p	$\neg p \wedge \neg \neg p$
w	$f \quad f \quad wf$
f	$w \quad f \quad fw$

Wie wir sehen, enthält der Wertverlauf dieser Formel ausschließlich fs . D.h., unser Ausgangssatz ist falsch, unabhängig davon ob die Zahl drei gerade oder ungerade ist.

Betrachten wir gleich noch ein Beispiel von dieser Art:

- Weder schneit es jetzt, noch regnet es, aber es schneit oder regnet.

Dieser Satz wird nun repräsentiert als:

- $(\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)$

Wenn wir die Wahrheitstafel dafür erstellen, erhalten wir:

p	q	$(\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)$
w	w	$f \quad f \quad f \quad f \quad w$
w	f	$f \quad f \quad w \quad f \quad w$
f	w	$w \quad f \quad f \quad f \quad w$
f	f	$w \quad w \quad w \quad f \quad f$

Es ist freilich nicht verwunderlich, dass der Wertverlauf unseres Ausgangssatzes lauter fs enthält, da man bei näherer Betrachtung erkennt, dass er nichts anderes ausdrückt als die Verneinung unseres früheren Beispielsatzes

- Wenn es jetzt weder regnet noch schneit, dann ist es nicht so, dass es jetzt regnet oder schneit.

Wenn letzterer “immer wahr” ist, wie wir ja schon festgestellt haben, muss ersterer zwangsläufig “immer falsch” sein.

Sätze und deren logische Formen, die einen Wertverlauf mit lauter fs aufweisen, werden wir in Abschnitt 5.2 als *kontradiktorisch* definieren. Es ist deshalb so wichtig, dass wir wissen, welche Sätze Kontradiktionen sind, da wir es tunlichst vermeiden sollten, in der Wissenschaft und in der Philosophie (aber natürlich auch im Alltag), Kontradiktionen zu behaupten. Wissenschaftliche oder philosophische Theorien, die Kontradiktionen enthalten, sind in jedem Fall zu verwerfen, da sie eben Sätze enthalten, die in jedem Fall falsch sein müssen, ganz unabhängig davon, wie die Welt beschaffen ist. Man sollte deshalb niemals solche Widersprüche behaupten bzw. Theorien aufstellen, die Widersprüche enthalten.

5.1.2 Wahrheitstafeln für Argumente und Argumentformen

Auf Seite 87 haben wir das Argument (Arg.3) repräsentiert und dabei folgende Argumentform erhalten:

$$p \vee q, \neg p \therefore q$$

Von einem Argument bzw. einer Argumentform zu sagen, es bzw. sie wäre wahr oder falsch, ist völlig unsinnig, denn es handelt sich dabei ja nicht um Aussagesätze bzw. mit w oder f bewertbare Formeln. Freilich sind die Prämissen und die Konklusion eines Arguments bzw. einer Argumentform wahr oder falsch in diesem Sinne (gegeben die Aussagenvariablen in einer Argumentform sind bereits bewertet worden). Argumente bzw. Argumentformen hingegen sind *logisch gültig* oder *logisch ungültig*: Gültig sind sie, wenn die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion logisch zwingend nach sich zieht, und ungültig sonst. Für unser Beispiel heißt dies, dass die Argumentform $p \vee q, \neg p \therefore q$ genau dann gültig ist, wenn Folgendes der Fall ist: Wann immer $p \vee q$ und $\neg p$ wahr sind, ist auch q wahr. Mit Hilfe einer Wahrheitstafel können wir nun überprüfen, ob dies in unserem Beispiel der Fall ist. In einer solchen Wahrheitstafel kommt neben den in der Argumentform vorkommenden Aussagenvariablen im allgemeinen nicht nur *eine* weitere Formel vor, sondern sämtliche Prämissen und die Konklusion. Wir schreiben also neben die Aussagenvariablen zuerst alle Prämissen und sodann die Konklusion. Wir haben es demnach mit einer Wahrheitstafel zu tun, die gleich mehrere Formeln auf einmal bewertet:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	q
w	w	w	f	w
w	f	w	f	f
f	w	w	w	w
f	f	f	w	f

Wir sehen, dass es in dieser Wahrheitstafel keine einzige Zeile gibt, in der sämtliche Prämissen mit w bewertet werden, die Konklusion jedoch mit f . Die einzige Zeile, in der beide Prämissen wahr sind, ist nämlich die dritte, und in dieser wird die Konklusion q ebenfalls mit w bewertet. Daher ist unsere Argumentform (sowie auch das durch sie repräsentierte Argument) aussagenlogisch gültig. Wenn ein Argument aussagenlogisch gültig ist, dann bedingt die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion, unabhängig davon, wie die Welt beschaffen ist, und unabhängig davon, wie die deskriptiven Zeichen, die im Argument vorkommen, interpretiert werden. Wenn etwa ‘der Papst’ soviel wie ‘Heidi’ bedeuten würde, ‘kommen nach’ soviel wie ‘heiraten’, ‘Som-

mer’ soviel wie ‘Winter’, ‘Wien’ soviel wie ‘Hubert’ und ‘Salzburg’ soviel wie ‘Herbert’, dann würde (Arg. 3) von Seite 65 soviel besagen wie

Heidi heiratet nächsten Winter Hubert oder Herbert.

Heidi heiratet aber nächsten Winter Hubert nicht.

Daher: Heidi heiratet nächsten Winter Herbert.

Und dieses Argument ist natürlich immer noch logisch gültig. Man erkennt daran, dass für die logische Gültigkeit bzw. Ungültigkeit eines Argumenten ausschließlich die logische *Form* des Argumentes eine Rolle spielt, nicht wie die “Leerstellen” dieser Form – die Aussagenvariablen – “gefüllt” oder interpretiert werden.

Wir können uns aber auch auf eine andere Art und Weise davon überzeugen, dass eine Argumentform gültig ist, indem wir nämlich sämtliche Zeilen betrachten, in denen die Konklusion mit f bewertet wird. Wenn in all diesen Zeilen auch mindestens eine Prämisse mit f bewertet wird, so ist die Argumentform gültig, sonst ungültig. Denn dann ist es wiederum so, dass die gemeinsame Wahrheit der Prämissen nicht mit der Falschheit der Konklusion einhergehen kann.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

Wenn der Gärtner der Mörder ist, dann liegt Erde am Tatort.

Es liegt Erde am Tatort.

Also ist der Gärtner der Mörder.

Wie leicht ersichtlich ist, ist die logische Form dieses Argumentes:

- $p \rightarrow q, q \therefore p$

Die Wahrheitstafel dieser Argumentform sieht dann wie folgt aus:

p	q	$p \rightarrow q$	q	p
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

In der dritten Zeile dieser Wahrheitstafel wird den Prämissen der Wert w zugeordnet, der Konklusion hingegen der Wert f . Es gibt also mindestens eine Zeile, in der alle Prämissen wahr, die Konklusion jedoch falsch ist. Diese Argumentform und somit auch das obige Argument sind also aussagenlogisch ungültig. Auch wenn das Argument auf den ersten Blick gültig zu sein scheint und dies auch im Alltag oft unterstellt wird, sagt uns nun die aussagenlogische Analyse, dass es doch nicht in jedem Falle von wahren Prämissen zu einer wahren Konklusion führt. Denn es wäre ja durchaus möglich, dass die Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist, d.h. es liegt tatsächlich Erde am Tatort, aber der Gärtner ist doch nicht der Mörder. In diesem Falle ist auch die erste Prämisse wahr, da ja deren Antezedens falsch ist und zudem auch noch deren Konsequens wahr ist. Auch wenn ein Argument dieser Form in vielen Fällen von wahren Prämissen zu einer wahren Konklusion führen mag, so gibt es doch offensichtlich Ausnahmen, und alleine diese reichen hin, um das Argument und dessen logische Form als *logisch* ungültig auszuweisen. Logiker haben daher spaßhalber obiger beliebter ungültiger Argumentform einen eigenen Namen gegeben, nämlich ‘*Modus moron*’.

Sehen wir uns noch ein Beispiel an:

Wenn Herbert die Metaphysikprüfung besteht, so veranstaltet er, falls Heidi nicht bei der Ethikprüfung durchfällt, eine Party.

Heidi fällt aber bei der Ethikprüfung keinesfalls durch, und Herbert besteht die Metaphysikprüfung.

Also veranstaltet Herbert eine Party.

Die Form dieses Arguments ist:

- $p \rightarrow (\neg q \rightarrow r), \neg q \wedge p \therefore r$

Mittlerweile können wir selbst Wahrheitstafeln für solch etwas komplexere Argumentformen leicht erstellen:

p	q	r	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$	$\neg q \wedge p$	r
w	w	w	w	f	w
w	w	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	w	f	w
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	f	w
f	f	f	w	f	f

In dieser Wahrheitstafel gibt es genau eine Zeile, nämlich die dritte, in der sämtliche Prämissen wahr sind; in dieser Zeile ist aber auch die Konklusion wahr. Daher ist die Argumentform logisch gültig. Freilich haben nicht alle Wahrheitstafeln von gültigen Argumentformen immer nur *eine* Zeile, in der alle Prämissen wahr sind. Oftmals gibt es auch mehrere, wie man an dem folgenden simplen Beispiel sehen kann: Die Wahrheitstafel für die Argumentform

$$\bullet p \therefore p \vee q$$

ist nämlich:

p	q	p	$p \vee q$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Und die Argumentform ist daher wiederum gültig, wie man an den ersten beiden Zeilen der Wahrheitstafel unschwer feststellen kann.

Der Begriff der Gültigkeit von Argumenten und deren Formen, den wir in 5.2 genau festlegen werden, ist deshalb so wichtig, weil Wissenschaftler im allgemeinen ihre Behauptungen durch Argumente zu stützen versuchen, und dieser Versuch oftmals nur dann erfolgreich ist, wenn diese Argumente auch logisch gültig sind. Übrigens wird dieses Prinzip in der sogenannten “induktiven Logik” insofern “aufgeweicht”, als dort eine Argumentation unter Umständen auch dann als erfolgreich angesehen wird, wenn sie zwar nicht logisch gültig ist, aber die Prämissen der Konklusion immerhin eine hohe Wahrscheinlichkeit verleihen. Diese induktive Logik soll uns in diesem Buch aber nicht weiter beschäftigen, da sie nicht zur “klassischen” *deduktiven* Logik gehört. Die klassische Logik, die im Zentrum unserer Betrachtungen steht, stellt aber auch die Grundlage dar, auf der dann in der induktiven Logik weitergearbeitet wird.²

²Für eine Einführung in die Induktive Logik siehe [11].

5.2 Eine formale Semantik für die Aussagenlogik

Die Wahrheitstafelmethode liefert uns ein berechenbares Entscheidungsverfahren, das es uns erlaubt, gewisse Eigenschaften von aussagenlogischen Formeln – wie die der Tautologizität – sowie gewisse Eigenschaften von Argumentformen – wie die der logischen Gültigkeit – für vorgegebene Formeln bzw. Argumentformen zu entscheiden. Die zugrundeliegenden semantischen Begriffe des Tautologischseins oder der logischen Gültigkeit sind dabei jedoch noch nicht ausreichend präzise von uns erfasst worden. Wir wollen nun die semantischen Intuitionen, die wir bisher informell durch Bezugnahme auf Spalten oder Zeilen der Wahrheitstafeln ausgedrückt haben, in exakte Definitionen gießen. Dazu ist es nötig, sich formaler Ausdrucksweisen in der *Metasprache* zu bedienen: Wie bereits erklärt, ist die Metasprache in unserem Falle diejenige Sprache, in der wir über die Sprache der Aussagenlogik – unsere Objektsprache – sprechen. Bei dieser Metasprache handelt es sich um die deutsche Sprache, angereichert durch einige Ausdrücke der Mathematik. Zuerst möchten wir metasprachlich präzisieren, was es heißt, einem deskriptiven Zeichen einen semantischen Wert zuzuordnen (weshalb wir es hier auch mit *Semantik* zu tun haben). Für die Aussagenlogik bedeutet dies, jeder Aussagenvariable einen Wahrheitswert zuzuweisen. Anschließend möchten wir zeigen, wie wir aufgrund der von uns festgelegten Bedeutung der logischen Zeichen auf Basis der Bewertungen der Aussagenvariablen *jeder* Formel der aussagenlogischen Sprache ebenfalls einen Wahrheitswert zuordnen können. Schließlich können wir auf dieser Basis die logischen Eigenschaften und Beziehungen der aussagenlogischen Semantik genauso exakt definieren, wie Begriffe in der Mathematik definiert werden.

5.2.1 Aussagenlogische Interpretationen

Wir wollen nun also *jeder* Aussagenvariable *genau einen* Wahrheitswert zuordnen, so wie wir das informell in den Wahrheitstafeln bereits getan haben. Genauer gesagt konnten wir jede Zeile der Wahrheitstafel für eine Formel A nur relativ zu einer Zuordnung der Wahrheitswerte w oder f zu den in A vorkommenden Aussagenvariablen bestimmen. In der Mathematik nennt man eine solche Zuordnung, die *jedem* Element eines gegebenen “Definitionsbereichs” *genau ein* Element eines gegebenen “Wertebereichs” zuweist, eine *Funktion*. Zur vollständigen Angabe einer Funktion gehört also die Festlegung des Definitionsbereichs – das ist die Menge der sogenannten Argumente der Funktion –, des Wertebereichs – das ist die Menge derjenigen Dinge, die der Funktion als Werte dienen können – sowie die Festlegung einer Zuordnungsregel, die uns sagt, welcher Wert welchem Argument zugeordnet wird. Übrigens wird in

der sogenannten Mengentheorie dieser Funktionsbegriff noch um einiges exakter und abstrakter entwickelt. Wir werden zwar in Zukunft immer wieder ein wenig Mengentheorie anwenden, doch nur so weit dies für unsere Zwecke erforderlich ist und ohne die Mengentheorie systematisch aufzubauen – dies ist ja ein Skript über die klassische Logik und nicht über die Mengentheorie.³ Wenn man ausdrücken will, dass f eine Funktion vom Definitionsbereich X in den Wertebereich Y ist, schreibt man das oft wie folgt an:

$$f : X \rightarrow Y$$

Eine aussagenlogische Interpretation hat nun als Definitionsbereich die Menge

$$\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$$

der Aussagenvariablen und als Wertebereich die Menge $\{w, f\}$ der Wahrheitswerte. Wir können also festlegen:

Eine *aussagenlogische Interpretation* ist eine Funktion $\mathfrak{I}$, sodass:

$$\mathfrak{I} : \{p_1, p_2, p_3, \dots\} \rightarrow \{w, f\}$$

Damit wird lediglich ausgedrückt, dass eine aussagenlogische Interpretation $\mathfrak{I}$ jeder Aussagenvariable einen eindeutig bestimmten Wahrheitswert zuordnet. Zum Beispiel könnte $\mathfrak{I}(p_1) = w$ sein, $\mathfrak{I}(p_2) = f$, $\mathfrak{I}(p_3) = f$, $\mathfrak{I}(p_4) = w$ und so weiter. Eine aussagenlogische Interpretation nimmt in der Tat zugleich *unendlich* viele Zuordnungen vor, da es ja unendlich viele Aussagenvariablen gibt, die durch eine solche Interpretationsfunktion einen Wahrheitswert erhalten. Dass eine aussagenlogische Interpretation $\mathfrak{I}$ eine *Funktion* ist, schließt aus, dass ein und dieselbe Aussagenvariable zugleich mehr als einen Wert unter ein und derselben Interpretation $\mathfrak{I}$ aufweist. Aber selbstverständlich dürfen durch $\mathfrak{I}$ verschiedene Aussagenvariablen zugleich denselben Wert zugewiesen bekommen: Zum Beispiel heißt, dass $\mathfrak{I}(p_1) = w$ und $\mathfrak{I}(p_4) = w$ der Fall sind, dass sowohl p_1 als auch p_4 (wie eventuell auch noch weitere Aussagevariablen) denselben Wahrheitswert w durch $\mathfrak{I}$ zugeordnet bekommen.

Intuitiv entsprechen aussagenlogische Interpretationen den Zeilen einer Wahrheitstafel, wenn man sich in den Wahrheitstafeln nur auf die Zuordnungen von Wahrheitswerten zu den Aussagenvariablen konzentriert, und man außerdem ignoriert, dass in einer Wahrheitstafel immer nur endlich viele Aussagenvariablen bewertet werden, während ja eine aussagenlogische Interpretation zugleich alle (unendlichen vielen) Aussagenvariablen mit einem Wahrheitswert versieht.

³Eine gute systematische Einführung in die Mengentheorie bietet etwa [14].

5.2.2 Aussagenlogische Bewertungen

Die Wahrheitstafeln haben uns bereits gezeigt, dass wir beliebige aussagenlogische Formeln auf eine eindeutige Art und Weise bewerten können, wenn wir alle Aussagenvariablen, die in der Formel vorkommen, bereits mit Wahrheitswerten interpretiert haben. Dies spiegelt sich nun in unserer formalen Semantik insofern wider, als wir zu jeder aussagenlogischen Interpretation $\mathfrak{I}$ – die, wie gesagt, die Bewertung der *Aussagenvariablen* in der Wahrheitstafel wiedergibt – auf eindeutige Art und Weise eine aussagenlogische Bewertung $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ angeben können, die wiederum jeder *beliebigen Formel* aus $\mathcal{F}$ genau einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet. Der Definitionsbereich einer Bewertung ist also nun die *gesamte* Formelmengen $\mathcal{F}$, und der Wertebereich ist abermals die Menge $\{w, f\}$. Der Index ‘ $\mathfrak{I}$ ’ in ‘ $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ ’ wird andeuten, dass die Bewertung $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ nur relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$ gegeben ist, und dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ nach Angabe von $\mathfrak{I}$ eindeutig bestimmt ist (wie sich leicht beweisen lässt). Wir definieren also:

Eine *aussagenlogische Bewertung* (relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$) ist eine Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathcal{F} \rightarrow \{w, f\}$, sodass gilt:

1. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p_i) = w$ gdw $\mathfrak{I}(p_i) = w$,
2. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = f$,
3. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \wedge B)) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = w$ und $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = w$,
4. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \vee B)) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = w$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = w$,
5. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \rightarrow B)) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = f$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = w$,
6. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \leftrightarrow B)) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B)$.

Die Klauseln 1–6 werden auch ‘semantische Regeln’ genannt. Regel 1 besagt, dass die Aussagenvariablen durch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ genauso bewertet werden, wie es durch die Interpretation $\mathfrak{I}$ vorgegeben ist. In den Regeln 2 bis 6 werden die komplexen aussagenlogisch zerlegbaren Formeln auf genau dieselbe Weise bewertet, wie wir dies in den Wahrheitstafeln für die aussagenlogischen Junktoren erklärt haben.

Sehen wir uns dazu gleich ein Beispiel an: Wenn wir den Wahrheitswert von

$$\bullet \quad p \rightarrow q \wedge \neg r$$

feststellen wollen, so müssen wir immer eine bestimmte Interpretation $\mathfrak{I}$ gegeben haben – welche wir freilich willkürlich aussuchen dürfen; hätten wir keine solche Interpretation gegeben, so würde es überhaupt keinen Sinn machen, von *dem* Wahrheitswert der Formel zu sprechen. Sei $\mathfrak{I}$ nun eine Interpretation, für die Folgendes gilt:

- $\mathfrak{I}(p) = w, \mathfrak{I}(q) = w, \mathfrak{I}(r) = f$.

Damit ist aber unsere Interpretation $\mathfrak{I}$ eigentlich noch nicht vollständig festgelegt, denn wir müßten ja auch all die anderen unendlich vielen Aussagenvariablen interpretieren. Für unsere Zwecke reicht diese endliche Festlegung aber völlig aus, da ja die Bewertung von $p \rightarrow q \wedge \neg r$ nur von der Interpretation von p, q und r abhängt – der Wahrheitswert der anderen Aussagenvariablen ist für die Bewertung der uns interessierenden Formel irrelevant. Da wir uns nun für *eine* Interpretation entschieden haben, ist auch der Wahrheitswert der Gesamtformel *eindeutig* bestimmt: Da $\mathfrak{I}(r) = f$, ist es natürlich der Fall, dass

- $\mathfrak{I}(r) \neq w$.

Somit gilt gemäß Klausel 1 unserer Bewertungsdefinition, dass

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(r) \neq w$.

Da aber $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ nach Definition eine Funktion ist, die nur die Werte w und f annehmen kann, heißt die letzte Zeile nichts anderes als

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(r) = f$.

Und somit gilt gemäß Klausel 2:

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg r) = w$.

Da außerdem $\mathfrak{I}(q) = w$, ist gemäß Klausel 1 auch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(q) = w$ der Fall, und somit dürfen wir aufgrund von Klausel 3 behaupten:

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(q \wedge \neg r) = w$.

(Wir haben dabei wieder eine Klammerersparnisregel angewandt.)

So wie bei q ergibt sich auch, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p) = w$. Wir haben nun die Wahrheitswerte des Antezedens und des Konsequens unserer Implikationsformel ermittelt, und gemäß Klausel 5 gilt:

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p \rightarrow q \wedge \neg r) = w$.

Dies entspricht der zweiten Zeile in der Wahrheitstafel dieser Formel, welche wir auf S.105 erstellt haben.

Hätten wir aber beispielsweise festgelegt, dass

- $\mathfrak{I}(p) = w, \mathfrak{I}(q) = w, \mathfrak{I}(r) = w$,

dann wäre die Bewertung unserer Formel wie folgt ausgefallen:

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{J}}(p \rightarrow q \wedge \neg r) = f$.

Und dies entspräche dann der ersten Zeile unserer damaligen Wahrheitstafel.

Unsere Definition von $\mathfrak{W}_{\mathfrak{J}}$ gibt also in formaler Sprechweise wieder, wie wir intuitiv gelernt haben, unsere Wahrheitstafeln anzufertigen. Streng genommen stellt sich die Situation aber eigentlich umgekehrt dar: Die Wahrheitstafeln stellen eine einfache Methode dar, um die Werte von $\mathfrak{W}_{\mathfrak{J}}$ für beliebige Interpretationen $\mathfrak{J}$ ermitteln zu können; die Wahrheitstafeln geben also wieder, was in der Definition exakt erfasst ist. Didaktisch sind die Wahrheitstafeln der Definition von $\mathfrak{W}_{\mathfrak{J}}$ zwar vorrangig, in logischer oder systematischer Hinsicht jedoch ist es gerade umgekehrt.

Noch eine (hoffentlich!) philosophisch interessante Anmerkung zu den obigen semantischen Regeln: Wie man unschwer erkennen kann, verwenden wir z.B. zur Angabe der semantischen Regel 3. für Konjunktionsformeln auf der rechten Seite von 3. den sprachlichen Ausdruck ‘und’. Das heißt: Wir verwenden *aussagenlogische Verknüpfungen*, um die semantischen Regeln für *aussagenlogische Verknüpfungen* anzugeben. Ist das nicht zirkulär? Nein: Denn die jeweiligen Verknüpfungen gehören verschiedenen Sprachen an. So verwenden wir das metasprachliche (deutsche) ‘und’, um die semantische Regel für das objektsprachliche (aussagenlogische) $\wedge$ festzulegen. Und wenn wir die Semantik eines Zeichen einer künstlich von uns “geschaffenen” Sprache angeben wollen, ist es auch ganz unvermeidlich, dies auf Basis unseres Vorverständnisses der natürlichen Sprache zu tun: Wie sollten wir denn sonst die Bedeutung von $\wedge$ erklären, als mit Hilfe (in unserem Falle) der deutschen Sprache?

Wie bei allen anderen Büchern in allen anderen Wissenschaftsgebieten sind auch wir gezwungen, beim Leser ein solches Vorverständnis einer natürlichen Sprache vorauszusetzen, bevor wir die von uns angestrebte Theorie (bei uns die Theorie der Logik) entwickeln können. Auf dieses Vorverständnis von ‘und’ bauen wir, wenn wir eine semantische Regel wie 3. formulieren. Analoges gilt für die anderen semantischen Regeln. Sobald sich beim Leser nach dem genauen Durcharbeiten dieses Buches ein Verständnis für $\wedge$ und für die anderen Zeichen unserer logischen Kunstsprachen eingestellt hat, dürfen wir dann auch diese “Leiter” des natursprachlichen Vorverständnisses – jedenfalls für diesen Zweck – zur Seite stellen (ein Wittgensteinsches Bild). Es ist auch gar nicht problematisch, wenn das Studium z.B. des $\wedge$ auf des Lesers Verständnis des natursprachlichen ‘und’ sozusagen “zurückwirkt”. Im Gegenteil: Dies ist sogar intendiert. Denn obwohl die Bedeutung von $\wedge$ zunächst auf Basis eines mehr oder weniger vagen Vorverständnisses von ‘und’ festgelegt wurde, kann dennoch aus der Einbettung dieses intuitiven Vorverständnisses in eine größere, explizitere und in vielen Teilen mathematisch präzise Theorie auch

ein schärferes Verständnis von ‘und’ resultieren. Dies ist letztlich genau das, was wir durch das logische Repräsentieren von z.B. ‘und’ durch $\wedge$ erreichen wollen.

5.2.3 Kontingente, tautologische und kontradiktorische Formeln

Entsprechend können wir nun unsere im Kapitel 5.1 informell eingeführten Begriffe ‘kontingent’, ‘tautologisch’ und ‘kontradiktorisch’ mit Hilfe des Begriffs der Bewertung exakt definieren:

- Eine Formel A aus $\mathcal{F}$ ist *kontingent* gdw
 1. es mindestens eine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, so dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = w$, und
 2. es mindestens eine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, so dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = f$.

Eine Formel A ist also kontingent, wenn A bei mindestens einer Verteilung von Wahrheitswerten auf die in A vorkommenden Aussagenvariablen den Wert w erhält und bei mindestens einer Verteilung von Wahrheitswerten auf die in A vorkommenden Aussagenvariablen den Wert f erhält; wenn es also in der zu A gehörigen Wahrheitstafel eine Zeile gibt, in der w unter dem Hauptjunktoren von A steht, und es auch eine Zeile gibt, in der f unter dem Hauptjunktoren von A steht. Weiters:

- Eine Formel A aus $\mathcal{F}$ ist *tautologisch* gdw

für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = w$.

Eine Formel A ist also tautologisch, wenn A bei jeder Verteilung der Wahrheitswerte auf die in A vorkommenden Aussagenvariablen den Wert w erhält, wenn also die Wahrheitstafel von A in der Spalte unter dem Hauptjunktoren von A nur w s aufweist. Schließlich:

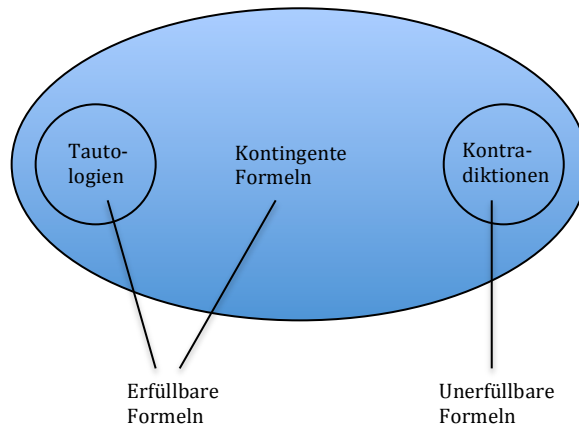
- Eine Formel A aus $\mathcal{F}$ ist *kontradiktorisch* gdw

für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = f$.

Eine Formel A ist also kontradiktorisch, wenn A bei jeder Verteilung der Wahrheitswerte auf die in A vorkommenden Aussagenvariablen den Wert f erhält, wenn also die Wahrheitstafel von A in der Spalte unter dem Hauptjunktoren von A nur f s aufweist.

Wir wollen diejenigen Formeln, für die überhaupt die “Möglichkeit” existiert, wahr zu sein, d.h. die kontingenten und tautologischen Formeln, ‘*aussagenlogisch erfüllbar*’ nennen; alle anderen Formeln, die aus logischen Gründen

falsch sein “müssen”, d.h. die kontradiktorischen Formeln, nennen wir ‘*aussagenlogisch unerfüllbar*’. Wir können uns dies wie folgt veranschaulichen:



Wir haben oben gesagt, dass die Tautologien für den (Aussagen-)Logiker das sind, was die Naturgesetze für den Physiker sind, nämlich die allgemeinen Gesetze seines Wissenschaftsgebiets – Tautologien sind die (*aussagen-*)*logischen Gesetze*.

Um einen besseren Überblick über die verschiedenen Tautologien zu bekommen, ist es nützlich festzustellen, welche Tautologien syntaktisch gleich aufgebaut sind und welche nicht. Beispielsweise haben ja die folgenden Tautologien dieselbe syntaktische Struktur:

- $p \vee \neg p$
- $q \vee \neg q$
- $(p \rightarrow q \wedge r) \vee \neg(p \rightarrow q \wedge r)$

Anders ausgedrückt: Für jede *beliebige* Formel A ist

- $A \vee \neg A$

eine Tautologie. Das heißt, dass wir für die Metavariablen ‘ A ’ in diesem *Schema* irgendeine Formel einsetzen können und in jedem Fall werden wir dabei eine Tautologie erhalten. Wir können also durch die Angabe eines Schemas wie $A \vee \neg A$ mit einem Streich unendlich viele Tautologien erfassen.

Wir geben nun eine Liste wichtiger Tautologienschemata der Aussagenlogik an, wobei ‘ A ’, ‘ B ’, ‘ C ’ Metavariablen für aussagenlogische Formeln sind:⁴

⁴Manche dieser Tautologienschemata sind ungültig in sogenannten “nicht-klassischen” Logiken; z.B. sind nicht alle Instanzen von $A \vee \neg A$ logisch wahr in der *intuitionistischen*

- T1 $A \vee \neg A$ (*Tertium non datur*, “Satz” vom ausgeschlossenen Dritten)
- T2 $\neg(A \wedge \neg A)$ (“Satz” vom ausgeschlossenen Widerspruch)
- T3 $A \rightarrow A$ (Reflexivität der materialen Implikation)
- T4 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Paradoxie der materialen Implikation)
- T5 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (Noch eine Paradoxie der materialen Implikation)
- T6 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ (Antezedensvertauschung)
- T7 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ (Importation/Exportation)
- T8 $A \wedge \neg A \rightarrow B$ (*Ex falso quodlibet*, *Ex contradictione quodlibet*)
- T9 $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ (*Reductio ad absurdum*)
- T10 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (“Dreierschluß”)
- T11 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (“Kettenschluß”)
- T12 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$
- T13 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$
- T14 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C))$
- T15 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C))$
- T16 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (Peircesche Gesetz)
- T17 $A \wedge (B \vee \neg B) \leftrightarrow A$
- T18 $A \vee (B \wedge \neg B) \leftrightarrow A$
- T19 $A \leftrightarrow \neg\neg A$ (Doppelte Negation)
- T20 $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ (Kommutativität der Konjunktion)
- T21 $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ (Kommutativität der Disjunktion)
- T22 $A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ (Assoziativität der Konjunktion)
- T23 $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ (Assoziativität der Disjunktion)
- T24 $A \leftrightarrow A \wedge A$ (Idempotenz der Konjunktion)
- T25 $A \leftrightarrow A \vee A$ (Idempotenz der Disjunktion)
- T26 $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributivgesetz 1)
- T27 $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributivgesetz 2)
- T28 $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (Kontrapositionsgesetz)
- T29 $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (De Morgansches Gesetz 1)
- T30 $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (De Morgansches Gesetz 2)
- T31 $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$ (“Definition” der materialen Implikation)
- T32 $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (Noch eine “Definition” der materialen Implikation)
- T33 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (“Definition” der materialen Äquivalenz)
- T34 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Noch eine “Definition” der materialen Äquivalenz)
- T35 $\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow B)$

Aussagenlogik. Siehe [8].

5.2.4 Logische Folge und logische Äquivalenz

Wie wir früher schon bemerkt haben, gibt es neben den logischen Eigenschaften von Sätzen und Formeln eine ganz fundamentale logische Beziehung zwischen Sätzen bzw. Formeln, nämlich die der *logischen Folge* bzw. *logischen Implikation*. Wir möchten in unserer aussagenlogischen Semantik nun genau festlegen, was es denn heißt, dass eine Formel B aus einer Formel A *logisch folgt* bzw. (was gleichbedeutend ist), dass die Formel A die Formel B *logisch impliziert*. Wir meinen damit, dass die Wahrheit von B mit der Wahrheit von A nicht “rein zufällig” verknüpft ist, sondern mit logischer Notwendigkeit: Wenn A wahr ist, so *muss* B wahr sein; oder anders ausgedrückt: Wenn A wahr ist, so *kann* B *nicht* falsch sein. Wir können diese Intuition in unserer aussagenlogischen Semantik wie folgt exakt fassen:

- Für alle Formeln A und B aus $\mathcal{F}$ gilt: A *impliziert (aussagen-)logisch* B (bzw. B *folgt logisch aus* A) genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$\text{Wenn } \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}(A) = w, \text{ dann } \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}(B) = w.$$

Eine dazu äquivalente Formulierung ist die folgende:

- Für alle Formeln A und B aus $\mathcal{F}$ gilt: A impliziert (aussagen-)logisch B (bzw. B folgt logisch aus A) genau dann, wenn es keine Interpretation $\mathcal{I}$ gibt, sodass gilt:

$$\mathfrak{W}_{\mathcal{I}}(A) = w \text{ und } \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}(B) = f.$$

Üblicherweise wird ‘impliziert logisch’ (bzw. ‘folgt logisch aus’) mit dem Symbol ‘ $\models$ ’ abgekürzt, so dass wir statt ‘ A impliziert logisch B ’ (bzw. ‘ B folgt logisch aus A ’) in Hinkunft oft einfach ‘ $A \models B$ ’ schreiben werden.

Auf analoge Weise läßt sich definieren, was es heißt, dass eine *Menge* von Formeln $A_1, \dots, A_n$ der aussagenlogischen Sprache eine Formel B der aussagenlogischen Sprache logisch impliziert:

- Für alle Formeln $A_1, \dots, A_n$ und B aus $\mathcal{F}$ gilt: $A_1, \dots, A_n$ *implizieren (aussagen-)logisch* B (bzw. B *folgt logisch aus* $A_1, \dots, A_n$) genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$\text{Wenn } \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}(A_1) = w, \dots, \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}(A_n) = w, \text{ dann } \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}(B) = w.$$

Eine dazu äquivalente Formulierung ist wieder die folgende:

- Für alle Formeln $A_1, \dots, A_n$ und B aus $\mathcal{F}$ gilt: $A_1, \dots, A_n$ implizieren (aussagen-)logisch B (bzw. B folgt logisch aus $A_1, \dots, A_n$) genau dann, wenn es keine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, sodass gilt:

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_1) = w, \dots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_n) = w \text{ und } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = f.$$

Wieder werden wir oft ‘implizieren logisch’ (bzw. ‘folgt logisch aus’) mit dem Symbol ‘ $\models$ ’ abkürzen, sodass wir statt ‘ $A_1, \dots, A_n$ implizieren logisch B ’ in Hinkunft oft einfach ‘ $A_1, \dots, A_n \models B$ ’ schreiben. Obwohl wir keine Mengenkammern um ‘ $A_1, \dots, A_n$ ’ setzen werden, sollte man sich doch stets vergegenwärtigen, dass hier nur ausgesagt wird, dass die Formeln $A_1, \dots, A_n$ *zusammengenommen* – als Menge – die Formel B logisch implizieren. Wann immer *alle* der Formeln $A_1, \dots, A_n$ *simultan* bei einer aussagenlogischen Bewertung wahr sind, ist auch B wahr. Die Wahrheit bloß einer oder einiger der Formeln $A_1, \dots, A_n$ muss nicht für die Wahrheit von B hinreichen.

Es ist im übrigen auch leicht einzusehen, dass $A \models B$ genau dann logisch impliziert, wenn die materiale Implikation

- $A \rightarrow B$

eine Tautologie ist. Zum Beispiel ist es offensichtlich der Fall, dass $p \models p \vee q$ gilt, und entsprechend ist die Formel $p \rightarrow p \vee q$ auch eine Tautologie. Beides lässt sich leicht mittels Wahrheitstafeln für diesen konkreten Fall nachweisen, dahinter steht aber die obige allgemeine Beziehung zwischen logischer Folge und Tautologizität.

Darüberhinaus folgt eine Formel aus der leeren Prämissenmenge genau dann, wenn die Formel eine Tautologie ist: Denn $\emptyset \models A$ (wobei ‘ $\emptyset$ ’ die leere Menge benennt) ist genau dann der Fall, wenn es keine aussagenlogische Bewertung gibt, die alle Prämissen wahr und die Konklusion falsch macht bzw. – da es hier gar keine Prämissen gibt – genau dann, wenn es keine aussagenlogische Bewertung gibt, die die Konklusion falsch macht, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn A eine Tautologie ist. Dies rechtfertigt auch die übliche Schreibweise

- $\models A$

für den Sachverhalt, dass A tautologisch ist; links vom Folgezeichen steht keine Prämisse.

Weiters können wir nun eine Unterscheidung zwischen materialer und logischer *Äquivalenz* treffen: Wenn wir behaupten, dass zwei Formeln A und B äquivalent sind, so können wir damit meinen, dass die Formel

- $A \leftrightarrow B$

wahr ist; in diesem Falle sind A und B *material* äquivalent. Sie sind sozusagen äquivalent in der tatsächlichen oder aktuellen Welt – in der “wirklichen Zeile” der Wahrheitstafel (die wir uns als vorgegeben vorstellen können).

Oder aber wir meinen damit, dass

- $A \leftrightarrow B$

tautologisch ist; dann sind A und B *logisch* äquivalent. Sie sind äquivalent in allen Zeilen der Wahrheitstafel. Wir halten fest:

- Für alle Formeln A, B aus $\mathcal{F}$ und Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: A ist *material äquivalent* mit B (relativ zur vorgegebenen Bewertung $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$) genau dann, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A \leftrightarrow B) = w$.
- Für alle Formeln A, B aus $\mathcal{F}$ gilt: A ist (*aussagen-*)*logisch äquivalent* mit B genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B)$.

Wenn A logisch äquivalent mit B ist, so ist $A \rightarrow B$ natürlich ebenfalls eine Tautologie.

Wenn p für ‘Richard gehört der römisch-katholischen Kirche an.’ und $(q \wedge \neg r)$ für ‘Richard ist katholisch getauft und nicht ausgetreten.’ steht, so sind p und $(q \wedge \neg r)$ *material* äquivalent, die Formel

- $p \leftrightarrow q \wedge \neg r$

ist wahr. Hingegen sind etwa die Formeln $(p \wedge q)$ und $(q \wedge p)$ *logisch* äquivalent, ganz egal für welche Sätze p und q stehen; $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ ist eine Tautologie. Auch hier gilt, dass die logische Äquivalenz stärker als die materiale ist:

- Wenn eine Formel A mit einer Formel B logisch äquivalent ist, so ist A auch mit B material äquivalent (relativ zu egal welcher aussagenlogischen Bewertung).

5.2.5 Gültige und ungültige Argumentformen

Nun können wir auch festlegen, wann eine Argumentform (aussagen-)logisch gültig ist:

- Eine Argumentform Γ der aussagenlogischen Sprache ist (*aussagen-*)*logisch gültig* gdw es unmöglich ist, den in den Formeln von Γ vorkommenden Aussagenvariablen derart Wahrheitswerte zuzuordnen, dass die Berechnung der Wahrheitswerte der in Γ vorkommenden Formeln jeder Prämisse ein w zuordnet und der Konklusion ein f zuordnet.

Oder äquivalent, aber etwas präziser formuliert unter Zuhilfenahme unserer bereits erfolgten präzisen Definition der logischen Folge:

- Eine Argumentform $A_1, \dots, A_n \therefore B$ der aussagenlogischen Sprache ist (*aussagen-*)*logisch gültig* genau dann, wenn $A_1, \dots, A_n \models B$.

Man beachte dabei, dass $A_1, \dots, A_n \therefore B$ eine Argumentform der aussagenlogischen Sprache ist und somit in die uns interessierende Objektsprache gehört, während ‘ $A_1, \dots, A_n \therefore B$ ist logisch gültig’ ein Ausdruck der Metasprache ist, in dem dieser Argumentform eine semantische Eigenschaft zugeschrieben wird. Genauso ist auch ‘ $A_1, \dots, A_n \models B$ ’ ein metasprachlicher Ausdruck, in welchem das Bestehen einer semantischen Beziehung zwischen den objektsprachlichen Formeln $A_1, \dots, A_n$ einerseits und der objektsprachlichen Formel B andererseits konstatiert wird.

Wir wollen schließlich noch einige Beziehungen zwischen Argumentformen und Formeln zeigen. Dazu muss es uns möglich sein, jeder Argumentform “ihre” Formel zuzuordnen. Dies ist einfach:

- Die der Argumentform $A_1, \dots, A_n \therefore B$ *entsprechende Formel* ist

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$$

(Strikte genommen müsste man hier innerhalb des Antezedens $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ diverse Klammern setzen, aber es sollte klar sein, dass die Art und Weise der Klammerung hier semantisch gesehen irrelevant ist, weil die A_i durch Konjunktionszeichen verknüpft sind, bei denen die Reihenfolge ihrer Auswertung unwichtig ist.)

Nun läßt sich offensichtlich folgendes Verhältnis feststellen:

- Eine Argumentform Γ der aussagenlogischen Sprache ist logisch gültig gdw die Γ entsprechende Formel aus $\mathcal{F}$ eine Tautologie ist.

(Wir verwenden dabei ‘ Γ ’ als Metavariabel für Argumentformen.)

Zum Beispiel ist es offensichtlich der Fall, dass $p, p \rightarrow q \therefore q$ logisch gültig ist, und entsprechend ist die dieser Argumentform entsprechende Formel

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

eine Tautologie.

Weiters gilt folgender Merksatz:

- Wenn die Konklusionsformel B einer Argumentform Γ eine Tautologie ist, so ist Γ logisch gültig.

Denn in diesem Fall erhält die Konklusionsformel der Argumentform in jeder Zeile der Wahrheitstafel der Argumentform den Wert w . Somit gibt es keine Zeile, in der sämtliche Prämissen den Wert w erhalten und die Konklusion den Wert f .

Ein weiterer Merksatz:

- Wenn mindestens eine Prämissenformel A_i einer Argumentform Γ eine Kontradiktion ist, so ist Γ logisch gültig.

Denn in diesem Fall erhält die fragliche Prämissenformel in jeder Zeile der Wahrheitstafel der Argumentform den Wert f , und somit gibt es keine Zeile in der Wahrheitstafel, in der sämtliche Prämissen den Wert w erhalten und die Konklusion den Wert f .

5.2.6 Übertragung der Definitionen auf Aussagesätze und Argumente

Bislang haben wir alle unsere zentralen semantischen Begriffe – *kontingent*, *tautologisch*, *kontradiktorisch*, *folgt logisch*, *logisch äquivalent*, *logisch gültig* – nur für Formeln bzw. Aussageformen (jeweils der aussagenlogischen Sprache) formuliert. Doch lassen sich diese Begriffe auf Basis der Mittel, die wir bereits eingeführt und diskutiert haben, nunmehr leicht auf Aussagesätze und Argumente erweitern. Alle daraus resultierenden Begriffe sind wiederum Begriffe der *aussagenlogischen* Semantik, weil sie direkt oder indirekt auf das Repräsentierungsniveau der aussagenlogischen Sprache bezogen sind:

- Ein Aussagesatz ist *tautologisch* gdw seine (aussagen-)logische Form tautologisch ist.
- Ein Aussagesatz ist *kontradiktorisch* gdw seine (aussagen-)logische Form kontradiktorisch ist.
- Ein Aussagesatz ist *kontingent* gdw seine (aussagen-)logische Form kontingent ist.
- Für alle Aussagesätze $S_1, \dots, S_n$ und T gilt: $S_1, \dots, S_n$ implizieren (aussagen-)logisch T (bzw. T folgt (aussagen-)logisch aus $S_1, \dots, S_n$) genau dann, wenn für die (aussagen-)logischen Formen $A_1, \dots, A_n, B$ von, respektive, $S_1, \dots, S_n, T$ gilt: $A_1, \dots, A_n$ implizieren (aussagen-)logisch B .
- Zwei Aussagesätze sind (aussagen-)logisch äquivalent gdw ihre (aussagen-)logischen Formen zueinander logisch äquivalent sind.

- Ein Argument ist *(aussagen-)logisch gültig* gdw seine (aussagen-)logische Form (aussagen-)logisch gültig ist.

Für die Anwendung aller dieser Begriffe auf Aussagesätze und Argumente der natürlichen Sprache haben wir ja bereits eine Vielzahl von Beispielen kennengelernt; nun haben wir “nur mehr” die präzisen Definitionen der zugrundeliegenden Begrifflichkeiten nachgeliefert.