Kapitel 6

Aussagenlogisches Herleiten

6.1 Logische Systeme

Sprache lässt sich in mehrerlei Hinsichten studieren, die verschiedenen Teildisziplinen des Sprachstudiums (in der Philosophie, aber auch in der Linguistik) korrespondieren:

- *Syntaktik* ist die Disziplin, welche die Beziehungen der Zeichen untereinander behandelt, wobei diese Beziehungen so ausgedrückt sind, dass dabei wiederum nur auf Zeichen Bezug genommen wird. (Z.B.: Zeichenfolge so-und-so ist länger, d.h., enthält mehr Zeichen, als Zeichenfolge so-und-so.)

- *Semantik* ist die Disziplin, welche die Beziehungen der Zeichen zu ihren Bedeutungen behandelt. Diese Beziehungen können daher normalerweise nicht so ausgedrückt werden, dass dabei ausschließlich auf Zeichen Bezug genommen wird. (Z.B.: Zeichenfolge so-und-so benennt eine Insel im Mittelmeer.)

Darüber hinaus gibt es noch die *Pragmatik*, welche die Beziehungen von Zeichen zu ihren Benützern behandelt, insbesondere die Bedeutung von sprachlichen Ausdrücken in der zwischenmenschlichen Kommunikation. (Z.B.: Zeichenfolge so-und-so wird dazu verwendet, andere zum Lachen zu bringen.)

Wenn wir uns auch bereits mit einigen pragmatischen Facetten der Bedeutung von aussagenlogischen Verknüpfungen beschäftigt haben, so betreiben wir in der Logik doch primär Syntaktik und Semantik. Wenn wir unser *Alphabet* (Vokabular) angegeben haben, und wenn wir festgelegt haben, was eine *Formel* und was eine *Argumentform* ist, so haben wir uns im Bereich der Syntaktik bewegt. Wenn wir hingegen *Wahrheitstafeln* für bestimmte Formeln angegeben haben, wenn wir die *Wahrheitstafelmethode* beschrieben haben, wenn wir festgelegt haben, was eine *aussagenlogische Bewertung* ist, wenn wir die Eigenschaften des *Tautologisch-Seins*, des *Kontradiktorisch-Seins* oder der *Kontingenz* bzw. die Beziehungen der *logischen Implikation* und *Äquivalenz* definiert haben, so haben wir uns im Bereich der Semantik bewegt. Denn hier geht es um die Bedeutungen von Ausdrücken, d.h., in der Aussagenlogik, um Wahrheitswerte bzw. Wahrheitswertverläufe.

In diesem Kapitel werden wir die sogenannte *deduktive Methode* behandeln. Diese entstammt dem Bereich der Syntaktik und wird uns letztlich die Möglichkeit eröffnen, uns dem eigentlich semantischen Begriff der logischen Folge auch auf eine rein syntaktische Weise nähern zu können.

Bevor wir dies jedoch tun, möchten wir noch etwas allgemeiner festlegen, was überhaupt eine Logik ist. Eine voll ausgebaute Logik besteht aus drei Komponenten:

1. einer Sprache (syntaktisch),

2. einer semantischen Festlegung von Interpretationen/Bewertungen und damit verbunden eine Festlegung von wichtigen Begriffen wie denen der logischen Wahrheit (Tautologizität in der Aussagenlogik), logischen Implikation und Gültigkeit,

3. einer syntaktischen Festlegung von weiteren wichtigen Begriffen wie denen der Beweisbarkeit, Herleitbarkeit und deduktiven Gültigkeit.

Die Begriffe, die unter Punkt 2 und 3 genannt wurden, müssen dabei auf eine bestimmte Weise miteinander "harmonieren" – wir werden darauf unten zurückkommen ("Herleitbarkeit soll logischer Folge entsprechen"), und dasselbe Thema wird dann auch später noch ausführlich unter den Stichworten 'Korrektheit' und 'Vollständigkeit' abgehandelt werden.

Die ersten beiden Punkte haben wir für den Fall der Aussagenlogik bereits abgehakt: Wir haben unsere Sprache angegeben, indem wir unser Alphabet festgesetzt und sodann definiert haben, was Formeln und Argumentformen sind. Die Regeln, die dabei eine wesentliche Rolle spielten, waren die (syntaktischen) *Formationsregeln*: die Regeln der aussagenlogischen Grammatik. Damit war der erste Punkt vollständig behandelt.

Anschließend haben wir festgesetzt, wann eine Formel tautologisch ist, wann Formeln eine weitere Formel logisch implizieren, und wann eine Argumentform gültig ist. Diese Definitionen basierten auf weiteren Regeln, nämlich in diesem Fall den *semantischen Regeln*, die die Wahrheitsbedingungen für komplexe aussagenlogische Formeln festlegten. Damit war auch der zweite Punkt abgehakt.

Dem dritten Punkt wenden wir uns, soweit die Aussagenlogik betroffen ist, jetzt zu. Wiederum werden wir dabei Regeln kennenlernen: die (abermals syntaktischen) *Herleitungsregeln.* Diese Regeln werden es uns erlauben, logische Folgerungen auf "quasi-mechanische" Weise zu ziehen bzw. nachzuweisen. Es handelt bei diesen Regeln weder um grammatikalische noch um semantische Regeln, sondern um Beweisregeln.

Wir haben bereits im letzten Kapitel den Begriff der logischen Implikation definiert, der eine semantische Beziehung zwischen Formeln festlegt. Wir formulierten dabei für die Formeln der aussagenlogischen Sprache:

- Für alle $A_1, \ldots, A_n$ und B gilt: $A_1, \ldots, A_n$ *implizieren logisch* B ($A_1, \ldots, A_n \models B$) genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt:

  Wenn für alle $A_i \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ der Fall ist, dass $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A_i) = w$, dann $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = w$.

(Wir schreiben '$\in$', um die Elementbeziehung auszudrücken, die zwischen einem Element einer Menge und der Menge selbst besteht: Z.B. heißt '$A_i \in \{A_1, \ldots, A_n\}$' nichts anderes als: A_i ist ein Element der Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$.)

Folgende logische Implikationen bestehen dann etwa:

- $p \wedge q,\ q \rightarrow r \models r$
- $p \vee q,\ \neg q \models p \vee r$

Wie wir auch schon gesehen haben, kann man eine beliebige aussagenlogisch gültige Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ hernehmen und zeigen, dass dann auch immer die Konklusion logisch aus den Prämissen folgt:

- $A_1, \ldots, A_n \models B$

Man beachte dabei wiederum, dass ein Ausdruck wie

- $p, q \models p \wedge q$

kein Ausdruck der Objektsprache, sondern rein metasprachlich ist. Er besagt, dass eine Relation zwischen Formeln bzw. zwischen einer gewissen Formelmenge, nämlich $\{p, q\}$, und einer Formel, nämlich $p \wedge q$, besteht. Eine Argumentform

- $p, q \therefore p \wedge q$

hingegen *ist* ein Ausdruck der Objektsprache, von dem wir etwa die metasprachliche Aussage treffen können, dass er logisch gültig ist.

Wir wollen uns nun der deduktiven Methode zuwenden, und die erste Aufgabe, die wir uns dabei stellen, ist es, einen rein syntaktischen Begriff zu finden, der dem semantischen Begriff der logischen Implikation (logischen Folge) entsprechen soll. Dies wird der Begriff der (aussagenlogischen) *Herleitbarkeit* sein, und für

- B ist herleitbar aus $A_1, \ldots, A_n$

werden wir kurz schreiben:

- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

'Entspricht' wird dabei heißen: Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n, B$ der aussagenlogischen Sprache verhält es sich so, dass

$$A_1, \ldots, A_n \models B \text{ gdw } A_1, \ldots, A_n \vdash B.$$

In der traditionellen philosophischen Terminologie ausgedrückt: Die Beziehungen $\models$ und $\vdash$ stimmen *extensional* überein, wenn auch nicht *intensional* – dieselben Formeln stehen (angeordnet) in den Beziehungen $\models$ und $\vdash$, ohne dass die Bedeutungen von '$\models$' und '$\vdash$' dieselben wären. Dass Letzteres nicht der Fall ist, wird man daran erkennen, dass sich die Definitionen von '$\models$' und '$\vdash$' sehr stark voneinander unterscheiden werden.

Doch wenn immerhin die Extensionen von '$\models$' und '$\vdash$' übereinstimmen werden, warum dann überhaupt ein syntaktisches Gegenstück zum semantischen Begriff der logischen Folge einführen? Es gibt mehr als eine Antwort auf diese Frage, aber eine gewichtige Antwort ist: Wenn man eine Folgebeziehung für Formeln mit n Aussagevariablen mittels einer Wahrheitstafel überprüfen will, dann sind wenigstens im Prinzip 2^n Zeilen mit Wahrheitswertverteilungen zu untersuchen, d.h. die Mühsal der Überprüfung steigt exponentiell mit der Anzahl der Aussagevariablen, die involviert sind. Der Nachweis der deduktiven Beziehung der Herleitbarkeit von Formeln aus Formeln, also der Relation $\vdash$, wird sich in vielen Fällen als bedeutend effektiver erweisen. Allerdings wird dieser Nachweis auch ein gewisses Maß an Kunstfertigkeit verlangen, wohingegen das Aufstellen einer Wahrheitstafel und das Überprüfen der Wahrheitstafel auf eine logische Folgebeziehung hin rein automatisch oder mechanisch erfolgen kann. Später in der Prädikatenlogik werden solche "mechanischen" Überprüfungsmethoden mittels Wahrheitstafeln gar nicht mehr zur Verfügung stehen, weshalb das Herleiten in der Prädikatenlogik dann eine noch größere Rolle spielen wird als in der Aussagenlogik.

6.2 Ein System des natürlichen Schließens

Die Herleitbarkeit einer Formel B aus Formeln $A_1, \ldots, A_n$ weist man dadurch nach, dass man eine Herleitung von B aus $A_1, \ldots, A_n$ angibt. Und Herleitungen erstellt man mittels Anwendungen einfacher syntaktischer Schlussregeln. Wir beginnen mit der Angabe einer Reihe von Schlussregeln, die die Basis unseres Herleitbarkeitsbegriff darstellen werden. Alle Instanzen dieser Schlussregeln werden dann als sogenannte *deduktiv gültige* Schlüsse betrachtet. Die ersten sechs Regeln sind die folgenden:

(MP) $A, A \to B \vdash B$ (Modus Ponens)

(MT) $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ (Modus Tollens)

(DS1) $A \vee B, \neg A \vdash B$ (Disjunktiver Syllogismus 1)

(DS2) $A \vee B, \neg B \vdash A$ (Disjunktiver Syllogismus 2)

(SIMP1) $A \wedge B \vdash A$ (Simplifikation 1)

(SIMP1) $A \wedge B \vdash B$ (Simplifikation 2)

Die folgenden Schlüsse sind also deduktiv gültig:

- $p \wedge q, p \wedge q \to r \vdash r$
- $p \to q \vee r, \neg(q \vee r) \vdash \neg p$
- $(p \to q) \vee (q \to r), \neg(p \to q) \vdash (q \to r)$
- $(p \vee r) \vee (q \wedge s), \neg(q \wedge s) \vdash p \vee r$
- $p \wedge (q \vee r) \vdash p$
- $p \wedge (q \wedge r) \vdash q \wedge r$

Wie steht es nun mit dem folgenden Schluss?

- $q, \neg p \vee (q \to r), \neg\neg p \vdash r$

Dieser Schluss hat nicht die Form einer Schlussregel, aber er ist nichtsdestotrotz deduktiv gültig. Wir können dies wie folgt zeigen:

1. q (P1)
2. $\neg p \vee (q \to r)$ (P2)

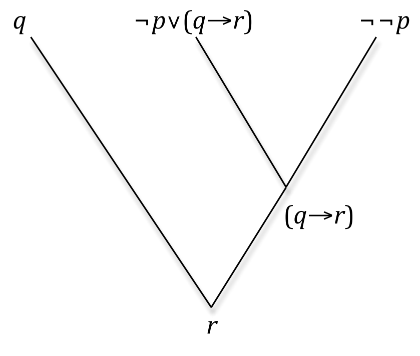
3. $\underline{\neg\neg p}$ (P3)

4. $q \to r$ 2., 3., (DS1)

5. r 1., 4., (MP)

Dabei benennen ‘P1’, ‘P2’ und ‘P3’ die Prämissen, ‘DS1’ die erste Regel des disjunktiven Syllogismus – die dabei auf die Zeilen 2. und 3. in *dieser Reihenfolge* angewandt wird – und ‘MP’ die Regel des Modus Ponens, welche auf die Zeilen 1. und 4. der Herleitung wiederum in genau *dieser Reihenfolge* angewandt wird. Die Reihenfolge muss mit der Reihenfolge der Prämissen in unserer ursprünglichen Angabe der Schlussregeln übereinstimmen: Z.B. ist das A in der Anwendung des Modus Ponens hier die Formel q in Zeile 1., während das $A \to B$ hier die Formel $q \to r$ in Zeile 4. ist, wobei A vor $A \to B$ zu nennen ist, weil dies nunmal die Reihenfolge der Prämissen bei der obigen Einführung der Modus Ponens Regel war. Selbstverständlich muss die Metavariable ‘A’ auch in beiden Prämissen für ein und dieselbe Formel stehen (hier: q). Der horizontale Strich trennt die Prämissen von denjenigen Formeln, die aus diesen hergeleitet werden. Der Zweck der Angaben auf der rechten Seite ist jeweils die logische Rechtfertigung oder Begründung der Formeln, die links davon stehen.

Eine Herleitung wie diese lässt sich auch durch einen Baum darstellen:



Alle an den Astenden dieses sogenannten *Herleitungsbaumes* stehenden Formeln sind die Prämissen der Herleitung, und die an der Wurzel des Herleitungsbaumes stehende Formel ist die Konklusion der Herleitung. Man könnte außerdem noch die Kanten des Baumes mit Angaben der jeweiligen Schlussregeln versehen.

Betrachten wir weitere Beispiele:

- $p, p \to (q \to \neg r), \neg\neg r, q \vee (t \wedge s) \vdash t$

1. p (P1)

2. $p \to (q \to \neg r)$ (P2)

3. $\neg\neg r$ (P3)

4. $q \vee (t \wedge s)$ (P4)

5. $q \to \neg r$ 1., 2., (MP)

6. $\neg q$ 5., 3., (MT)

7. $t \wedge s$ 4., 6., (DS1)

8. t 7., (SIMP1)

- $\neg p, \neg p \to (q \to p) \vdash \neg q$

1. $\neg p$ (P1)

2. $\neg p \to (q \to p)$ (P2)

3. $q \to p$ 1., 2., (MP)

4. $\neg q$ 3., 1., (MT)

An dem letzten Beispiel erkennt man, dass man manchmal Prämissen öfter als nur einmal verwenden muss, um zur Konklusion zu gelangen. Wir bringen noch ein Beispiel, bevor wir die deduktive Methode weiter spezifizieren:

- $\neg\neg t, p \to \neg t, \neg\neg t \to \neg q, p \vee (q \vee r) \vdash r$

1. $\neg\neg t$ (P1)

2. $p \to \neg t$ (P2)

3. $\neg\neg t \to \neg q$ (P3)

4. $p \vee (q \vee r)$ (P4)

5. $\neg p$ 2., 1., (MT)

6. $q \vee r$ 4., 5., (DS1)

7. $\neg q$ 1., 3., (MP)

8. r 6., 7., (DS1)

Wir benötigen auch noch andere Schlussregeln:

(ADD1) $A \vdash A \vee B$ (Addition 1)

(ADD2) $B \vdash A \vee B$ (Addition 2)

(KON) $A, B \vdash A \wedge B$ (Konjunktion)

(DN1) $A \vdash \neg\neg A$ (Doppelte Negation 1)

(DN2) $\neg\neg A \vdash A$ (Doppelte Negation 2)

(DIS) $A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C$ (Disjunktion)

(TS) $A \vdash A$ (Triviale Schlussform)

(ECQ) $A, \neg A \vdash B$ (Ex Contradictione Quodlibet)

Hier sind einige Beispiele für Herleitungen auf Basis der bislang eingeführten Regeln:

- $p \to q, q \to r, p \vdash \neg\neg(r \vee s)$

  1. $p \to q$ (P1)
  2. $q \to r$ (P2)
  3. $\underline{p}$ (P3)
  4. q 3., 1., (MP)
  5. r 4., 2., (MP)
  6. $r \vee s$ 5., (ADD1)
  7. $\neg\neg(r \vee s)$ 6., (DN1)

- $p \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

  1. $\underline{p}$ (P1)
  2. $p \vee q$ 1., (ADD1)
  3. $p \vee r$ 1., (ADD1)
  4. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 2., 3., (KON)

- $p, q, r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

  1. p (P1)
  2. q (P2)
  3. $\underline{r}$ (P3)
  4. $p \wedge q$ 1., 2., (KON)
  5. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 4., (ADD1)

Im letzteren Beispiel sieht man jedoch leicht, dass auch folgende Herleitung möglich gewesen wäre:

1. p (P1)
2. q (P2)
3. $\underline{r}$ (P3)
4. $p \wedge r$ 1., 3., (KON)
5. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 4., (ADD2)

Allgemein: Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ der Fall ist, dann heißt dies nur, dass *wenigstens* eine Herleitung von B aus $A_1, \ldots, A_n$ existiert; selbst wenn man sich nur für kürzest mögliche Herleitungen interessieren würde, könnte es deren viele geben.

Alle bisherigen Regeln waren von folgender einfachen Form: Wenn dieses und jenes eine Prämisse ist oder aber bereits hergeleitet wurde, dann darf man im nächsten Schritt auch dieses und jenes herleiten. Die Regeln dieser Art, die wir uns im Rahmen unseres Systems des natürlichen Schließens vorgeben, nennen wir 'Grundschlussregeln'. Wir kommen nun jedoch zu drei wichtigen Regeln, die eine etwas komplexere Form aufweisen, und die wir 'Metaregeln' nennen wollen: Gegeben seien die Prämissen und alles, was bereits hergeleitet wurde; nun wird eine Zusatzannahme getroffen; aus all diesen Formeln werden dann weitere Formeln hergeleitet; je nachdem, was dabei hergeleitet wird, darf die Zusatzannahme wieder beseitigt werden und stattdessen ein Schluss ohne Zusatzannahme gezogen werden. Man spricht dabei von Metaregeln, weil es sich insgesamt sozusagen um einen *metasprachlich* formulierten Schluss von solchen Schlüssen auf solche Schlüsse hin handelt, die direkt von objektsprachlichen Formeln zu weiteren objektsprachlichen Formeln führen.

Die erste solche Metaregel ist der *Indirekte Beweis* (auch *Reductio ad absurdum* genannt). Folgende Idee steht hinter dieser Regel: Wir wollen zeigen, dass unter der Annahme der Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ die Konklusion B hergeleitet werden kann, dass also gilt: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$. Dazu nehmen wir zusätzlich zu den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ zunächst einmal auch noch die Negation $\neg B$ der gewünschten Konklusion an und versuchen eine Kontradiktion der Form $C \wedge \neg C$ daraus herzuleiten. Gelingt uns dies, so darf der ursprünglich intendierte Schluss von $A_1, \ldots, A_n$ auf B ohne Zusatzannahme durchgeführt werden. Die semantische Idee dahinter ist diese: Da die Konklusion, die sich unter der Zusatzannahme von $\neg B$ ergibt, eine kontradiktorische Formel ist, erhält sie in jedem Falle den Wert f. Somit kann es nicht der Fall sein, dass sämtliche Prämissen den Wert w erhalten, da das Argument selbst ja logisch gültig ist. Dies heißt, dass unter der Annahme, dass alle A_i den Wert w erhalten – die Formeln A_i sind ja die Prämissen, deren Wahrheit von vornherein vorausgesetzt wurde – die Formel $\neg B$ den Wert f und somit die Formel B den Wert w erhalten muss. Es folgt also B aus den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$.

Formal präzise ausformuliert lautet die Regel:

(IB) Wenn $\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B}$$

Hier sind zwei Anwendungsbeispiele dieser Regel:

- $\neg p \to \neg q, q \vdash p$

  1. $\neg p \to \neg q$ (P1)

  2. $\underline{q}$ (P2)

  3. $\|$ $\neg p$ (IB-Annahme)

  4. $\|$ $\neg q$ 3., 1. (MP)

  5. $\|$ $q \wedge \neg q$ 2., 4. (KON)

  6. p 3.–5. (IB)

Wir signalisieren dabei durch die Verwendung der zwei vertikalen Striche ('$\|$') denjenigen Teil der Herleitung, welcher unter der Annahme $\neg p$ des indirekten Beweises erfolgt. Zeile 6 steht dann wieder außerhalb dieses Annahmenteils, denn auf p kann nun ja *ohne irgendwelche Zusatzannahmen* (abgesehen von den ursprünglichen Prämissen P1 und P2) geschlossen werden. '$\|$' hat dabei aber eine rein "visuelle" Funktion: Es handelt sich dabei nicht etwa um ein logisches oder inhaltlich sonst irgendwie relevantes Zeichen.

Achtung: Diese letzte Herleitung hätte nicht einfach mittels Modus Tollens erfolgen können: MT erfordert, dass die zweite Prämisse, auf die er angewandt wird, eine Negationsformel ist; q oben ist aber keine Negationsformel. Was man jedoch sehr wohl hätte machen können: q zunächst doppelt zu verneinen; *dann* Modus Tollens anzuwenden, um $\neg\neg p$ zugewinnen; und schließlich die doppelte Negation in $\neg\neg p$ wieder zu eliminieren. Man hätte p in diesem Fall also auch ohne die Anwendung der IB-Regel aus den Prämissen herleiten können.

Hier ist noch ein anderes Beispiel:

- $(p \wedge r) \vee q, \neg p \vdash q$

  1. $(p \wedge r) \vee q$ (P1)

  2. $\underline{\neg p}$ (P2)

  3. $\|$ $\neg q$ (IB-Annahme)

  4. $\|$ $p \wedge r$ 1., 3. (DS2)

  5. $\|$ p 4. (SIMP1)

  6. $\|$ $p \wedge \neg p$ 5., 2. (KON)

  7. q 3.–6. (IB)

Bei allen solchen Metaregeln gilt: Wenn die Anwendung der Metaregel beendet ist – z.B. endet die Anwendung von IB im letzten Beispiel in Zeile 7 – dann gilt ab dort auch die ursprüngliche Annahme für die nämliche Metaregel – hier in Zeile 3 – genauso als entfernt oder gelöscht wie die ganze Sub-Herleitung, welche sich von der Annahme bis zu der Zeile unmittelbar vor der Konklusion der Metaregel erstreckt. Im vorigen Beispiel dürfte also nach der Zeile 7 auf keine der Zeilen 3–6 mehr verwiesen werden. Natürlich dürfte man aber auf die Konklusion der Metaregel – im vorigen Beispiel die Formel q in Zeile 7 – weitere Herleitungsregeln anwenden, da diese Konklusion ja nunmehr *ohne* Zusatzannahmen erschlossen wurde.

Die zweite Metaregel ist der *Konditionale Beweis*: Angenommen wir wollen unter der Annahme der Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ die Implikationsformel $B \rightarrow C$ herleiten. Wir nehmen dann B zunächst als Zusatzannahme zu den Prämissen hinzu und leiten C her. Wenn dies gelingt, dürfen wir ganz ohne Zusatznahme auf $B \to C$ schließen. Semantisch können wir dafür wie folgt argumentieren: Wenn die Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B \to C$ ungültig ist, dann muss unter der Annahme der Wahrheit der Prämissen A_i die Formel $B \to C$ den Wert f erhalten können. In dem Falle muss dann aber B den Wert w und C den Wert f erhalten. Dies zieht nach sich, dass in diesem Falle sämtliche Prämissen der Argumentform $A_1, \ldots, A_n, B \therefore C$ wahr sind, die Konklusion jedoch falsch. Somit ist auch diese Argumentform dann logisch ungültig. Anders ausgedrückt: Wenn $A_1, \ldots, A_n, B \therefore C$ gültig ist, so auch $A_1, \ldots, A_n \therefore B \to C$.

Als Herleitungsregel formuliert:

(KB) Wenn $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$ eine Schlussregel ist, so ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, B \vdash C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C}$$

Wir bringen gleich ein paar Beispiele dazu:

- $\neg p \lor r \vdash p \to r$

  $\underline{1.\ \neg p \lor r}$ (P1)

  2. $\|$ p (KB-Annahme)

  3. $\|$ $\neg\neg p$ 2. (DN1)

  4. $\|$ r 1., 3. (DS1)

  5. $p \to r$ 2.–4. (KB)

- $p \to q, q \to r \vdash p \to q \land r$

  1. $p \to q$ (P1)

  $\underline{2.\ q \to r}$ (P2)

  3. $\|$ p (KB-Annahme)

  4. $\|$ q 3., 1. (MP)

  5. $\|$ r 4., 2. (MP)

  6. $\|$ $q \land r$ 4., 5. (KON)

7. $p \to q \land r$ 3.–6. (KB)

- $\neg(q \lor r) \vdash q \lor p \to p$

  1. $\underline{\neg(q \lor r)}$ (P1)

  2. $\|$ $\neg\neg q$ (IB-Annahme)

  3. $\|$ q 2. (DN2)

  4. $\|$ $q \lor r$ 3. (ADD1)

  5. $\|$ $(q \lor r) \land \neg(q \lor r)$ 4., 1. (KON)

  6. $\neg q$ 2.–5. (IB)

  7. $\|$ $q \lor p$ (KB-Annahme)

  8. $\|$ p 7., 6. (DS1)

  9. $q \lor p \to p$ 7.–8. (KB)

An dem letzten Beispiel sieht man, dass man selbstverständlich auch mehr als eine Metaregel in einer Herleitung zur Anwendung bringen kann.

Schließlich kommen wir zur dritten Metaregel, dem *Beweis durch vollständige Fallunterscheidung*: Wenn wir zeigen wollen, dass die Formel C unter der Annahme der Prämissen $B_1, \ldots, B_n$ herleitbar ist, dann kann man dies auch dadurch bewerkstelligen, dass man sowohl zeigt, dass unter der Zuhilfenahme der Prämisse A die Formel C herleitbar ist, als auch unter Zuhilfenahme der Prämisse $\neg A$. Dies ist vielleicht auf den ersten Blick nicht so leicht einzusehen. Es lässt sich jedoch wieder eine semantische Argumentation dafür vorbringen, erklärt anhand eines einfachen Beispiels: Angenommen, die Argumentform $A \therefore B$ ist gültig und ebenfalls die Argumentform $\neg A \therefore B$. Nun muß in unserer Logik, in der das sogenannte *Bivalenzprinzip* gilt, entweder A oder aber $\neg A$ wahr sein und die jeweils andere Formel falsch. Aus demselben Grunde ist ja auch die Formel $A \lor \neg A$ immer wahr, also eine Tautologie. Wenn nun B sowohl aus A als auch aus $\neg A$ folgt, dann folgt B doch auch aus $A \lor \neg A$. Das Überprüfen der Gültigkeit der Argumentform $A \lor \neg A \therefore B$ unterscheidet sich aber in nichts vom Überprüfen der Argumentform $\therefore B$ auf deren Gültigkeit hin: In beiden Fällen heißt Gültigkeit, dass B in allen Zeilen der Wahrheitstafel ein w aufweisen muss. $A \lor \neg A$ fügt also nichts Wesentliches hinzu und ist somit vernachlässigbar. Kurz: Wenn sowohl $A \therefore B$ als auch $\neg A \therefore B$ logisch gültig sind, so auch $\therefore B$. Dies ist nur ein Beispiel für die Gültigkeit der allgemeiner formulierten Schlussregel der Fallunterscheidung.

Diese lautet nun so:

(FU) Wenn $A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ und $\neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ Schlussregeln sind, dann ist auch $B_1, \ldots, B_n \vdash C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A, B_1, \ldots, B_n \vdash C \quad \neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C}{B_1, \ldots, B_n \vdash C}$$

Wäre die resultierende Argumentform ungültig, so wäre es möglich, dass alle B_i den Wert w erhielten und C den Wert f. Dann wäre aber auch mindestens eine der vorausgesetzen Argumentformen ungültig, da in dem Falle entweder A oder aber $\neg A$ den Wert w erhielte.

Hierzu wieder einige Beispiele:

- $p \to r, \neg p \to s \vdash r \vee s$

1. $p \to r$ (P1)

2. $\underline{\neg p \to s}$ (P2)

3. $\| \; p$ (FU-Annahme 1)

4. $\| \; r$ 3., 1. (MP)

5. $\| \; r \vee s$ 4. (ADD1)

6. $\| \; \neg p$ (FU-Annahme 2)

7. $\| \; s$ 6., 2. (MP)

8. $\| \; r \vee s$ 7. (ADD2)

9. $r \vee s$ 3.–8. (FU)

Man beachte dabei, dass gefordert ist, dass die Konklusion aus der FU-Annahme 1 – diese Konklusion steht hier in Zeile 5 – und die Konklusion aus der FU-Annahme 2 – die Konklusion findet sich hier in Zeile 8 – genau dieselben sind, und dass die FU-Annahme 2 unmittelbar nach der Konklusion aus der FU-Annahme 1 getroffen wird.

- $p \to q \vdash \neg p \vee q$

1. $\underline{p \to q}$ (P1)

2. $\| \; p$ (FU-Annahme 1)

3. $\| \; q$ 2., 1. (MP)

4. $\| \; \neg p \vee q$ 3. (ADD2)

5. $\| \; \neg p$ (FU-Annahme 2)

6. $\| \; \neg p \vee q$ 5. (ADD1)

7. $\neg p \vee q$ 2.–6. (FU)

- $\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r,\ r \wedge (p \wedge q) \rightarrow p \wedge s \vdash \neg(p \wedge q) \vee s$

1. $\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r$ (P1)

2. $\underline{r \wedge (p \wedge q) \rightarrow p \wedge s}$ (P2)

3. $\| \; p \wedge q$ (FU-Annahme 1)

4. $\| \; \| \; \neg r$ (IB-Annahme)

5. $\| \; \| \; \neg\neg(\neg p \vee \neg q)$ 1., 4. (MT)

6. $\| \; \| \; \neg p \vee \neg q$ 5. (DN2)

7. $\| \; \| \; q$ 3. (SIMP2)

8. $\| \; \| \; \neg\neg q$ 7. (DN1)

9. $\| \; \| \; \neg p$ 8., 6. (DS2)

10. $\| \; \| \; p$ 3. (SIMP1)

11. $\| \; \| \; p \wedge \neg p$ 10., 9. (KON)

12. $\| \; r$ 4.–11. (IB)

13. $\| \; r \wedge (p \wedge q)$ 12., 3. (KON)

14. $\| \; p \wedge s$ 13., 2. (MP)

15. $\| \; s$ 14. (SIMP2)

16. $\| \; \neg(p \wedge q) \vee s$ 15. (ADD2)

17. $\| \; \neg(p \wedge q)$ (FU-Annahme 2)

18. $\| \neg(p \land q) \lor s$ 17. (ADD1)

19. $\neg(p \land q) \lor s$ 3.–18. (FU)

Wie schon einmal zuvor werden hier in einer Herleitung zwei Metaregeln verwendet. Anders als zuvor sind diese hier jedoch ineinander *verschachtelt*: Die Anwendung des IB findet *innerhalb* der Anwendung der FU statt! Darin ist nichts problematisch, außer dass man gewährleisten muss, dass immer die zuletzt begonnene Anwendung einer Metaregel wiederum als erste beendet wird. Es darf nicht sein, dass die Annahme einer ersten Anwendung einer Metaregel getroffen wird, dann die Annahme einer zweiten Anwendung einer Metaregel, dann aber die erste Anwendung der nämlichen Metaregel *vor* der zweiten Anwendung geschlossen wird. Anwendungen von Metaregeln dürfen also zwar ineinander geschachtelt sein, sie dürfen sich jedoch nicht "überkreuzen".

In dem Bereich der Herleitung, der unter *zwei* ineinander verschachtelten Annahmen vor sich geht, haben wir entsprechend '$\|$' *zweimal* angeschrieben, um die Verschachtelungstiefe entsprechend zu verdeutlichen. Bei drei ineinander verschachtelten Annahmen würden wir '$\|$' dreimal angeben, usw.

Was uns noch fehlt, sind Herleitungsregeln für die materiale Äquivalenz $\leftrightarrow$. Dazu geben wir uns die folgenden Grundschlussregeln vor:

(ÄQ-EIN) $A \to B, B \to A \vdash A \leftrightarrow B$ (Einführung der Äquivalenz)

(ÄQ-ELIM1) $A \leftrightarrow B \vdash A \to B$ (Elimination der Äquivalenz 1)

(ÄQ-ELIM2) $A \leftrightarrow B \vdash B \to A$ (Elimination der Äquivalenz 2)

Damit ist das Schlussregelwerk unseres Systems des natürlichen Schließens abgeschlossen. Es ist nun möglich, auf Basis dieser Regeln den Begriff der *Herleitbarkeit* einer Formel B aus Formeln $A_1, \ldots, A_n$ exakt zu definieren. Hätten wir es dabei ausschließlich mit Grundschlussregeln zu tun, wäre diese Definition auch ganz leicht anzugeben:

- Eine *Herleitung* einer Formel B der aussagenlogischen Sprache $\mathcal{F}$ aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathcal{F}$ *rein auf Basis der Grundschlussregeln* ist eine Folge von Formeln in $\mathcal{F}$ derart, dass deren erste n Formeln die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ (in dieser Reihenfolge) sind, dass deren letzte Formel die Formel B ist, und dass jede Formel dazwischen (sagen wir: mit Nummer k) das Resultat der Anwendung einer unserer Grundschlussregeln auf Formeln ist, welche bereits zuvor (also vor Nummer k) in der Folge vorkommen.

- Eine Formel B der aussagenlogischen Sprache $\mathcal{F}$ ist *rein auf Basis der Grundschlussregeln* aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathcal{F}$ *herleitbar* genau dann, wenn es eine Herleitung von B aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ rein auf Basis der Grundschlussregeln gibt.

Die Präsenz unserer drei Metaregeln verkompliziert die allgemeine Definition von

- eine Formel B der aussagenlogischen Sprache $\mathcal{F}$ ist aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathcal{F}$ *herleitbar* (kurz: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$)

jedoch, weil die drei Metaregeln im Vergleich zu den Grundschlussregeln – aber auch untereinander – syntaktisch unterschiedlich gebaut sind, weil man in der Definition festlegen muss, dass alle Anwendungen von Metaregeln innerhalb einer Herleitung abgeschlossen sein müssen, weil man angeben muss, dass sich die Anwendungen von Metaregeln innerhalb einer Herleitung nicht überkreuzen dürfen, und weil man schließlich auch noch verlangen muss, dass in keiner Zeile einer Herleitung auf eine frühere Zeile Bezug genommen wird, die sich innerhalb einer bereits abgeschlossenen Anwendung einer Metaregel befindet. Aus diesen Gründen verzichten wir darauf, die exakte Definition von $\vdash$ anzugeben und vertrauen stattdessen darauf, dass diese aus den Erläuterungen in dieser Sektion hinreichend klar geworden ist, und dass es ebenso klar ist, dass die Definition vollständig präzise und rein unter Zuhilfenahme von syntaktischen Begriffen angegeben werden könnte.

Zum Abschluss stellen wir alle Regeln unseres Systems des natürlichen Schließens in der Aussagenlogik noch einmal bündig zusammen.

6.3 Zusammenfassung der Regeln unseres aussagenlogischen Systems des natürlichen Schließens

(MP) $A, A \to B \vdash B$ (Modus Ponens)

(MT) $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ (Modus Tollens)

(DS1) $A \lor B, \neg A \vdash B$ (Disjunktiver Syllogismus 1)

(DS2) $A \lor B, \neg B \vdash A$ (Disjunktiver Syllogismus 2)

(SIMP1) $A \land B \vdash A$ (Simplifikation 1)

(SIMP2) $A \land B \vdash B$ (Simplifikation 2)

(ADD1) $A \vdash A \lor B$ (Addition 1)

(ADD2) $B \vdash A \vee B$ (Addition 2)

(KON) $A, B \vdash A \wedge B$ (Konjunktion)

(DN1) $A \vdash \neg\neg A$ (Doppelte Negation 1)

(DN2) $\neg\neg A \vdash A$ (Doppelte Negation 2)

(DIS) $A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash A \vee B \rightarrow C$ (Disjunktion)

(TS) $A \vdash A$ (Triviale Schlussform)

(ECQ) $A, \neg A \vdash B$ (Ex Contradictione Quodlibet)

(ÄQ-EIN) $A \rightarrow B, B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$ (Einführung der Äquivalenz)

(ÄQ-ELIM1) $A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B$ (Elimination der Äquivalenz 1)

(ÄQ-ELIM2) $A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$ (Elimination der Äquivalenz 2)

(IB) Wenn $\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B}$$

(KB) Wenn $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$ eine Schlussregel ist, so ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B \rightarrow C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, B \vdash C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B \rightarrow C}$$

(FU) Wenn $A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ und $\neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ Schlussregeln sind, dann ist auch $B_1, \ldots, B_n \vdash C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A, B_1, \ldots, B_n \vdash C \quad \neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C}{B_1, \ldots, B_n \vdash C}$$

Wie wir bald sehen werden, könnten wir auf einige dieser Regeln verzichten, ohne dass die Extension, also der Begriffsumfang, des Herleitbarkeitszeichens '$\vdash$' davon beeinträchtigt wäre. In anderen Worten: Einige der obigen Regeln sind redundant. Solche redundanten Regeln können das Herleiten aber immerhin abkürzen oder übersichtlicher gestalten, weshalb die Nicht-Redundanz der logischen Herleitungsregeln in einem System solcher Regeln nicht unbedingt ein Ziel sein muss.

6.4 Faustregeln für das aussagenlogische Herleiten

Eine Formel aus Prämissen herzuleiten, ist nicht immer einfach, und es existiert dabei kein "Kochrezept", welches immer zum gewünschten Ergebnis führen würde. Letztlich macht nur Übung den Meister! Die folgenden Faustregeln mögen aber immerhin als kleine Hilfestellung beim Herleiten dienen:

Ist eine *Prämissenformel* eine "gerade" *Negationsformel* $\neg\neg A$, so versuche man eine **Doppelte Negation** anzuwenden.

Ist eine *Prämissenformel* eine "ungerade" *Negationsformel* $\neg C$, so versuche man einen **Indirekten Beweis**, und zwar so, dass man die fragliche Prämissenformel $\neg C$ als das zweite Konjunkt des für die Durchführung des Indirekten Beweises notwendigen Widerspruchs $(C \land \neg C)$ verwendet.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Konjunktionsformel* $(A \land B)$, so versuche man eine **Simplifikation** anzuwenden.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Disjunktionsformel* $(A \lor B)$, so versuche man einen **Disjunktiven Syllogismus** anzuwenden.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Implikationsformel* $(A \to B)$, so versuche man einen **Modus Ponens** oder einen **Modus Tollens** anzuwenden.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Äquivalenzformel* $(A \leftrightarrow B)$, so versuche man eine **Äquivalenzelimination** anzuwenden.

Ist die *Konklusionsformel* eine "gerade" *Negationsformel* $\neg\neg A$, so versuche man, A herzuleiten, um sodann eine **Doppelte Negation** anzuwenden.

Ist die *Konklusionsformel* eine "ungerade" *Negationsformel* $\neg B$, so versuche man einen **Indirekten Beweis**, und zwar so, dass man die Negation $\neg\neg B$ der Konklusionsformel als Prämisse annimmt und versucht, mit deren Hilfe einen Widerspruch der Form $(C \land \neg C)$ herzuleiten.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Konjunktionsformel* $(A \land B)$, so versuche man einerseits A und andererseits B herzuleiten, um sodann eine **Konjunktion** anzuwenden.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Disjunktionsformel* $(D \lor E)$, so versuche man D oder E herzuleiten, um sodann eine **Addition** anzuwenden; in manchen Fällen muss ein **Beweis durch vollständige Fallunterscheidung** angewandt werden, und zwar so, dass man in einem Fall die Konklusionsformel durch Addition aus der Formel D gewinnt und im anderen Fall die Konklusionsformel durch Addition aus der Formel E gewinnt.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Implikationsformel* $(B \to C)$, so versuche man einen **Konditionalen Beweis**, und zwar so, dass man das Antezedens B der Konklusionsformel als Prämisse annimmt und versucht, mit deren Hilfe das Konsequens C der Konklusionsformel herzuleiten.

Ist eine *Konklusionsformel* eine *Äquivalenzformel* $(A \leftrightarrow B)$, so versuche man, $(A \to B)$ und $(B \to A)$ herzuleiten, um sodann eine **Äquivalenzeinführung** anzuwenden.

6.5 Deduktive Gültigkeit, Beweisbarkeit und abgeleitete Schlussregeln

Auf der Basis der Herleitbarkeitsbegriffes können wir nun die folgenden weiteren syntaktischen Begriffe definieren:

- Eine Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ der aussagenlogischen Sprache ist *deduktiv gültig* gdw $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.
- Eine Formel A in $\mathcal{F}$ ist *beweisbar* (*prämissenfrei herleitbar*, $\vdash A$) gdw A aus der leeren Prämissenmenge herleitbar ist.

So wie logische Gültigkeit von Argumentformen früher einmal auf den Begriff der logischen Folge zurückgeführt wurde, wird also die deduktive Gültigkeit von Argumentformen auf den Begriff der Herleitbarkeit zurückgeführt.

Beweisbare Formeln sind solche, die ohne jegliche Annahmen herleitbar sind, so wie früher die unbedingte Wahrheit von Tautologien keinerlei Annahmen bedurften. Hier sind ein paar typische Beispiele für beweisbare Formeln:

- $\vdash p \lor \neg p$

  1. $\| \; p$ (FU-Annahme 1)
  2. $\| \; p \lor \neg p$ 1. (ADD1)
  3. $\| \; \neg p$ (FU-Annahme 2)
  4. $\| \; p \lor \neg p$ 3. (ADD2)
  5. $p \lor \neg p$ 1.–4. (FU)

- $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

  1. $\|$ $\neg\neg(p \wedge \neg p)$ (IB-Annahme)
  2. $\|$ $p \wedge \neg p$ 1. (DN2)
  3. $\neg(p \wedge \neg p)$ 1.–2. (IB)

- $\vdash p \rightarrow p$

  1. $\|$ p (KB-Annahme)
  2. $\|$ p 1. (TS)
  3. $p \rightarrow p$ 1.–2. (KB)

- $\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

  1. $\|$ $(p \wedge q \rightarrow r)$ (KB-Annahme)
  2. $\|$ $\|$ p (KB-Annahme)
  3. $\|$ $\|$ $\|$ q (KB-Annahme)
  4. $\|$ $\|$ $\|$ $p \wedge q$ 2., 3. (KON)
  5. $\|$ $\|$ $\|$ r 4., 1. (MP)
  6. $\|$ $\|$ $q \rightarrow r$ 3.–5. (KB)
  7. $\|$ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 2.–6. (KB)
  8. $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ 1.–7. (KB)

So wie wir die semantischen Begriffe der Tautologizität von Formeln, der logischen Folgebeziehung zwischen Formeln und der logischen Gültigkeit von Argumentformen letztlich auf Aussagesätze und Argumente der *natürlichen Sprache* erweitert haben, lassen sich auch die syntaktischen Begriffe der Beweisbarkeit von Formeln, der Herleitbarkeitsbeziehung zwischen Formeln und der deduktiven Gültigkeit von Argumentformen auf Aussagesätze und Argumente der *natürlichen Sprache* erweitern. Wir werden darauf weiter unten zurückkommen.

Schließlich lassen sich neben den Grundschlussregeln und den drei Metaregeln – welche zusammengenommen das von uns vorgegebene System des natürlichen Schließens *festlegen* – auch noch sogenannte *abgeleitete* Schlussregeln anwenden, wir müssen jedoch zuerst noch zeigen, dass diese auch zulässig sind.

Eine sehr praktische solche abgeleitete Schlussregel ist:

(HS) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ (Hypothetischer Syllogismus)

Wie diese Schlussregel aus den vorgegebenen Regeln abzuleiten ist, sollte mittlerweile klar sein: Ein konditionaler Beweis mit zwei Anwendungen des Modus Ponens reicht dafür hin. Wie immer dürfen dann für die Metavariaben 'A', 'B', 'C' beliebige aussagenlogische Formeln eingesetzt werden.

Weitere gebräuchliche abgeleitete Schlussregeln sind:

(KOMM-$\wedge$) $A \wedge B \vdash B \wedge A$ (Kommutativität der Konjunktion)

(KOMM-$\vee$) $A \vee B \vdash B \vee A$ (Kommutativität der Disjunktion)

(ASSOC1-$\wedge$) $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$ (Assoziativität der Konjunktion)

(ASSOC1-$\vee$) $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$ (Assoziativität der Disjunktion)

(IDEMP1-$\wedge$) $A \vdash A \wedge A$ (Idempotenz der Konjunktion 1)

(IDEMP2-$\wedge$) $A \wedge A \vdash A$ (Idempotenz der Konjunktion 2)

(IDEMP1-$\vee$) $A \vdash A \vee A$ (Idempotenz der Disjunktion 1)

(IDEMP2-$\vee$) $A \vee A \vdash A$ (Idempotenz der Disjunktion 2)

(DIST1) $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributivgesetz 1)

(DIST2) $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributivgesetz 2)

(DM1) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ (DeMorgansches Gesetz 1)

(DM2) $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$ (DeMorgansches Gesetz 2)

Alle diese Hilfsregeln lassen sich auf Basis unserer eigentlich vorgegebenen Regeln herleiten. Die abgeleiteten Schlussregeln sind also eigentlich nicht mehr als "mnemotechnisch" nützliche Kurzschreibweisen für Herleitungen, die sich rein durch Anwendungen unserer eigentlichen Regeln durchführen lassen.

Auf ähnliche Weise könnten wir übrigens auch so manche Grundschlussregel als redundant, d.h. als nicht unabhängig von den anderen vorgegebenen Regeln nachweisen. Z.B.:

(DIS) $A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C$

1. $A \to C$ (P1)

2. $\underline{B \to C}$ (P2)

3. $\| \; A \lor B$ (KB-Annahme)

4. $\| \; \| \; A$ (FU-Annahme 1)

5. $\| \; \| \; C$ 4., 1. (MP)

6. $\| \; \| \; \neg A$ (FU-Annahme 2)

7. $\| \; \| \; B$ 3., 6. (DS1)

8. $\| \; \| \; C$ 7., 2. (MP)

9. $\| \; C$ 4.–8. (FU)

10. $A \lor B \to C$ 3.–9. (KB)

(TS) $A \vdash A$

1. $\underline{A}$ (P1)

2. $A \land A$ 1., 1. (KON)

3. A 2. (SIMP1)

(MT) $A \to B, \neg B \vdash \neg A$

1. $A \to B$ (P1)

2. $\underline{\neg B}$ (P2)

3. $\| \; \neg\neg A$ (IB-Annahme)

4. $\| \; A$ 3. (DN2)

5. $\| \; B$ 4., 1. (MP)

6. $\| \; B \land \neg B$ 5., 2. (KON)

7. $\neg A$ 3.–6. (IB)

Wir hätten demnach darauf verzichten können, DIS, TS und MT als Grundschlussregeln vorauszusetzen, solange nur alle Regeln vorgesetzt werden könnten, die wir gerade eben bei der Herleitung von DIS, TS und MT verwendet haben.

Auch wenn dies interessant sein mag: Im Rahmen unseres System müssen wir diese Regeln freilich gar nicht ableiten, da wir sie uns zur freien Verwendung schlichtweg vorgegeben haben.

6.6 Korrektheit und Vollständigkeit von $\vdash$

Aus den Beispielen sollte schon offensichtlich geworden sein, welche syntaktischen Begriffe nun welchen semantischen Begriffen korrespondieren:

- Herleitbarkeit entspricht der logischen Folge,
- Beweisbarkeit entspricht der Tautologizität,
- deduktive Gültigkeit entspricht der logischen Gültigkeit.

Es lässt sich auf der Grundlage unserer exakten quasi-mathematischen Begriffsbildung sogar *beweisen*, dass diese Begriffe jeweils zueinander in folgenden *extensionalen* Zusammenhängen stehen (wobei wir kurz '$\models A$' für 'A ist tautologisch' schreiben):

- Korrektheit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$:
    Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $A_1, \ldots, A_n \models B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: Wenn $\vdash A$, dann $\models A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: Wenn $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ deduktiv gültig ist, dann ist $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig.

Sowie:

- Vollständigkeit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$:
    Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, dann $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: Wenn $\models A$, dann $\vdash A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: Wenn $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig ist, dann ist $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ deduktiv gültig.

Während die Korrektheit sicherstellt, dass "nicht zu viel" in unserem System des natürlichen Schließens hergeleitet werden kann, sorgt die Vollständigkeit dafür, dass "nicht zu wenig" hergeleitet werden kann, dass also die Herleitbarkeit nicht gegenüber der logischen Folge zurückfällt. Korrektheit und Vollständigkeit zusammengenommen ergeben schließlich die extensionale Übereinstimmung der zueinander korrespondierenden syntaktischen bzw. semantischen Begriffe:

- Korrektheit und Vollständigkeit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ gdw $A_1, \ldots, A_n \models B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: $\vdash A$ gdw $\models A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ ist deduktiv gültig gdw $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig ist.

Den Beweis für diese Behauptungen werden wir an dieser Stelle nicht erbringen. Aber ein solcher lässt sich genauso präzise führen wie Beweise über Zahlen, Funktionen und Mengen in der Mathematik.

6.7 Übertragung der Definitionen auf Aussagesätze und Argumente

Wie schon zuvor im Kapitel 5 zur aussagenlogischen Semantik lassen sich auch in diesem Kapitel alle Definitionen von Begriffen für aussagenlogische Formeln und Argumentformen auf Aussagesätze und Argumente in der natürlichen Sprache erweitern. Insbesondere nennt man einen Aussagesatz aus weiteren Aussagesätzen herleitbar gdw dies für die jeweiligen logischen Formen dieser Sätze der Fall ist; einen Aussagesatz nennt man beweisbar gdw seine logische Form beweisbar ist; und ein Argument wird deduktiv gültig genannt gdw die zugehörige Argumentform des Argumentes deduktiv gültig ist.

6.8 Weitere Arten von Systemen des Schließens

Das System logischer Schlussregeln, das wir in diesem Kapitel eingeführt haben, ist nur eines unter vielen, welche im Laufe der Jahrzehnte für die Aussagenlogik entwickelt wurden. Alle diese Systeme bedienen sich der deduktiven Methode – der Methode des Herleitens – und alle von ihnen gehen rein syntaktisch vor; die Weise, in der diese Methode angewandt wird – die Form der sogenannten Herleitungsordnung – unterscheidet sich jedoch von einem System zum anderen:

- *Axiomatische Systeme (Hilbert-Kalküle)* legen vornehmlich Axiome fest – Einsetzungsmöglichkeiten in Schemata wie $A \vee \neg A$, $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ und dergleichen mehr – und dann typischerweise nur sehr wenige Regeln, manchmal auch nur eine einzige Regel (typischerweise der Modus Ponens). David Hilbert, einer der größten Mathematiker des endenden

19. Jahrhunderts und des beginnenden 20. Jahrhunderts, förderte die Verbreitung dieser Art von deduktiven Systemen.

- *Systeme des natürlichen Schließens*, die u.a. auf den deutschen Logiker Gerhard Gentzen zurückgehen, bevorzugen Regeln gegenüber Axiomen, lassen annahmenbasierte Regeln zu (anders als in den axiomatischen Systemen) und versuchen, den intuitiven Beweisschritten in der Mathematik durch solche Regeln möglichst nahe zu kommen. Das von uns vorgestellte logische System ist eine Variante eines solchen Systems des natürlichen Schließens.

- *Sequenzenkalküle*, die ebenfalls von Gerhard Gentzen entwickelt wurden, bauen Herleitungen auf der Basis von Regeln auf, die unseren Metaregeln von oben ähneln: Die Regeln im Sequenzenkalkül sind also typischerweise "Schlüssen von Schlüssen auf Schlüsse".

- *Semantische Tableaux-Systeme* (Beth-Kalküle, Baumkalküle), welche von dem niederländischen Logiker Evert Willem Beth eingeführt wurden, sind logische Regelsysteme, die danach trachten, die Herleitungsregeln möglichst den Wahrheitstafeln für die aussagenlogischen Junktoren nachzubilden, sodass sich eine Art syntaktisch-semantische Mischform des regelgeleiteten Schließens ergibt.

Diese verschiedenen Weisen, eine Herleitungsordnung festzulegen, haben alle ihre spezifischen Vor- und Nachteile: Manche sind sehr bequem, was das tatsächliche Herleiten betrifft (z.B. die Systeme des natürlichen Schließens), andere sind sehr leicht auf der Metaebene überschaubar und analysierbar (z.B. die axiomatischen Systeme), wieder andere erlauben auf der Metaebene den Beweis tiefliegender mathematischer Sätze über das Herleiten (z.B. die Sequenzenkalküle). Aber alle sind so aufgebaut, dass sie zu einem Herleitbarkeitsbegriff für die Aussagenlogik führen, der sich gemessen an dem semantischen Begriff der logischen Folge als korrekt und vollständig erweist.

Damit wäre die Aussagenlogik in allen ihren zentralen Teilen – der Definition der aussagenlogischen Sprache, der Definition der wesentlichen semantischen Begriffe (speziell der logischen Folge) und der Definition der wesentlichen syntaktischen Begriffe (speziell der Herleitbarkeit) – abgeschlossen. Darüber hinaus haben wir ausführlich behandelt, wie sich die Aussagenlogik zur logischen Repräsentierung und zur logischen Analyse von Aussagesätzen und Argumenten der natürlichen Sprache einsetzen lässt. Schließlich haben wir damit auch unseren nächsten Schritt vorbereitet: Die aussagenlogische Sprache und alle wichtigen semantischen und syntaktischen Begriffe der Aussagenlogik zur sogenannten *Prädikatenlogik* zu erweitern. Dies wird das Thema des zweiten Teiles dieses Buches sein.