

Kapitel 7

Appendix: Nochmals die materiale Implikation

Wir hatten in Kapitel 5 die etwas gewöhnungsbedürftige Wahrheitstafel der materialen Implikation kennengelernt. Wie wir schnell feststellen konnten, war diese die einzige Wahrheitstafel, die überhaupt für eine semantische Charakterisierung der natursprachlichen ‘wenn... dann...’ Verknüpfung (im Indikativ) mittels einer Wahrheitstafel mit klassischen Wahrheitswerten in Frage kam. Was zu jenem Zeitpunkt aber offengeblieben war: Wieso sollte es überhaupt möglich sein, das ‘wenn... dann...’ auf Basis einer solchen Wahrheitstafel zu interpretieren? *Welche positiven Gründe könnte man wohl dafür angeben, dass diese Wahrheitstafel das natursprachliche ‘wenn... dann...’ hinreichend gut einfängt?*

Ohne dies an den nämlichen Stellen weiter zu vertiefen, haben wir im letzten Kapitel ein ebensolches Argument zugunsten der Wahrheitstafel der materialen Implikation angegeben. Wir haben nämlich – neben vielen anderen Herleitungen – auch folgende Herleitungen durchgeführt:

- $\neg p \vee r \vdash p \rightarrow r$

1. $\neg p \vee r$ (P1)

2. $\parallel p$ (KB-Annahme)

3. $\parallel \neg\neg p$ 2. (DN1)

4. $\parallel r$ 1., 3. (DS1)

5. $p \rightarrow r$ 2.-4. (KB)

- $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$
 1. $p \rightarrow q$ (P1)
 2. $\parallel p$ (FU-Annahme 1)
 3. $\parallel q$ 2., 1. (MP)
 4. $\parallel \neg p \vee q$ 3. (ADD2)
 5. $\parallel \neg p$ (FU-Annahme 2)
 6. $\parallel \neg p \vee q$ 5. (ADD1)
 7. $\neg p \vee q$ 2.–6. (FU)

Anders ausgedrückt: $\neg p \vee r$ und $p \rightarrow r$ haben sich als deduktiv ununterscheidbar herausgestellt! Die eine Formel ist jeweils aus der anderen ableitbar. Dieselben Herleitungen ließen sich übrigens selbstverständlich auch durchführen, wenn man ‘ p ’ durch ‘ A ’ und ‘ q ’ durch ‘ B ’ ersetzen würde. Das heißt aber auch: Wer immer alle der folgenden Herleitungsregeln für akzeptabel hält, der muss dann auch $\neg A \vee B$ und $A \rightarrow B$ als für alle logischen Zwecke “gleichwertig” erachten:

- (MP) $A, A \rightarrow B \vdash B$ (Modus Ponens)
- (DS1) $A \vee B, \neg A \vdash B$ (Disjunktiver Syllogismus 1)
- (ADD1) $A \vdash A \vee B$ (Addition 1)
- (ADD2) $B \vdash A \vee B$ (Addition 2)
- (DN1) $A \vdash \neg\neg A$ (Doppelte Negation 1)
- (KB) Wenn $A_1, \dots, A_n, B \vdash C$ eine Schlussregel ist, so ist auch $A_1, \dots, A_n \vdash B \rightarrow C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \dots, A_n, B \vdash C}{A_1, \dots, A_n \vdash B \rightarrow C}$$

- (FU) Wenn $A, B_1, \dots, B_n \vdash C$ und $\neg A, B_1, \dots, B_n \vdash C$ Schlussregeln sind, dann ist auch $B_1, \dots, B_n \vdash C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A, B_1, \dots, B_n \vdash C \quad \neg A, B_1, \dots, B_n \vdash C}{B_1, \dots, B_n \vdash C}$$

Denn nur auf diesen Regeln fußt die wechselseitige Ableitbarkeit von $\neg A \vee B$ und $A \rightarrow B$. Die Wahrheitstafel von $\neg A \vee B$ ist aber gerade die der materialen Implikation. Und dass diese Wahrheitstafel für die semantische Analyse von $\neg A \vee B$ gut geeignet ist, ist kaum zu bestreiten. Dann sollte dieselbe Wahrheitstafel aber auch ebensogut für die semantische Analyse der Formel $A \rightarrow B$ geeignet sein, denn diese ist – siehe oben – deduktiv “gleichwertig”. Was auch heißt: Wenn unsere Herleitungsregeln semantisch korrekt sind, sollten $\neg A \vee B$ und $A \rightarrow B$ auch semantisch “gleichwertig”, also logisch äquivalent sein; d.h.: dieselbe Wahrheitstafel besitzen. Die oben ausgedrückten Herleitbarkeitsbeziehungen, die zumindest für das ‘wenn-dann’ im Indikativ sehr plausibel scheinen, stellen also einen sehr guten Grund dar zu glauben, dass das natursprachliche ‘wenn-dann’ im Indikativ der Wahrheitstafel der materialen Implikation genügt.

Oder aber man bestreitet wenigstens eine der Herleitungsregeln, die oben angeführt sind: Wenn Sie an der Repräsentierbarkeit des ‘wenn... dann...’ mittels der materialen Implikation zweifeln, welche der obigen Herleitungsregeln würden Sie denn aufgeben wollen?

(Wir werden im zweiten Teil dieses Buches, welcher der Prädikatenlogik gewidmet sein wird, auch noch ein weiteres Argument zugunsten der Wahrheitstafel der materialen Implikation kennenlernen.)