Teil II

Prädikatenlogik

Kapitel 8

Prädikatenlogische Repräsentierung

In Kapitel 2 haben wir als eine Kategorie komplexer aber aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesätze die der *generellen Sätze* genannt, insbesondere derjenigen Sätze, die dieselbe logische Form aufweisen wie die Sätze

- Alle Österreicher sind strebsam und fleißig.
- Es gibt Österreicher, die strebsam und fleißig sind.

Solche Sätze nennt man Allsätze und Existenzsätze. Im Rahmen der prädikatenlogischen Sprache werden Sätze dieser Art nunmehr *zerlegbar* sein.

In gewissem Sinne ist die Prädikatenlogik eine Erweiterung der Aussagenlogik. In den folgenden Kapiteln möchten wir präzisieren, in *welchem* Sinne die Prädikatenlogik die Aussagenlogik erweitert. Wir haben bereits behandelt, was ein logisches System ist. Ein solches besteht aus drei Komponenten: Einer Sprache, einer Semantik und einer Herleitungsordnung. Wir wollen dementsprechend in Folge genau diese drei Themen behandeln und wenden uns zuerst der prädikatenlogischen Sprache zu. Dann werden wir eine formale Semantik für die Prädikatenlogik kennenlernen, in der wir die Begriffe der prädikatenlogischen Interpretation sowie der prädikatenlogischen Wahrheit, logischen Folge, logischen Gültigkeit und Erfüllbarkeit definieren werden. Schließlich werden wir unseren aussagenlogischen Kalkül des natürlichen Schließens um prädikatenlogische Schlussregeln erweitern. Das Ziel wird letztendlich dasselbe sein wie in der Aussagenlogik, nämlich natursprachliche Aussagesätze und Argumente in einer formalen Sprache zu repräsentieren, um auf diese Weise die präzisen Definitionen diverser wichtigen semantischen und deduktiven Begriffe, welche die formale Zielsprache zulässt, auch auf die na-

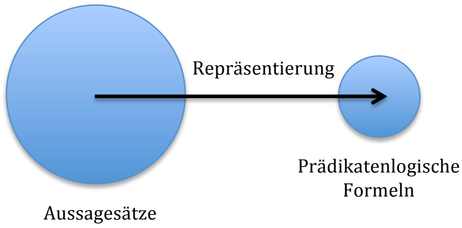

Abbildung 8.1: Prädikatenlogische Repräsentierung

türliche Sprache übertragen zu können. Nur wird sich die formale Sprache der Prädikatenlogik als bei weitem ausdrucksstärker und gehaltvoller als die einfache Sprache der Aussagenlogik herausstellen.

Wir beginnen zunächst mit einer mehr oder weniger “intuitiven” Erläuterung der prädikatenlogischen Sprache, und zwar zunächst soweit, als diese zum – verglichen mit dem aussagenlogischen Niveau – “feingliedrigeren” Repräsentieren von natursprachlichen Sätzen und Argumenten eingesetzt werden kann.

Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zur aussagenlogischen Sprache:

(i) Die *atomaren Formeln* verhalten sich anders – sie sind zerlegbar, wenn auch nicht in weitere Formeln, sondern in Zeichen anderer Art.

(ii) Es werden zusätzliche logische Zeichen – die *Quantoren* – eingeführt, um damit eine neue Kategorie komplexer Formeln bilden zu können, nämlich die der All- und Existenzformeln.

Beginnen wir mit dem ersten Punkt: In der aussagenlogischen Sprache repräsentierten wir den Satz

- Herbert ist Oberösterreicher.

als:

- p

Die Menge der Aussagevariablen nannten wir auch: die Menge der atomaren Formeln unserer aussagenlogischen Sprache. In der Prädikatenlogik bleiben wir nun nicht bei solch einfachen Repräsentierungen einfacher Aussagesätze stehen, sondern wir betrachten einen einfachen Aussagesatz wie den obigen als zerlegbar in weitere logisch sinnvolle (wenn auch nicht satzartige) Teile. In dem obigen deutschen Aussagesatz wird dem Namen (singulären Term) ‘Herbert’ ein einstelliges Prädikat (einstelliger genereller Term) ‘Oberösterreicher’ beigelegt, und wir erhalten dadurch einen einfachen Aussagesatz. Diese

Struktur spiegelt sich in der prädikatenlogischen Sprache wider, indem wir den umgangssprachlichen Satz etwa wie folgt repräsentieren:

- $O(h)$

Dabei soll O eine Abkürzung für 'Oberösterreicher' und h eine Abkürzung für 'Herbert' sein. Wir schreiben also immer zuerst den (n-stelligen) generellen Term an, sodann eine linke Klammer, dann n singuläre Terme (getrennt durch Beistriche) und schließlich eine rechte Klammer. Dass wir 'Herbert' dabei durch ein formales Zeichen repräsentieren, das wir mit 'h' bezeichnen, ist natürlich recht willkürlich gewählt – wir hätten genauso gut die Bezeichnung 'a' oder 'b' wählen können – nur erinnert 'h' eben mehr an 'Herbert'. Eine wichtigere Konvention besteht darin, singuläre Terme durch Kleinbuchstaben abzukürzen und generelle Terme durch Großbuchstaben, und an diese Konvention werden wir uns im Folgenden auch halten.

Ein Aussagesatz der obigen Form ist von der allereinfachsten Art – *ein* genereller Term und *ein* singulärer Term. Wir wollen bereits hier ein wenig die semantische Intuition, die hinter solchen Sätzen steckt, kennenlernen, damit wir atomare Aussagesätze später besser erkennen können.

Ein singulärer Term von der Art eines Eigennamens bzw. – wie wir später in unserer formalen Sprache sagen werden – eine *Individuenkonstante* bezeichnet immer genau ein Ding in der "Welt". Unser h bezeichnet die Person Herbert; stellen wir uns vor, es wäre eine ganz bestimmte Person damit gemeint. Diese Person Herbert ist also das *Referenzobjekt* des Terms h; der Term h bezieht sich auf (referiert auf) Herbert.

Von generellen Termen sagt man üblicherweise, dass sie Eigenschaften oder Relationen – zusammengenommen: Attribute – ausdrücken. Wir haben aber bereits in der Aussagenlogik angedeutet, dass die klassische Aussagen- und Prädikatenlogik eine *rein extensionale* Logik ist. Eigenschaften gehören jedoch in den Bereich der *Intensionen*. Daher wendet man sich in der Prädikatenlogik einem "extensionalen Korrelat" von Attributen zu, also einer Extension oder was man in der (etwas verstaubten) Tradition 'Begriffsumfang' zu nennen pflegt. Im Falle eines einstelligen Prädikats umfaßt dieser Begriffsumfang genau diejenigen Dinge, die die durch den generellen Term ausgedrückte Eigenschaft besitzen. Unser Term O drückt die Eigenschaft, Oberösterreicher zu sein, aus. Also ist die Extension dieses Terms die Menge aller Dinge, die die Eigenschaft, Oberösterreicher zu sein, besitzen – also die Menge aller Oberösterreicher. Nun ist es einfach festzulegen, in welchem Fall ein solcher einstelliger atomarer Satz wahr bzw. falsch ist. Er ist nämlich genau dann wahr, wenn das Ding, welches von dem in ihm vorkommenden singulären Term bezeichnet wird, Element der Menge ist, die die Extension des in ihm vorkommenden generellen Terms ist. Sonst ist er falsch. $O(h)$ ist also wahr genau dann, wenn das von h bezeichnete Ding – Herbert – ein Element der Extension von O ist – der Menge der Oberösterreicher.

Generelle Terme können aber natürlich auch mehr als nur einstellig sein; in diesem Falle gehen sie auch mit mehr als nur einem singulären Term einher. Beispiele für solche natursprachlichen Aussagesätze wären:

- Die Erde kreist um die Sonne.
- Heinz Fischer ist Bundespräsident von Deutschland.
- Herbert fährt von Linz nach Wien.

Entsprechende Repräsentierungen dafür sind:

- $K(e, s)$
- $B(f, d)$
- $F(h, l, w)$

Hier haben wir zwei- und dreistellige generelle Terme bzw. Prädikate verwendet.

Die Semantik für atomare Sätze mit mehr als nur einem singulären Term ist ganz ähnlich der Semantik der Sätze mit einstelligen generellen Termen. Allein die Wahrheitsbedingungen sind etwas komplizierter. Wir werden diese bald – bei der Festlegung der formalen Semantik für die Prädikatenlogik – genauer kennenlernen.

Formeln der bislang behandelten Art nennen wir 'atomare Formeln' der prädikatenlogischen Sprache; die atomaren Formeln in der Prädikatenlogik sind also ganz anders beschaffen als die atomaren Formeln in der Aussagenlogik – die prädikatenlogischen atomaren Formeln sind sozusagen der "prädikatenlogische Ersatz" für die aussagenlogischen Aussagenvariablen. Wir legen also fest:

- *Atomare Formeln* sind Folgen von $n + 1$ sprachlichen Ausdrücken, deren erstes Glied ein n-stelligen Prädikatzeichen ist, und deren zweites bis $n + 1$-tes Glied n singuläre Terme sind (die wir als von Klammern umschlossen kennzeichnen und durch Kommata voneinander trennen); sie haben also die allgemeine Form

$$P^n(t_1, \ldots, t_n)$$

Atomare Formeln werden zur prädikatenlogischen Repräsentierung von einfachen Aussagesätzen in der natürlichen Sprache dienen. Dies sollte nun auch nicht mehr überraschend sein: Haben wir doch im Kapitel zur aussagenlogischen Analyse *einfache* Aussagesätze der *natürlichen* Sprache auf ganz ähnliche Art und Weise wie oben die *atomaren* Formeln der *prädikatenlogischen* Sprache charakterisiert.

Wir haben oben bereits erwähnt, dass die Analyse der atomaren Formeln nicht der einzige Unterschied zur aussagenlogischen Sprache ist, den wir in der prädikatenlogischen Sprache finden. Nehmen wir beispielsweise an, dass wir Folgendes behaupten:

- Die Erde ist ein Planet.

Dann dürfen wir doch daraus logisch folgern:

- Es gibt (mindestens einen) Planeten.

Denn wenn es wahr ist, dass die Erde ein Planet ist, dann ist es nicht möglich, dass es keine Planeten gibt – es existiert ja zumindest ein Beispiel, welches wir prinzipiell angeben könnten, wenn wir die Existenzbehauptung als wahr nachweisen wollten. In der Aussagenlogik könnten wir einen solchen Schluss jedoch gar nicht rekonstruieren: Aussagenlogisch betrachtet führt der obige Schluss nämlich von einer Aussagenvariablen p zu einer weiteren Aussagenvariablen q, und der Schluss von p auf q ist selbstverständlich nicht (aussagen-)logisch gültig. Dass der obige Schluss dennoch in einem Sinn logisch gültig ist, der über die Aussagenlogik hinausgeht, muss daran liegen, dass logische Zeichen in ihm vorkommen, denen wir im Rahmen der Aussagenlogik keine Bedeutung hätten zuweisen können. In der Tat kommt in dem letzteren Aussagesatz von oben ein neuer logischer Ausdruck vor, nämlich ‘Es gibt’ bzw. ‘Es gibt mindestens einen’ (‘es gibt wenigstens einen’, ‘es existiert’). Dieser Ausdruck wird in der prädikatenlogischen Sprache durch ein über die vertikale Achse gespiegeltes ‘E’ wiedergegeben,

$$\exists$$

und er geht immer mit einer sogenannten Individuenvariable – etwa x – einher. Dieser Ausdruck $\exists$ heißt *Existenzquantor*. Wir schreiben also statt:

- Es gibt mindestens einen/eine/ein x

in unserer formalen prädikatenlogischen Sprache:

- $\exists x$

Wenn wir nun ‘Die Erde ist ein Planet’ in der prädikatenlogischen Sprache wie folgt repräsentieren

- $P(e)$,

dann repräsentieren wir den Aussagesatz 'Es gibt Planeten' entsprechend so:

- $\exists x P(x)$.

Wir lesen diese Formel in "reglementiertem Logiker-Deutsch":

- Es gibt mindestens ein x, sodass x ein P (ein Planet) ist.

oder auch

- Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: x ist ein P (ein Planet).

Formeln der obigen Art nennen wir *Existenzformeln* oder *existentiell quantifizierte Formeln*. Wir sehen, dass die Variable x in der vorigen Formel *zweimal* vorkommt. Einmal steht sie hinter dem Quantor, und ein anderes Mal ist sie Bestandteil der atomaren Formel $P(x)$. In dem Existenzsatz ist von der Erde nicht mehr die Rede – ein Name für einen konkreten Gegenstand kommt in der Tat gar nicht mehr vor, sondern nur mehr eine Individuenvariable, die sozusagen "für einen beliebigen Gegenstand steht". Es wird nur mehr die Existenz von Planeten behauptet, nicht aber die Existenz des konkreten Planeten Erde. Die Existenz *irgendeines* Planeten reicht ja auch hin, um den Existenzsatz als wahr nachzuweisen. Die atomare Formel $P(x)$, welche Bestandteil der Existenzformel $\exists x P(x)$ ist, sagt für sich genommen *nichts* aus – sie ist eigentlich *nicht wahrheitswertfähig*, d.h., sie hat keinen wohlbestimmten Wahrheitswert, jedenfalls solange nicht, bis der Variable x ein spezifischer Wert gegeben wurde. Dies ist so ähnlich, wie wenn wir sagen:

- Das ist ein Planet,

wobei durch den Kontext nicht erkennbar ist, auf welches Ding sich 'das' bezieht. Auch dann ist eigentlich noch nicht festgelegt worden, ob dieser umgangssprachliche Satz wahr oder falsch ist. Wir müssen entweder den Kontext verdeutlichen oder aber 'das' durch einen Eigennamen – z.B. 'die Erde' – ersetzen, um einen wahrheitswertfähigen Satz zu erhalten. Zum Beispiel könnten wir die Variable 'x' durch eine *Individuenkonstante* – etwa 'e' – ersetzen. Die daraus resultierenden Formel $P(e)$ (von welcher wir ursprünglich ja ausgegangen sind) ist nun sehr wohl wahrheitswertfähig, denn die Konstante e bezeichnet ein bestimmtes Ding, nämlich die Erde, welche ja ein Planet ist. Diese atomare Formel ist also wahr und mithin wahrheitswertfähig.

Die andere "Methode", aus der Formel $P(x)$ eine wahrheitswertfähige Formel zu "machen", besteht darin, einen Quantor mit der entsprechenden Individuenvariable davor zu setzen – wie oben bereits gezeigt. Die durch diese

Existenzformel ausgedrückte Behauptung, dass es mindestens einen Planeten gibt, ist dann ebenfalls wahrheitswertfähig und hier sogar wahr.

Wir sehen also, dass wir in der Prädikatenlogik zwischen zwei Arten von Formeln unterscheiden können und müssen – denen, die ohne weitere Angaben wahr oder falsch sein können und denen, die dies nicht sein können (ohne Zuweisung eines Wertes zu einer Variablen oder dergleichen). Erstere Formeln werden wir später als *geschlossen* bezeichnen, zweitere Formeln als *offen*.

Wenden wir uns noch einem weiteren Beispiel zu: Der natursprachliche Satz

- Es gibt weibliche Universitätsprofessoren.

wird wie folgt repräsentiert:

- $\exists x(W(x) \wedge U(x))$

Denn der vorige Satz heißt doch nichts anderes als: Es gibt Universitätsprofessoren, die auch weiblich sind. Bzw.: Es gibt jemanden, der weiblich *und* Universitätsprofessor ist. (Die Reihenfolge von 'weiblich' und 'Universitätsprofessor' ist dabei nicht wirklich wichtig.)

Und der Satz

- Es gibt Universitätsprofessoren, die nicht weiblich sind.

wird repräsentiert mittels:

- $\exists x(U(x) \wedge \neg W(x))$

Hier wollen wir uns gleich die entsprechende Faustregel des Repräsentierens von Existenzsätzen merken:

(E) Natursprachliche *Existenzsätze*, in denen im Bereich des Quantors mehr als ein genereller Term vorkommt, werden meist durch eine Existenzformel repräsentiert, welche eine Konjunktionsformel enthält.

Denn wenn man sagt, dass es P-Dinge gibt, die auch Q-Dinge sind, dann sagt man doch nicht anderes als: Es gibt etwas, das ein P-Ding *und* ein Q-Ding ist.

In der Prädikatenlogik (wie z.B. auch in der Mathematik) werden in der Tat alle Sätze der folgenden Arten auf ein und dieselbe Weise mit Hilfe des Existenzquantors repräsentiert, nämlich mittels

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)):$$

- Es gibt etwas, das P und Q ist.
  (Z.B.: Es gibt etwas, das ein Mensch und sterblich ist.)

- Es gibt einige Dinge, die P und Q sind.
  (Z.B.: Es gibt einige Dinge, die Mensch und sterblich sind.)

- Es gibt einige P, die Q sind.
  (Z.B.: Es gibt einige Menschen, die sterblich sind.)

- Einige P sind Q.
  (Z.B.: Einige Menschen sind sterblich.)

- Manche P sind Q.
  (Z.B.: Manche Menschen sind sterblich.)

- Es gibt mindestens ein x, sodass x P ist und x Q ist.
  (Z.B.: Es gibt mindestens ein x, sodass x ein Mensch ist und x sterblich ist.)

D.h.: 'Einige' wird so verstanden, dass 'Einige sind so-und-so' auch wahr ist, wenn *genau ein* Ding so-und-so ist, so wie 'Einige sind so-und-so' auch wahr ist, wenn *alle* Dinge so-und-so sind (solange überhaupt nämliche Dinge existieren). 'Einige' meint also einfach nur *Existenz*, egal ob von genau einem Ding oder von vielen oder sogar von allen: $\exists x$ lässt schlichtweg offen, wie viele der nämlichen Dinge existieren. Die Unterschiede, die in der täglichen Kommunikation manchmal zwischen 'es gibt' und 'einige' gemacht werden, werden als zur Pragmatik natursprachlicher Äußerungen gehörig betrachtet und scheinen im logischen Existenzquantor nicht mehr auf. (Analoges gilt für 'manche'.) Ähnliches gilt auch für Äußerungen wie von 'Einige der Fußballspieler sind schon am Feld', die manchmal auch so verstanden werden, dass noch nicht alle Fußballspieler am Feld sind; dies ist bei existentiell quantifizierten Formeln *nicht* der Fall. Auf der anderen Seite lässt sich auch in der natürlichen Sprache durchaus sagen: 'Einige Fußballspieler sind schon am Feld, *ja sogar alle.*' Was so interpretiert werden kann, dass 'Einige der Fußballspieler sind schon am Feld' zumindest semantisch doch offen lässt, ob vielleicht doch auch alle der Fußballspieler schon am Feld sind. Es hängt dann vom Äußerungskontext ab, ob man zusätzlich zu der in der Äußerung semantisch enthaltenen Information weitere bloß pragmatische Informationskomponenten in die Äußerung "hineininterpretiert" oder auch nicht.

In der Prädikatenlogik darf man daher eine existentiell quantifizierte Formel wie

- $\exists x(U(x) \land \neg W(x))$

die

- Es gibt Universitätsprofessoren, die nicht weiblich sind.

repräsentiert, auch so lesen:

- Einige Universitätsprofessoren sind nicht weiblich.

bzw.

- Manche Universitätsprofessoren sind nicht weiblich.

Diese behaupten prädikatenlogisch auch nichts anderes als die Existenz von Universitätsprofessoren, die keine Frauen sind.

Neben dem Existenzquantor kommt in der prädikatenlogischen Sprache noch ein weiterer "ähnlich gearteter" Ausdruck vor, nämlich der *Allquantor*. Dieser Ausdruck wird durch ein über die horizontale Achse gespiegeltes 'A' wiedergegeben,

$$\forall$$

und er geht ebenfalls immer mit einer Individuenvariable einher:

- $\forall x$

Der natursprachliche Satz

- Alles ist materiell.

wird dann wie folgt repräsentiert:

- $\forall x M(x)$.

Formeln dieser Art nennen wir *Allformeln* oder *universell quantifizierte Formeln*. Und wir lesen die obige Formel etwas genauer als

- Für alle Dinge x gilt, dass x M (materiell) ist.

oder auch als

- Für alle Dinge x gilt: x ist M (materiell).

Wir können natürlich daraus, dass irgendein konkretes Ding, etwa der Salzburger Dom materiell ist, *nicht* auf den obigen Allsatz schließen. Umgekehrt läßt sich aber *aus* dem Allsatz, dass alle Dinge materiell sind, schließen, dass der Salzburger Dom materiell ist:

- $M(s)$

Dies könnten wir nun unter Voraussetzung des Allsatzes sogar für jedes beliebige Ding behaupten, also etwa auch für die Ludwig-Maximilians-Universität, Bertrand Russell und ebenso für die Zahl 2. Denn angenommen wirklich alles wäre materiell, dann müsste doch auch logisch folgen, dass u.a. auch die Ludwig-Maximilians-Universität, Bertrand Russell und die Zahl 2 materiell wären. 'Ding' in den Sätzen oben meint also etwas ganz und gar Allgemeines: Stattdessen könnte man auch 'Objekt' oder 'Gegenstand' sagen, aber in einem Sinne, in dem *alles* ein Objekt oder ein Gegenstand ist: Universitäten, Menschen, Zahlen,...

Oder man lässt 'Ding' überhaupt gleich weg:

- Für alle x gilt, dass x M (materiell) ist.

bedeutet nämlich genau dasselbe wie die nämlichen obigen Sätze.

Der Satz

- Alle Salzburger sind Österreicher.

wird entsprechend so repräsentiert,

- $\forall x(S(x) \to \ddot{O}(x))$.

Denn der Satz behauptet doch so viel wie: Für alle Dinge x gilt, wenn x ein Salzburger ist, dann ist x auch ein Österreicher.

Analog wird

- Alle Salzburger sind keine Deutsche.

mittels

- $\forall x(S(x) \to \neg D(x))$.

Genau dieselbe logische Form weist übrigens auch der Aussagesatz

- Kein Salzburger ist ein Deutscher.

auf: Denn dieser Satz besagt ja auch nur wieder, dass alle Salzburger Nicht-Deutsche sind.

Hier wollen wir uns die entsprechende Faustregel für das Repräsentieren von Allsätzen mit mehreren generellen Termen merken:

(A) Natursprachliche *Allsätze*, in denen im Bereich des Quantors mehr als ein genereller Term vorkommt, werden meist durch eine Allformel repräsentiert, welche eine Implikationsformel enthält.

Denn wenn man sagt, dass alle P-Dinge auch Q-Dinge sind, dann sagt man doch nicht anderes als: Für jedes Ding gilt, dass *wenn* es ein P-Ding ist, es auch ein Q-Ding ist.

Wenden wir uns nun einem philosophisch etwas interessanterem Beispiel zu:

- Alles hat eine Ursache.

Überlegen wir uns zuerst die logische Form dieses Satzes, indem wir diesen ein wenig reglementiert umformulieren, um seine logische Tiefstruktur mit Hilfe prädikatenlogischer Mittel sichtbar machen:

- Für alle x gilt: Es gibt ein y, sodass y die Ursache von x ist.

Damit ist es nun ein Leichtes, die prädikatenlogische Form des Satzes anzugeben:

- $\forall x \exists y U(y, x)$.

Wir sehen also, dass All- und Existenzquantoren auch gemischt vorkommen können. Wie sieht nun die prädikatenlogische Form von

- Es gibt etwas, das für alles eine Ursache ist.

aus? Offensichtlich muss das die Formel

- $\exists x \forall y U(x, y)$

sein. Diese beiden Sätze – und ihre Repräsentierungen – behaupten selbstverständlich etwas völlig Unterschiedliches, was an der Stellung der Quantoren deutlich wird. Im erstem Fall gibt es zwar eine Ursache für jedes Ding, es könnte aber sein, dass all diese Ursachen oder zumindest manche davon verschieden voneinander sind. Im zweiten Fall behaupten wir, dass es zumindest ein Ding gibt, welches für jedes Ding eine Ursache ist – damit hat aber jedes Ding dann ein und dieselbe Ursache bzw. ein und dieselben Ursachen, wenn es mehrere davon geben sollte.

Bringen wir noch ein weiteres Beispiel, einmal natursprachlich formuliert, dann etwas reglementiert wiedergegeben, schließlich prädikatenlogisch repräsentiert:

- Jeder Mensch hat einen Vater.
- Für alle x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gibt es ein y, so dass y der Vater von x ist.
- $\forall x(M(x) \rightarrow \exists y V(y, x))$

Wenn wir beim Repräsentieren mehrere Quantoren in einer Formel verwenden, so müssen wir darauf achten, dass wir die Individuenvariablen, welche durch die Quantoren *gebunden* werden, richtig wählen. Hätten wir dies in letzterem Beispiel nicht beachtet, so hätten wir beispielsweise Folgendes erhalten können:

- $\forall x(M(x) \rightarrow \exists x V(x,x))$

Und dies besagt nicht das, was wir behaupten wollten, sondern vielmehr so etwas wie:

- Für alle Menschen gibt es etwas, das Vater von sich selbst ist.

Es stellt sich die Frage, ob wir ein formales Konstrukt wie $\forall x(M(x) \rightarrow \exists x V(x,x))$ überhaupt als Formel zulassen wollen oder nicht. In manchen prädikatenlogischen Sprachen wird verlangt, dass wir bei der Einführung eines neuen Quantors immer beachten, dass die Individuenvariable des Quantors nicht bereits in der zu quantifizierenden Formel durch einen anderen Quantor gebunden vorkommt. Wir wollen dies zwar toleranter handhaben, sodass sich $\forall x(M(x) \rightarrow \exists x V(x,x))$ später sehr wohl als korrekt gebildete prädikatenlogische Formel erweisen wird, beim Repräsentieren sollten wir jedoch immer die folgende dritte Faustregel des prädikatenlogischen Repräsentierens beachten:

(V) Kommen in einem natursprachlichen Satz *mehrere Quantoren* ineinander verschachtelt vor vor, so weise man den Quantoren in der Repräsentierung verschiedene Variablen zu.

'Ineinander verschachtelt' soll dabei heißen: Ein Quantor befindet sich in einem Teil eines Satzes, der in der Reichweite eines weiteren Quantors liegt, so wie etwa 'gibt es etwas, das ...' in obigem Beispielsatz im Bereich des Quantors 'Für alle (Menschen)' liegt.

Es ist auch möglich, zwei Existenzquantoren ineinander zu verschachteln: Zum Beispiel wird

- Es gibt eine Zahl, die kleiner als eine weitere Zahl ist.

durch

- $\exists x(Z(x) \land \exists y(Z(y) \land K(x,y)))$

repräsentiert.

Und ebenso lassen sich zwei Allquantoren ineinander verschachteln:

- Alle physikalischen Gegenstände sind mit allen physikalischen Gegenständen identisch.

wird zum Beispiel durch

- $\forall x(P(x) \to \forall y(P(y) \to x = y))$

wiedergegeben. (Der Aussagesatz ist selbstverständlich falsch, aber auch falsche Sätze sollen ja logisch repräsentiert werden können.)

Damit haben wir bereits alle sprachlichen Neuheiten der Prädikatenlogik kennengelernt: Atomare Formeln sind nunmehr strukturiert, wobei in ihnen singuläre und generelle Terme in einer bestimmten Reihenfolge vorkommen, und es gibt generelle Formeln mit Existenz- und Allquantoren, die sich beliebig ineinander verschachteln lassen. Daneben verwenden wir wieder die sprachlichen Ausdrücke, die uns bereits aus der aussagenlogischen Sprache bekannt sind – wie Junktoren und Hilfszeichen.

8.1 Prädikatenlogische Argumente und Argumentformen

Zur Repräsentierung von Argumenten haben wir natürlich auch in der Prädikatenlogik entsprechende Argumentformen zur Verfügung. Betrachten wir dazu das folgende einfache Argument:

Österreich ist ein Staat.

Daher gibt es Staaten.

Um ein Argument zu repräsentieren, repräsentieren wir – wie wir bereits aus der Aussagenlogik wissen – zuerst sämtliche Prämissen und dann die Konklusion. Die Prämisse des obigen Arguments wird wie folgt repräsentiert:

- $S(\ddot{o})$

Die Konklusion wird dann so repräsentiert:

- $\exists x S(x)$

Damit ergibt sich als prädikatenlogische Repräsentierung dieses Argumentes:

- $S(\ddot{o}) \therefore \exists x S(x)$

Etwas allgemeiner formuliert, ist diese Argumentform von der folgenden Form:

(EE) $A[t/v] \therefore \exists v A[v]$

Wir müssen hierbei noch erklären, was die Zeichenkette '$A[t/v]$' zu bedeuten hat. Es handelt sich dabei um eine sogenannte *Substitution* oder Ersetzung (Einsetzung): $A[t/v]$ ist diejenige Formel, die aus der Formel $A[v]$ dadurch entsteht, dass überall dort, wo die Variable v *frei*, d.h. nicht in der Reichweite eines Quantorausdrucks der Form $\exists v$ oder $\forall v$ vorkommt, diese Variable v durch den singulären Term t ersetzt wird. Angewandt auf das vorige Beispiel: Die Formel $A[v]$ war dort die atomare Formel $S(x)$, die Variable v somit die Variable x, der singuläre Term t war dort $\ddot{o}$, die Formel $A[t/v]$ war die Formel $S(\ddot{o})$ – das Resultat des Einsetzens von $\ddot{o}$ für die freie Variable x in $S(x)$ – und die Formel $\exists v A[v]$ war natürlich nichts anderes als $\exists x S(x)$. Der Grund, warum wir eckige Klammern in '$A[v]$' benutzen, ist der, dass wir mit Ausdrücken wie '$A[v]$' nur signalisieren wollen, dass wir letztlich alle freien Vorkommnisse der Variable v in der Formel $A[v]$ ersetzen wollen; $A[v]$ kann dabei eine atomare oder eine komplexe Formel sein. Verwenden wir jedoch runde Klammern, wie in '$S(x)$', so halten wir damit fest, dass es sich jedenfalls um eine atomare Formel handeln soll. Man beachte auch, dass (EE) so gemeint ist, dass 'v' für eine beliebige Individuenvariable steht; 'v' könnte auch für 'y' oder 'z' stehen, wenn wir wollten. Ebenso steht 't' für einen beliebigen singulären Term.

Wir werden die Feinheiten sowie weitere Anwendungen dieser Substitutionsfunktion in späteren Kapiteln genauer behandeln. Hier sind einige zusätzliche Beispiele fuer Anwendungen von (EE):

- $P(a) \therefore \exists x P(x)$
- $R(x,b) \therefore \exists y R(y,b)$
- $R(x,b) \therefore \exists y R(x,y)$
- $Q(a) \therefore \exists x Q(a)$
- $P(x) \therefore \exists x P(x)$

Argumentformen der Form (EE) werden in der klassischen Prädikatenlogik als logisch gültig anerkannt. Man beachte, dass sich solche Schlüsse im Rahmen der Aussagenlogik niemals als logisch gültig erwiesen hätten, ja nicht einmal formal angeschrieben hätten werden können. Im prädikatenlogischen System des natürlichen Schliessens werden wir jedoch auf logische Schlussregeln zurückkommen, die (EE) ähneln werden.

Es gibt aber auch Prädikatenlogiken der sogenannten *freien Logik*[1], die solchen Regeln nicht uneingeschränkte Gültigkeit zusprechen, und zwar aufgrund von Argumenten der folgenden Art:

[1] Siehe [6].

Pegasus ist ein fliegendes Pferd.

Daher gibt es fliegende Pferde.

Die Repräsentierung dieses Argumentes ist

- $F(p) \therefore \exists x F(x)$

oder, etwas feingliedriger repräsentiert, was gemäß unserer alten Repräsentierungsregel (K) aus der Aussagenlogik vorzuziehen ist:

- $F(p) \land P(p) \therefore \exists x(F(x) \land P(x))$

Manche behaupten nun, dass es zwar wahr ist, dass Pegasus ein fliegendes Pferd ist, dass es jedoch nichtsdestotrotz keine fliegende Pferde gibt. Also sei das obige Argument ein Gegenbeispiel gegen (EE). Die Antwort der klassischen Prädikatenlogik darauf ist: Entweder ist die Prämisse des Argumentes ist *nicht* wahr, denn sie ist gar kein wahrheitswertfähiger Ausdruck – entsprechend ist 'Pegasus ist ein fliegendes Pferd' kein Aussagesatz – und zwar deshalb weil singuläre Terme wie das obige p bzw. 'Pegasus' kein Referenzobjekt besitzen. Oder aber sowohl die Prämisse als auch die Konklusion sind wahr, weil 'Pegasus' ein mythologisches (und somit eventuell ein bestimmtest abstraktes) Objekt bezeichnet und 'fliegende Pferde' sich sowohl auf biologische als auch auf mythologische fliegende Pferde beziehen kann. Diese Repliken aus Sicht der klassischen Logik sind freilich umstritten. Im Rahmen unserer Vorlesung werden wir Fragen dieser Art einfach dadurch vermeiden, dass wir von vornherein voraussetzen werden, dass wir es nur mit Individuenkonstanten bzw. Eigennamen zu tun haben werden, die auch ein Referenzobjekt besitzen.

Hier ist ein weiteres natursprachliches Argument:

Alle Wiener sind Säugetiere.

Sokrates ist ein Wiener.

Also ist Sokrates ein Säugetier.

Die prädikatenlogische Form dieses Argumentes ist:

- $\forall x(W(x) \to S(x)), W(s) \therefore S(s)$

Dieses wird sich als (prädikaten-)logisch gültig herausstellen. Wenn wir beim prädikatenlogischen Herleiten dann entsprechend die Regel des konditionalen Beweises anwenden, so werden wir damit auch

- $\forall x(W(x) \to S(x)) \therefore (W(s) \to S(s))$

als deduktiv gültig nachweisen können. Und diese Argumentform ist eine Instanz von:

(UB) $\forall v A[v] \therefore A[t/v]$

Wieder wird dabei ein beliebiger singulärer Term t – im obigen Beispiel: s – für die Variable v (oben: x) eingesetzt. Einige weitere Beispiele für (UB) wären:

- $\forall x P(x) \therefore P(b)$
- $\forall y R(y, a) \therefore R(a, a)$
- $\forall x Q(x) \therefore Q(z)$

Wieder werden wir später auf logische Regeln, die obigem (UB) ähneln, zurückkommen, und wie vorher sollte man sich vor Augen halten, dass Regeln solcher Art in der Aussagenlogik nicht als logisch gültig gegolten haben, ja noch nicht einmal formulierbar gewesen wären.

In der Sprache der Prädikatenlogik können auch alle der viel bemühten Aristotelischen *Syllogismen* dargestellt werden. Ein typischer Syllogismus ist zum Beispiel:

> Alle Halleiner sind Kärntner.
>
> Alle Kärtner sind Österreicher.
>
> ---
>
> Daher sind alle Halleiner Österreicher.

Dieser Syllogismus hat die folgende prädikatenlogische Form:

- $\forall x(H(x) \to K(x)), \forall x(K(x) \to O(x)) \therefore \forall x(H(x) \to O(x))$

Umgekehrt können jedoch viele der oben vorgestellten Repräsentierungen *nicht* in der traditionellen Sprache der Aristotelischen Syllogismen durchgeführt werden. Und was das logische Schließen betrifft, wäre der logisch gültige Schluss von

- $\exists x \forall y R(x, y)$ ("Es gibt etwas, das zu allem in der R-Beziehung steht")

auf

- $\forall y \exists x R(x, y)$ ("Für jedes Ding gibt es etwas, das zu ihm in der R-Beziehung steht") in der Syllogistik weder formulierbar noch als logisch gültig nachweisbar gewesen. Der entscheidende Schritt in der Entwicklung der modernen Logik durch Gottlob Frege und andere bestand gerade darin, über die sprachlichen und logischen Beschränkungen der traditionellen Aristotelischen Syllogistik hinauszugehen. Dies gelang durch die Entdeckung der modernen Prädikatenlogik, deren Sprache wir nun im nächsten Kapitel präzise entwickeln werden.