10.5 Übungen

Übung 10.1

1. Worauf beziehen sich singuläre Terme? Was sind die Extensionen von n-stelligen Prädikaten (generellen Termen)?

2. Geben Sie drei (natursprachliche) singuläre Terme an, und erläutern Sie, was deren Referenz ist. Geben Sie drei (natursprachliche) Prädikate (mit jeweils verschiedener Stellenzahl) an, und erläutern Sie, was deren Extension ist.

3. Was sind die zwei wichtigen Eigenschaften von n-Tupeln?

4. Was ist das n-fache Cartesische Produkt

$$D^n = \underbrace{D \times \ldots \times D}_{n\text{-mal}}$$

   der Menge D?

5. Definieren Sie, was eine prädikatenlogische Interpretation ist.

6. Definieren Sie, was eine Variablenbelegung unter einer Interpretation ist.

7. Was heißt es, daß eine Variablenbelegung eine v-Variante einer Variablenbelegung ist?

8. Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen eine Formel – gegeben eine Interpretation sowie eine Variablenbelegung unter dieser Interpretation – wahr bzw. falsch ist.

9. Stellen Sie fest, ob die unten angegebenen Formeln unter der Interpretation $\mathfrak{I}$ und unter den Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ unter $\mathfrak{I}$ wahr sind, wobei:

   Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$:

   - $D = \{Barack, Joachim, Joseph\}$
   - $\varphi(a) = Barack$
   - $\varphi(b) = Joachim$
   - $\varphi(c) = Joseph$
   - $\varphi(P) = \{Barack, Joachim\} = \{d \in D \mid d \text{ ist Präsident}\}$

- $\varphi(M) = \{Barack, Joachim, Joseph\} = \{d \in D \mid d \text{ ist ein Mensch}\}$
- $\varphi(Z) = \emptyset = \{d \in D \mid d \text{ ist eine Zahl}\}$
- $\varphi(\ddot{A}) = \{\langle Joseph, Barack\rangle, \langle Joseph, Joachim\rangle, \langle Joachim, Barack\rangle\}$
  $= \{\langle d_1, d_2\rangle \in D^2 \mid d_1 \text{ ist älter als } d_2\}$

Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von $\mathfrak{I}$:

- $\sigma_1 = Barack, Joachim, Joseph, \ldots$
- $\sigma_2 = Joachim, Joachim, Joseph, \ldots$
- $\sigma_3 = Joseph, Joachim, Joseph, \ldots$

In $\mathfrak{I}$ und unter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zu bewertende Formeln:

10. $P(a)$
11. $P(b)$
12. $P(x)$
13. $M(c)$
14. $M(x)$
15. $Z(a)$
16. $Z(x)$
17. $\ddot{A}(a, b)$
18. $\ddot{A}(y, a)$
19. $\neg P(c)$
20. $\neg Z(x)$
21. $\ddot{A}(c, b) \wedge \neg P(x)$
22. $\forall x M(x)$
23. $\neg \forall x P(x)$
24. $\exists y Z(y)$
25. $\exists x P(x)$

26. $\neg\forall x P(x) \lor P(c)$

27. $\ddot{A}(b,a) \to \exists x(P(x) \land Z(x))$

28. $\forall x \exists y \ddot{A}(x,y)$

29. $\exists x \forall y \ddot{A}(x,y)$

Stellen Sie fest, welche der dieser Formeln wahr bzw. falsch gemäß φ_{σ_1}, φ_{σ_2}, φ_{σ_3} sind.

Denken Sie sich drei weitere Variablenbelegungen aus und bewerten Sie die Formel $\ddot{A}(y,x) \land \ddot{A}(z,y) \to \ddot{A}(z,x)$. Ist diese Formel wahr in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der Variablenbelegung?

Stellen Sie fest, welche der oben vorkommenden *geschlossenen* Formeln wahr bzw. falsch gemäß φ (d.h. in $\mathfrak{I}$) sind.

Übung 10.2

- Überprüfen Sie die folgenden Formeln auf logische Wahrheit, logische Falschheit, bzw. Kontingenz. Argumentieren Sie für das Vorliegen von logischer Wahrheit/Falschheit auf Basis der semantischen Regeln, für das Vorliegen von Kontingenz jedoch durch Angabe von passenden Interpretationen (und Variablenbelegungen).

  1. $M(x) \lor G(c)$
  2. $\exists y(G(y) \land \neg G(y))$
  3. $\forall x(P(x) \to \neg P(x))$
  4. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$
  5. $P(x) \to P(y)$
  6. $P(x) \to P(x)$
  7. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$
  8. $\neg\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
  9. $P(a,b) \land \forall x \neg\exists y P(x,y)$
  10. $\forall x \forall y P(x,y) \to \forall y \forall x P(x,y)$
  11. $P(x) \to \forall y P(y)$
  12. $P(x) \to \forall y P(x)$
  13. $\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$

Übung 10.3

- In den folgenden Beispielen wird das Bestehen gewisser logischer Folgerungen behauptet. Überprüfen Sie diese Behauptungen auf ihre Richtigkeit! Argumentieren Sie entweder für die Behauptungen mit Hilfe der semantischen Regeln, oder widerlegen Sie die Behauptungen durch Angabe von Gegenbeispielen in Form von Interpretationen (und Variablenbelegungen).

  1. $P(a) \models \exists x P(x)$
  2. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$
  3. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \exists x Q(x)$
  4. $\forall x \forall y P(x, y) \models \forall x \exists y P(x, y)$
  5. $\exists x(P(y) \land Q(x)) \models P(y) \land \exists x Q(x)$
  6. $\exists x P(y) \models \forall y P(x)$
  7. $\forall x \forall y P(x, y) \models P(a, b) \land P(c, d)$
  8. $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a) \models Q(a)$
  9. $\forall x \exists y P(x, y) \models \exists y P(y, y)$
  10. $\forall x(P(x) \lor Q(x)), \neg \exists y Q(y) \models \forall x P(x)$
  11. $\forall x(P(x) \lor Q(x)), \neg Q(y) \models \forall x P(x)$
  12. $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_{10000}) \models \forall x P(x)$