9.4 Übungen

Übung 9.1 Beschreiben Sie das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache!

Was ist ein singulärer Term? Was ist eine prädikatenlogische Formel?

Was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel frei vorkommt, und was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel gebunden vorkommt?

Was ist der Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks?

Welche Vorkommnisse von Individuenvariablen in den folgenden Formeln sind frei, welche Vorkommnisse sind gebunden?

1. $P(a_2)$
2. $\forall x_1(R(x_1, a_1) \rightarrow P(x_1))$
3. $\forall x_1(R(x_1, x_3) \rightarrow P(x_1))$
4. $\exists x_3(P(x_1) \wedge \forall x_2 R(x_3, x_2))$
5. $\forall x_5(P(x_5) \rightarrow \exists x_2(R(x_2, x_5) \wedge \forall x_1 S(x_2, x_1)))$
6. $\exists x_1(P(x_1) \wedge R(a_7, x_1)) \wedge S(a_8, x_1)$

Übung 9.2 Was heißt es, daß eine Formel offen ist, und was heißt es, daß eine Formel geschlossen ist?

Welche der folgenden Zeichenreihen sind prädikatenlogische Formeln, welche der Formeln sind offen und welche sind geschlossen?

1. $(R(a_1, a_3) \wedge \exists x_1 P(x_1))$
2. $\exists x_1(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$
3. $\exists x_1(R(x_1, a_3) \wedge P(x_2))$
4. $\exists x_1(R(x_1, a_3) \wedge \forall x_2 P(x_2))$
5. $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_4(R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$
6. $\forall x_5 R(a_1, a_5)$
7. $\forall x_5 R(a_1, x_5)$
8. $\forall x_5(R(a_1, x_5) \rightarrow \exists x_3 P(x_3))$
9. $P(x_1) \wedge p$
10. $P(x_1) \wedge \forall x_1 P(x_1)$

11. $\exists\forall x_2 R(x_2, a_{47355})$

12. $\forall x_{18} P^7(x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18})$

13. $\forall x_{24} P^9(x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24})$

14. $\exists x_1 \neg\forall x_2(P(x_1) \to Q(x_2))$

15. $\exists x_1 \neg\neg(\forall x_2(P(x_1) \to Q(x_2)))$

16. $\forall x_3 \exists x_3 R(x_3, x_4)$

17. $\neg\forall x_1(P(x_1))$

18. $\exists x_5(P(x_5) \wedge \forall x_2(Q(x_2 \to P(a_8)))$

Übung 9.3 Die folgenden Formeln sind etwas "ungeschickte" Formulierungen: ihre syntaktische Form suggeriert bestimmte inhaltliche Zusammenhänge, die, wenn man die Formeln genau unter die Lupe nimmt, gar nicht bestehen. Z.B. sind $M(x)$ und $\exists x V(x, x)$ in der ersten Formel durch einen Implikationspfeil verbunden, obwohl sie gar nicht inhaltlich zusammenhängen (der Allquantor bindet zwar x in $M(x)$, aber nicht in $\exists x V(x, x)$). Versuchen Sie den intuitiven Gehalt der folgenden Formeln syntaktisch besser, d.h. transparenter, auszudrücken, ohne dabei gleichzeitig den Inhalt der Formeln zu verändern!

1. $\forall x(M(x) \to \exists x V(x, x))$

2. $\forall x P(a)$

3. $\exists x(Q(x) \wedge \forall x R(x, a))$

4. $\forall y \forall x(\forall y P(x) \to \forall x P(y))$

Übung 9.4 Führen Sie die folgende Substitutionen durch und stellen Sie fest, bei welchen dieser Substitutionen der singuläre Term t für eine nämliche Variable in einer Formel eingesetzt wird, sodass t frei für diese Variable in dieser Formel ist:

1. $A[x_1]$: $\exists x_1(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, t: x_2

2. $A[x_1]$: $\exists x_1(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, t: a_1

3. $A[x_1]$: $\exists x_1(R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, t: x_1

4. $A[x_1]$: $\exists x_1 R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, t: x_2

5. $A[x_1]$: $\exists x_1 R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, t: a_1

6. $A[x_1]$: $\exists x_1 R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, t: x_1

7. $A[x_1]$: $\exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, t: x_2

8. $A[x_2]$: $\exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, t: x_1

9. $A[x_2]$: $\exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, t: x_4

10. $A[x_2]$: $\exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, t: x_3