Eine Frage, die sich in der Vorlesung ergeben hat: Wie verhalten sich die Formeln $p \to (q \vee r)$, $(p \to q) \vee (p \to r)$ und $(p \to q) \vee r$ logisch zueinander?

Semantisch lässt sich diese Frage durch Angabe der Wahrheitstafeln beantworten:

p	q	r	$p \to$	$(q \vee r)$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w
f	f	f	w	f

p	q	r	$(p \to q)$	$\vee$	$(p \to r)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f
w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w

p	q	r	$(p \to q)$	$\vee\, r$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w
f	f	f	w	w

Die Formeln $p \to (q \vee r)$, $(p \to q) \vee (p \to r)$ und $(p \to q) \vee r$ sind also paarweise logisch äquivalent. Jede der drei Formeln folgt logisch aus jeder der drei Formeln.

Nun zu den deduktiven Beziehungen zwischen den Formeln, d.h. das Herleiten betreffend:

- $p \to (q \lor r) \vdash (p \to q) \lor (p \to r)$

  $\underline{1.\ p \to (q \lor r)}$ (P1)

  2. $\|\ p$ (FU-Annahme 1)

  3. $\|\ q \lor r$ 2., 1. (MP)

  4. $\|\ \|\ q$ (FU-Annahme 1)

  5. $\|\ \|\ \|\ p$ (KB-Annahme)

  6. $\|\ \|\ \|\ q$ 4. (TS)

  7. $\|\ \|\ p \to q$ 5.–6. (KB)

  8. $\|\ \|\ (p \to q) \lor (p \to r)$ 7. (ADD1)

  9. $\|\ \|\ \neg q$ (FU-Annahme 2)

  10. $\|\ \|\ r$ 3., 9. (DS1)

  11. $\|\ \|\ \|\ p$ (KB-Annahme)

  12. $\|\ \|\ \|\ r$ 10. (TS)

  13. $\|\ \|\ p \to r$ 11.–12. (KB)

  14. $\|\ \|\ (p \to q) \lor (p \to r)$ 13. (ADD2)

  15. $\|\ (p \to q) \lor (p \to r)$ 4.–14. (FU)

  16. $\|\ \neg p$ (FU-Annahme 2)

  17. $\|\ \|\ p$ (KB-Annahme)

  18. $\|\ \|\ q$ 17., 16. (ECQ)

  19. $\|\ p \to q$ 17.–18. (KB)

  20. $\|\ (p \to q) \lor (p \to r)$ 19. (ADD1)

  21. $(p \to q) \lor (p \to r)$ 2.–20. (FU)

- $(p \to q) \lor (p \to r) \vdash (p \to q) \lor r$

  $\underline{1.\ (p \to q) \lor (p \to r)}$ (P1)

  2. $\|\ p$ (FU-Annahme 1)

  3. $\|\ \|\ p \to q$ (FU-Annahme 1)

  4. $\|\ \|\ (p \to q) \lor r$ 3. (ADD1)

  5. $\|\ \|\ \neg(p \to q)$ (FU-Annahme 2)

  6. $\|\ \|\ p \to r$ 1., 5. (DS1)

  7. $\|\ \|\ r$ 2., 6. (MP)

  8. $\|\ \|\ (p \to q) \lor r$ 7. (ADD2)

  9. $\|\ (p \to q) \lor r$ 3.–8. (FU)

  10. $\|\ \neg p$ (FU-Annahme 2)

  11. $\|\ \|\ p$ (KB-Annahme)

  12. $\|\ \|\ q$ 11., 10. (ECQ)

  13. $\|\ p \to q$ 11.–12. (KB)

  14. $\|\ (p \to q) \lor r$ 13. (ADD1)

  15. $(p \to q) \lor r$ 2.–14. (FU)

- $(p \to q) \lor r \vdash p \to (q \lor r)$

  $\underline{1.\ (p \to q) \lor r}$ (P1)

  2. $\|\ p$ (KB-Annahme)

  3. $\|\ \|\ p \to q$ (FU-Annahme 1)

  4. $\|\ \|\ q$ 2., 3. (MP)

  5. $\|\ \|\ q \lor r$ 4. (ADD1)

  6. $\|\ \|\ \neg(p \to q)$ (FU-Annahme 2)

  7. $\|\ \|\ r$ 1., 6. (DS1)

8. $\|\ \|\ q \vee r$ 7. (ADD2)

9. $\|\ q \vee r$ 3.–8. (FU)

10. $p \to (q \vee r)$ 2.–9. (KB)

Wir haben also insgesamt:

$p \to (q \vee r) \vdash (p \to q) \vee (p \to r)$

$(p \to q) \vee (p \to r) \vdash (p \to q) \vee r$

$(p \to q) \vee r \vdash p \to (q \vee r)$

Da ganz allgemein aus $A \vdash B$ und $B \vdash C$ folgt, dass auch $A \vdash C$ der Fall ist, ist somit jede der drei Formeln $p \to (q \vee r)$, $(p \to q) \vee (p \to r)$ und $(p \to q) \vee r$ aus jeder derselben drei Formeln herleitbar. Die drei Formeln sind also paarweise wechselseitig herleitbar: Sie sind paarweise auch deduktiv äquivalent.