Lösungen zu ausgewählten Teilen von Übung 10:

10.1.

10. Unter φ_{σ_1}: wahr. Unter φ_{σ_2}: wahr. Unter φ_{σ_3}: wahr.
12. Unter φ_{σ_1}: wahr. Unter φ_{σ_2}: wahr. Unter φ_{σ_3}: falsch.
18. Unter φ_{σ_1}: wahr. Unter φ_{σ_2}: wahr. Unter φ_{σ_3}: wahr.
21. Unter φ_{σ_1}: falsch. Unter φ_{σ_2}: falsch. Unter φ_{σ_3}: wahr.
22. Unter φ_{σ_1}: wahr. Unter φ_{σ_2}: wahr. Unter φ_{σ_3}: wahr.
23. Unter φ_{σ_1}: wahr. Unter φ_{σ_2}: wahr. Unter φ_{σ_3}: wahr.
24. Unter φ_{σ_1}: falsch. Unter φ_{σ_2}: falsch. Unter φ_{σ_3}: falsch.
28. Unter φ_{σ_1}: falsch. Unter φ_{σ_2}: falsch. Unter φ_{σ_3}: falsch. (Barack ist ein Gegenbeispiel.)
29. Unter φ_{σ_1}: falsch. Unter φ_{σ_2}: falsch. Unter φ_{σ_3}: falsch. (Selbst Joseph ist nicht älter als alle, denn er ist nicht älter als er selbst.)

10.2.

3. Kontingent. (Per Angabe von Beispielsinterpretationen:) Wenn $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ so gewählt wird, dass $\varphi(P) = \varnothing$, dann kommt die Formel als wahr heraus. Wenn $\mathfrak{I}$ aber so gewählt wird, dass $\varphi(P)$ nicht leer ist, dann kommt die Formel als falsch heraus.
4. Logisch wahr. (Per universeller Einführung und konditionalem Beweis in der Metasprache:) Sei $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ eine beliebige Interpretation: Angenommen, dass das Antezedens $\forall x P(x)$ wahr ist bei $\mathfrak{I}$ (Variablenbelegungen spielen bei diesen geschlossenen Formeln keinerlei Rolle): Dann muss $\varphi(P) = D$ der Fall sein. In jeder Interpretation ist aber der Gegenstandsbereich eine nichtleere Menge: D.h., es gibt ein Objekt in D, woraus dann auch folgt, dass es ein Objekt in $\varphi(P)$ gibt. Somit gilt: $\exists x P(x)$ ist ebenfalls wahr ist bei $\mathfrak{I}$. Wir haben also gezeigt, dass wenn $\forall x P(x)$ wahr ist bei $\mathfrak{I}$, auch $\exists x P(x)$ wahr ist bei $\mathfrak{I}$. Und somit folgt auch: $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ ist wahr ist bei $\mathfrak{I}$. Da $\mathfrak{I}$ beliebig gewählt war, folgt: $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ ist wahr ist bei jeder Interpretation. Die Formel ist daher logisch wahr.
9. Logisch falsch. (Per indirektem Beweis in der Metasprache:) Denn angenommen es gäbe eine Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ bei der die Formel wäre: Dann müsste das erste Konjunkt wahr sein, weshalb dann auch $\langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle \in \varphi(P)$ der Fall sein müsste. Es müsste

aber auch das zweite Konjunkt wahr sein: Für jedes Objekt im Gegenstandsbereich D müsste es der Fall sein, dass dieses nicht in der $\varphi(P)$-Relation zu irgendeinem Objekt in D stehen dürfte. Aufgrund der Wahrheit der ersten Konjunktes wissen wir aber bereits, dass jedenfalls $\varphi(a)$ zu einem Objekt in D (nämlich $\varphi(b)$) in der $\varphi(P)$-Relation steht. Wir erhalten also einen Widerspruch. Folglich war unsere Annahme falsch: Es gibt gar keine Interpretation, bei der die Formal wahr ist. Die Formel ist daher logisch falsch.