

Lösungen zu ausgewählten Teilen von Übung 11:

- 11.1 1. 1.  $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$  (P1)  
 2.  $P(y) \wedge Q(y)$  1. (UB)  
 3.  $P(y)$  2. (SIMP1)  
 4.  $Q(y)$  2. (SIMP2)  
 5.  $\forall xP(x)$  3. (UE)  
 6.  $\forall xQ(x)$  4. (UE)  
 7.  $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$  5., 6. (KON)
2. 1.  $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$  (P1)  
 2.  $\forall xP(x)$  (FU-Ann. 1)  
 3.  $P(y)$  2. (UB)  
 4.  $P(y) \vee Q(y)$  3. (ADD1)  
 5.  $\forall x(P(x) \vee Q(x))$  4. (UE)  
 6.  $\neg \forall xP(x)$  (FU-Ann. 2)  
 7.  $\forall xQ(x)$  1., 6. (DS1)  
 8.  $Q(y)$  7. (UB)  
 9.  $P(y) \vee Q(y)$  8. (ADD2)  
 10.  $\forall x(P(x) \vee Q(x))$  9. (UE)  
 11.  $\forall x(P(x) \vee Q(x))$  2.–10. (FU)
3. 1.  $\forall x(P(a) \vee Q(x))$  (KB-Ann.)  
 2.  $P(a) \vee Q(y)$  1. (UB)  
 3.  $P(a)$  (FU-Ann. 1)  
 4.  $P(a) \vee \forall xQ(x)$  3. (ADD1)  
 5.  $\neg P(a)$  (FU-Ann. 2)  
 6.  $Q(y)$  2., 5. (DS1)  
 7.  $\forall xQ(x)$  6. (UE)  
 8.  $P(a) \vee \forall xQ(x)$  7. (ADD2)  
 9.  $P(a) \vee \forall xQ(x)$  3.–8. (FU)  
 10.  $\forall x(P(a) \vee Q(x)) \rightarrow P(a) \vee \forall xQ(x)$  1.–9. (KB)  
 11.  $P(a) \vee \forall xQ(x)$  (KB-Ann.)  
 12.  $P(a)$  (FU-Ann. 1)  
 13.  $P(a) \vee Q(y)$  12. (ADD1)

14.  $\forall x(P(a) \vee Q(x))$  13. (UE)
  15.  $\neg P(a)$  (FU-Ann. 2)
  16.  $\forall xQ(x)$  11., 15. (DS1)
  17.  $Q(y)$  16. (UB)
  18.  $P(a) \vee Q(y)$  17. (ADD2)
  19.  $\forall x(P(a) \vee Q(x))$  18. (UE)
  20.  $\forall x(P(a) \vee Q(x))$  12.–19. (FU)
  21.  $P(a) \vee \forall xQ(x) \rightarrow \forall x(P(a) \vee Q(x))$  11.–20. (KB)
  22.  $\forall x(P(a) \vee Q(x)) \leftrightarrow P(a) \vee \forall xQ(x)$  10., 21. (ÄQ-EIN)
5. Wie in 3. zuerst die eine Implikationsrichtung zeigen, dann die andere; schließlich mit ÄQ-EIN auf die Äquivalenz schließen.
6.
    1.  $\forall x\neg P(x)$  (P1)
    2.  $\neg\neg\exists xP(x)$  (IB-Ann.)
    3.  $\exists xP(x)$  2. (DN2)
    4.  $P(y)$  3. (EB-Ann.)
    5.  $\neg P(y)$  1. (UB)
    6.  $P(z) \wedge \neg P(z)$  4., 5. (ECQ)
    7.  $P(z) \wedge \neg P(z)$  4.–6. (EB)
    8.  $\neg\exists xP(x)$  2.–7. (IB)
11. Wir zeigen nur die Richtung von links nach rechts:
1.  $P(a) \rightarrow \exists xQ(x)$  (KB-Ann.)
  2.  $\exists xQ(x)$  (FU-Ann. 1)
  3.  $Q(y)$  2. (EB-Ann.)
  4.  $P(a)$  3. (KB-Ann.)
  5.  $Q(y)$  3. (TS)
  6.  $P(a) \rightarrow Q(y)$  4.–5. (KB)
  7.  $\exists x(P(a) \rightarrow Q(x))$  6. (EE)
  8.  $\exists x(P(a) \rightarrow Q(x))$  3.–7. (EB)
  9.  $\neg\exists xQ(x)$  (FU-Ann. 2)
  10.  $\neg P(a)$  1., 9. (MT)
  11.  $P(a)$  (KB-Ann.)
  12.  $Q(y)$  11., 10. (ECQ)

13.  $P(a) \rightarrow Q(y)$  11.–12. (KB)  
14.  $\exists x(P(a) \rightarrow Q(x))$  13. (EE)  
15.  $\exists x(P(a) \rightarrow Q(x))$  2.–14. (FU)  
16.  $(P(a) \rightarrow \exists xQ(x)) \rightarrow \exists x(P(a) \rightarrow Q(x))$  1.–15. (KB)
- 11.2 3. 1.  $\neg\exists x(O(x) \wedge M(x))$  (P1)  
2.  $\exists x(K(x) \wedge O(x))$  (P2)  
3.  $\neg\neg\forall x(K(x) \rightarrow M(x))$  (IB-Ann.)  
4.  $\forall x(K(x) \rightarrow M(x))$  3. (DN2)  
5.  $K(y) \wedge O(y)$  2. (EB-Ann.)  
6.  $K(y) \rightarrow M(y)$  4. (UB)  
7.  $K(y)$  5. (SIMP1)  
8.  $M(y)$  6., 7. (MP)  
9.  $O(y)$  5. (SIMP2)  
10.  $O(y) \wedge M(y)$  9., 8. (KON)  
11.  $\exists x(O(x) \wedge M(x))$  10. (EE)  
12.  $\exists x(O(x) \wedge M(x))$  5.–11 (EB)  
13.  $\exists x(O(x) \wedge M(x)) \wedge \neg\exists x(O(x) \wedge M(x))$  12., 1. (KON)  
14.  $\neg\forall x(K(x) \rightarrow M(x))$  3.–13. (IB)
- 11.4 1. 1.  $\exists x\forall yR(x, y)$  (P1)  
2.  $\forall yR(z, y)$  (EB-Ann.)  
3.  $R(z, x_4)$  2. (UB)  
4.  $\exists xR(x, x_4)$  3. (EE)  
5.  $\forall y\exists xR(x, y)$  4. (UE)  
6.  $\forall y\exists xR(x, y)$  2.–5. (EB)
2. 1.  $\neg\exists x\neg P(x)$  (P1)  
2.  $\neg P(y)$  (IB-Ann.)  
3.  $\exists x\neg P(x)$  2. (EE)  
4.  $\exists x\neg P(x) \wedge \neg\exists x\neg P(x)$  3., 1. (KON)  
5.  $P(y)$  2.–4. (IB)  
6.  $\forall xP(x)$  5. (UE)
3. 1.  $\exists xP(x)$  (P1)

2.  $\neg\neg\forall x\neg P(x)$  (IB-Ann.)
3.  $\forall x\neg P(x)$  2. (DN2)
4.  $P(y)$  1. (EB-Ann.)
5.  $\neg P(y)$  3. (UB)
6.  $P(z) \wedge \neg P(z)$  4., 5. (ECQ)
7.  $P(z) \wedge \neg P(z)$  4.-6. (EB)
8.  $\neg\forall x\neg P(x)$  2.-7. (IB)