Hannes Leitgeb

Logik I

Eine Einführung in die
klassische Aussagen- und Prädikatenlogik

Stand: 24.01.2016

Inhalt

Kapitel 0

Einleitung

dass die Logik diesen sicheren Gang schon von den ältesten Zeiten her gegangen sei, läßt sich daran ersehen, dass sie seit dem Aristoteles keinen Schritt rückwärts hat tun dürfen... Merkwürdig ist noch an ihr, dass sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint.

... die Grenze der Logik aber ist dadurch ganz genau bestimmt, dass sie eine Wissenschaft ist, welche nichts als die formalen Regeln des Denkens (es mag a priori oder empirisch sein, einen Ursprung oder Objekt haben, welches es wolle, in unserem Gemüte zufällige oder natürliche Hindernisse antreffen) ausführlich darlegt und strenge beweist.

(Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, 2. Originalausgabe, Hamburg: Meiner, 1990)

Ich habe... den Eindruck, dass die Logik, die in den Schulen vertreten wird, so weit von jener Logik entfernt ist, die nützlich für die Leitung des Geistes hinsichtlich der Erforschung der verschiedenen Wahrheiten ist, wie sich die Knabenarithmetik von der Algebra eines bedeutenden Mathematikers unterscheidet.... Im privaten Bereich aber ist es höchste Zeit, dass Fachleute der Analytik eine Logik zur Vollendung bringen, die geeignet ist, die einzelnen Untersuchungen zu leiten, also einen LEITFADEN DES DENKENS. Da nämlich heutzutage ein so umfangreiches Material hervorragender Gedanken vorhanden ist, bleibt es nur noch übrig, diesen eine Form zu verleihen. Einen LEITFADEN DES DENKENS aber nenne ich eine bestimmte leichte und sichere Methode, mit der wir, wenn wir ihr folgen, ohne Beunruhigung des Geistes, ohne Streitigkeiten, ohne Furcht zu irren nicht weniger sicher voranschreiten als jemand, der im Labyrinth einen Ariadnefaden zur Verfügung hat. Und ich meine, dass eine solche Methode in unserer Macht steht und mit nicht allzu großer Schwierigkeit erstellt werden kann und dass diese so evident sein wird, dass sie alle Kontroversen ohne Widerspruch beendet, ganz und gar so wie jene [Kontroversen], die im Bereich der Zahlenkalküle auftreten können, von einem erfahrenen Arithmetiker entweder alleine oder unter Hinzuziehung eines Mitarbeiters ohne Schwierigkeit beendet werden. Ich meine, dass der Gebrauch dieser Methode unter die höchsten Güter zu zählen ist, die dem Menschengeschlecht zuteil werden könnten.

(Gottfried Wilhelm Leibniz, *Die Grundlagen des logischen Kalküls*, hg. von F. Schupp, Hamburg: Meiner, 2000)

Wie muss ich denken, um das Ziel, die Wahrheit zu erreichen? Die Beantwortung dieser Frage erwarten wir von der Logik, aber wir verlangen nicht von ihr, dass sie auf das Besondere jedes Wissensgebiets und deren Gegenstände eingehe; sondern nur das Allgemeinste, was für alle Gebiete des Denkens Geltung hat, anzugeben, weisen wir der Logik als Aufgabe zu. Die Regeln für unser Denken und Fürwahrhalten müssen wir bestimmt denken durch die Gesetze des Wahrseins. Mit diesen sind jene gegeben. Wir können mithin auch sagen: Die Logik ist die Wissenschaft der allgemeinsten Gesetze des Wahrseins.

(Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften*, hg. von H. Hermes, F. Kambartel und F. Kaulbach, Hamburg: Meiner, 1983)

Ich bin… überzeugt, dass wir in einer durchaus endgültigen Wendung der Philosophie mitten darin stehen und dass wir sachlich berechtigt sind, den unfruchtbaren Streit der Systeme als beendigt anzusehen. Die Gegenwart ist, so behaupte ich, bereits im Besitz der Mittel, die jeden derartigen Streit im Prinzip unnötig machen; es kommt nur darauf an, sie entschlossen anzuwenden.

Diese Mittel sind in aller Stille, unbemerkt von der Mehrzahl der philosophischen Lehrer und Schriftsteller, geschaffen worden, und so hat sich eine Lage gebildet, die mit allen früheren unvergleichbar ist. Daß die Lage wirklich einzigartig und die eingetretene Wendung wirklich endgültig ist, kann nur eingesehen werden, indem man sich mit den neuen Wegen bekannt macht und von

> dem Standpunkte, zu dem sie führen, auf alle die Bestrebungen zurückschaut, die je als "philosophische" gegolten haben.
>
> Die Wege gehen von der Logik aus.
>
> (Moritz Schlick, "Die Wende der Philosophie", *Erkenntnis* 1 (1930))

Bevor wir beginnen: Logik ist *die* wissenschaftliche Erfolgsgeschichte des 20. Jahrhunderts: Googlen Sie doch mal

Gödel Time 100
Wittgenstein Time 100
Turing Time 100

Wir gehen ein paar Jahre zurück. Es ist Anfang Oktober 2010.

Hannes Leitgeb, der im Begriff ist, nach München umzuziehen, trifft Herrn P ('P' für 'Philosoph') auf der Straße.

H: Hallo!

P: ...

H: (Lauter) *Hallo!!*

P: (Aufblickend) Hallo! Entschuldige bitte: Ich war gerade am philosophischen Grübeln. Die Welt ist so tief, philosophisch, weißt du? Na ja, vielleicht weißt du das auch nicht. Ich habe gehört, dass du nach München gehst. Hast du dich schon eingerichtet? Wie steht es mit deinem Büro?

H: Alles noch in Arbeit. Nichts ist in meinem Büro, nichts ist in meinem Sekretariat.

P: Was, nichts – also das Nichts – ist in deinem Büro? Huuu... das ist ja zum Fürchten. Und wie geht denn das überhaupt: Nichts ist doch auch in deinem Sekretariat. Ich schließe: Das Nichts kann zugleich an zwei verschiedenen Orten sein. Und wenn nichts in deinem Büro ist, dann folgt doch auch, dass zumindest etwas in deinem Büro ist. Es ist also zugleich nichts und etwas in deinem Büro. Und...

H: Das ist alles Unsinn. Wenn du 'Nichts ist in meinem Büro' und 'Nichts ist in meinem Sekretariat' richtig logisch repräsentierst, wirst du merken, dass sie nicht von derselben logischen Form sind wie – sagen wir – 'Der Tisch ist in meinem Büro', sondern vielmehr nur soviel heissen wie: Es ist nicht der Fall, dass etwas in meinem Büro ist, es ist nicht der Fall, dass etwas in meinem Sekretariat ist. 'Nichts' ist überhaupt kein Name für ein Objekt und schon gar nicht für ein Objekt, das an zwei verschiedenen Orten zugleich sein könnte.

Und weil ‘nichts’ kein Name für ein Objekt ist, kann man auch nicht aus ‘Nichts ist in meinem Büro’ folgern, dass etwas in meinem Büro ist. Vielmehr widersprechen ‘Nichts ist in meinem Büro’ und ‘Etwas ist in meinem Büro’ einander.

P: Dann bin ich ja beruhigt. Erzähl weiter!

H: Nichts ist also in meinem Büro, nichts ist in meinem Sekretariat. Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro…

P: Moment: Das ist sehr interessant. Sagen wir, er wird geliefert: Nach dem, was du sagst, wird dann einerseits dein Schreibtisch mit dem Lastwagen geliefert, andererseits stellst du ihn in dein Büro. Der Schreibtisch hat also diese zwei Eigenschaften: Mit dem Lastwagen geliefert zu werden und von dir in dein Büro gestellt zu werden. Aber wie kann er denn diese beiden Eigenschaften zugleich haben? Einerseits fährt er mit dem Lastwagen herum, andererseits schiebst du ihn ins Büro hinein. Aha, ich verstehe: Der Schreibtisch hat zueinander widersprüchliche Eigenschaften. Darin drückt sich wohl die Veränderung, das Werden aus. Dinge, die sich verändern, haben widersprüchliche Eigenschaften. Aber letzlich verändert sich doch alles: Also hat alles widersprüchliche Eigenschaften. Das erinnert mich an meine Habilitationsschrift, in der ich…

H: Nein, nein, nein: Der Schreibtisch hat diese Eigenschaften gar nicht zugleich. Genauer: ‘wird mit dem Lastwagen geliefert’ drückt gar keine Eigenschaft aus, nur ‘wird mit dem Lastwagen *zum Zeitpunkt t* geliefert’ drückt eine Eigenschaft aus. Genauso drückt ‘stelle ich ins Büro’ keine Eigenschaft aus, weil man wiederum hinzusagen muss, *wann* ich dieses und jenes ins Büro stelle. Was ich vorher meinte, war selbstverständlich nur: Wenn mein Schreibtisch zum Zeitpunkt t mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn zu einem späteren Zeitpunkt t' in mein Büro. Es ist auch gar nicht widersprüchlich, zu einem Zeitpunkt mit dem Lastwagen geliefert zu werden und zu einem anderen Zeitpunkt von mir ins Büro gestellt zu werden. Selbiges gilt übrigens genau genommen auch für ‘Nichts ist in meinem Büro’ und ‘Nichts ist in meinem Sekretariat’: Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist nichts in meinem Büro, und zu einem bestimmten Zeitpunkt ist nichts in meinem Sekretariat. Man läßt diese zeitlichen Relativierungen in der natürlichen Sprache nur oft weg, aber in der eigentlichen logischen Form dieser Sätze sind dieselben selbstverständlich vorhanden.

P: Schade eigentlich: Ich war gerade dabei, ein paar tiefe Einsichten in die Welt zu gewinnen…

H: Nur scheinbar.

P: Lassen wir das. Erzähl weiter.

H: Nichts ist in meinem Büro, nichts ist in meinem Sekretariat. Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro. Angenommen, ich stelle ihn in mein Büro: . . .

P: Was heißt 'angenommen'? Du hast doch gerade gesagt, dass du ihn in dein Büro stellen wirst.

H: Ich habe nur gesagt: *Wenn er mit dem Lastwagen geliefert wird*, dann stelle ich ihn in mein Büro. Wenn er nicht mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn vielleicht gar nicht in mein Büro. Das Ding ist nämlich schwierig zu transportieren. Also: Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro. Angenommen, ich stelle ihn in mein Büro: . . .

P: (Triumphierend) . . . dann muss es der Fall sein, dass er mit dem Lastwagen geliefert worden ist!

H: Hmmm. Eigentlich nicht. Du darfst zwar aus 'Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro' und 'Mein alter Schreibtisch von daheim ist mit dem Lastwagen geliefert worden' folgern, dass ich den Schreibtisch in mein Büro stelle. Aber du darfst nicht aus 'Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro' und 'Ich stelle meinen alten Schreibtisch von daheim in mein Büro' folgern, dass mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert worden ist. Denn der Schreibtisch könnte ja vielleicht auch mit einem grossen PKW geliefert worden sein: Stell Dir vor, das wäre so. Wenn ich ihn dann ins Büro stellte, dann wäre 'Ich stelle meinen alten Schreibtisch von daheim in mein Büro' wahr. Und 'Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro' haben wir ja von vornherein als wahr vorausgesetzt. Deine Konklusion, dass mein Schreibtisch mit dem Lastwagen geliefert wurde, wäre dann aber falsch. Es muß also – gegeben das, was ich gesagt habe – keineswegs so sein, dass der Schreibtisch mit dem Lastwagen geliefert worden ist.

P: Ich wollte nicht unterbrechen. Du wolltest sagen. . .

H: Angenommen, ich stelle ihn in mein Büro: Stelle ich ihn dann vom Eingang aus gesehen links auf oder rechts?

P: Die Frage ist jetzt aber keine philosophische Frage.

H: (Verwundert) Natürlich nicht. Ich erzähle doch nur von meinem zukünftigen Büro.

P: Ha! Jetzt wird es aber doch philosophisch: Dein zukünftiges Büro? Wie kannst du denn jetzt von etwas erzählen, dass es erst in der Zukunft geben wird? Das hieße doch: Es gibt jetzt etwas, dass es jetzt noch gar nicht gibt. Ich möchte da gleich noch einmal zurückkommen, auf meine frühere Idee, das

Werden durch...

H: Bitte nicht. Logisch betrachtet gibt es nur etwas, das diese und jene Eigenschaften hat, oder es gibt so etwas eben nicht. Es gibt z.B. ein Büro des Herrn Hannes Leitgeb, welches – sagen wir – mit dem 12. November 2010 von mir bezogen wird, dann bis zum Zeitpunkt meiner Pensionierung mehr oder weniger unverändert bleibt, und mit dem Zeitpunkt meiner Pensionierung von meinem Nachfolger oder meiner Nachfolgerin auseinandergenommen wird. Ich kann jetzt von diesem meinem Büro sprechen, so wie ich von allen anderen Dingen, die zu bestimmten Zeitpunkten bestimmte Eigenschaften haben, sprechen kann. Und dein 'Es gibt jetzt etwas, das es jetzt noch gar nicht gibt' ist nicht ganz präzise formuliert. Was du eigentlich meinst, ist nur: Es gibt etwas, das vom 12. November 2010 bis zum Zeitpunkt meiner Pensionierung mein Büro ist, und außerdem ist es der Fall, dass das heutige Datum vor dem 12. November 2010 liegt. Na und? Daran ist doch gar nichts bedenklich? Du kannst doch auch von Aristoteles reden, obwohl er bereits 322 v. Chr. verstorben ist. Aristoteles hat die Eigenschaft, von 384 v. Chr. bis 322 v. Chr. gelebt zu haben. Das kann ich doch jetzt sagen.

P: Stimmt: Von Aristoteles möchte ich eigentlich schon reden können. Ich bin ja ein Philosoph. Trotzdem beunruhigt mich das.

H: Was?

P: Es ist doch so: Aristoteles hat am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens in der Nase gebohrt, oder Aristoteles hat am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens nicht in der Nase gebohrt.

H: Natürlich: Dieser Satz ist – wie die Logiker sagen – logisch wahr. Er ist wahr rein aufgrund der Bedeutung der Ausdrücke 'oder' und 'nicht'. Egal wie die Welt wäre, der Satz könnte gar nicht falsch sein. Und alle Sätze derselben logischen Form müssen ebenfalls wahr sein.

P: Aber wenn es keine Zeitreisen gibt, dann ist es doch vermutlich so, dass wir niemals herausfinden können, ob Aristoteles nun am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens in der Nase gebohrt hat oder nicht.

H: Und?

P: Ja ist das nicht ein Problem?

H: Gar nicht. Es ist doch nur so, dass es entweder wahr ist, dass Aristoteles am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens in der Nase gebohrt hat, oder dass dies falsch ist. Aber etwas kann durchaus wahr oder falsch sein, ohne dass wir herausfinden können, welche der beiden Alternativen eintritt oder eingetreten ist. Es ist wahr, dass am Mars auf den Koordinaten so-und-so ein grüner Stein mit einem Durchmesser von einem Meter liegt, oder aber das ist falsch. Dies ist so ganz unabhängig davon, was wir darüber wissen oder was wir darüber wissen können. Wahrheit ist etwas anderes als Wissen oder

Wissbarkeit.

P: Ich sehe, was du meinst. Einverstanden. Aber hat Aristoteles nun am 18. Oktober 380 v. Chr. um 9:00 Uhr morgens in der Nase gebohrt?

H: Keine Ahnung, wie soll ich das wissen? Das ist auch gar keine philosophische Frage, sondern eine empirische. Davon solltest du die Finger lassen.

P: Stimmt. Ich bin ja ein Philosoph.

H: Darf ich jetzt endlich von meinem Büro weitererzählen?

P: Gerne.

H: Nichts ist in meinem Büro, nichts ist in meinem Sekretariat. Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn in mein Büro. Angenommen, ich stelle ihn in mein Büro: Stelle ich ihn dann vom Eingang aus gesehen links auf oder rechts? Und...

P: Soll ich dazu jetzt sagen, ob dies wahr oder falsch ist?

H: (Noch verwunderter) Wie könntest Du? Ich habe doch nur eine Frage gestellt. Fragen sind aber keine Aussagesätze – anders ausgedrückt: Fragen sind weder wahr noch falsch. Nur die Antwort auf eine Frage kann wahr oder falsch sein.

P: Ah, ja. Und...

H: Und noch etwas beschäftigt mich: Die Ludwigstrasse 31 ist der Ort, an dem sich mein Büro befinden wird...

P: Halt! Das kann gar nicht so sein.

H: ??? Das steht aber doch in meinem Vertrag...

P: In der Sprache der Mathematiker ausgedrückt, hast du gerade behauptet:

$$\text{Ludwigstrasse 31} \quad = \quad \begin{array}{l}\text{der Ort, an dem sich Hannes Leitgebs Büro}\\ \text{befinden wird}\end{array}$$

H: Ganz genau.

P: Das kannst du aber gar nicht so meinen. Die linke Seite dieser Gleichung fängt ja mit einem ‘L’ an, während die rechte Seite mit einem ‘d’ beginnt. Wie sollen die beiden dann identisch sein? Oder können verschiedene Dinge identisch zueinander sein? Das bringt mich zu meinen früheren...

H: Bitte nicht schon wieder!! Ein und dasselbe Ding kann doch ohne weiteres mehrere Namen haben. Ein und dieselbe Örtlichkeit kann zugleich mit dem Namen ‘Ludwigstrasse 31’ und mit der Kennzeichung ‘der Ort, an dem sich Hannes Leitgebs Büro befinden wird’ bezeichnet werden. Mein kleiner Sohn heißt ja auch ‘Sebastian’, und wir bezeichnen ihn dennoch manchmal mittels allerlei Spitznamen. Der eine Name, den ich verwendet habe, um über die Örtlichkeit zu sprechen, die mich interessiert, beginnt mit einem ‘L’, der andere Name mit einem ‘d’, aber beide Namen beziehen sich auf dasselbe Objekt. Und die Gleichung sagt nicht aus, dass die Namen identisch sind, sondern dass das, was der eine Name bezeichnet, identisch ist dem, was der andere Name bezeichnet. Aristoteles ist doch auch identisch mit dem philosophischen Lehrer Alexanders des Großen?

P: Stimmt, das erzähle ich ja auch meinen Studentinnen und Studenten. Dennoch habe ich immer noch Sorgen.

H: Was denn noch?

P: Aristoteles ist der philosophische Lehrer Alexanders. Das heisst: Aristoteles ist identisch dem philosophischen Lehrer Alexanders.

H: Ja.

P: Aristoteles ist ein Philosoph. Heisst das dann: Aristoteles ist identisch dem Philosophen? Aha: Das würde erklären, warum Aristoteles im Mittelalter als 'der Philosoph' bezeichnet wurde. Nur: Platon ist auch ein Philosoph. Heisst das dann: Platon ist identisch dem Philosophen? Und wenn beide mit dem Philosophen identisch sind, sind sie dann nicht einander identisch? Bezeichnet 'Aristoteles' dasselbe Objekt wie 'Platon'? Oh: Ist vielleicht alles eins, und...

H: Du hast nur die logische Form dieser Sätze missverstanden. 'Aristoteles ist der philosophische Lehrer Alexanders' ist in der Tat ein Identitätssatz, so wie der frühere Satz über die Ludwigstrasse 31. Aber 'Aristoteles ist ein Philosoph' ist kein Identitätssatz, noch ist 'Platon ist ein Philosoph' ein solcher. Daher darfst du auch nicht so schließen, wie du es getan hast.

P: Aber wie soll ich das denn erkennen? In beiden Fällen steht einfach nur 'ist'.

H: Das ist der Grund, warum in Logikvorlesungen eine Symbolsprache eingeführt wird, in der das 'ist' in 'Aristoteles ist der philosophische Lehrer Alexanders' klar unterschieden ist vom 'ist' in 'Aristoteles ist ein Philosoph'. Die natürliche Sprache kann einen sonst zu leicht verwirren und Probleme schaffen, wo eigentlich gar keine sind. So wie auch bei 'Nichts ist in meinem Büro': In der logischen Symbolsprache wird es sonnenklar, inwiefern sich 'Nichts ist in meinem Büro' von 'Der Tisch ist in meinem Büro' unterscheidet und was man aus dem einen Satz, nicht aber aus dem anderen Satz schließen darf. Und dies obwohl die beiden Sätze in der natürlichen Sprache so aussehen, als wären sie ganz ähnlich geformt. Deswegen wird meine Logik 1 Vorlesung auch ihren ersten Schwerpunkt auf das Thema logische Repräsentierung legen.

P. Vielleicht sollte ich doch mal eine Logikvorlesung besuchen.

H: (Leicht verzweifelt) Bitte!

P: Was ist jetzt mit der Ludwigstrasse 31?

H: Die Ludwigstrasse 31 ist der Ort, an dem sich mein Büro befinden wird. Aber die Ludwigstrasse 31 gilt auch als der Ort, an dem so seltsame Dinge wie Logik und Wissenschaftstheorie beheimatet sind, vor denen sich die Studierenden angeblich fürchten. Werden sie sich trauen, mich in meinem zukünftigen Büro besuchen zu kommen?

P: Die werden schon zur Ludwigstrasse 31 kommen. Schon weil man dort auch zu anderen Lehrstühlen weitergehen kann. (Grinst)

H: Weißt du, in der Ludwigstrasse 31 gründe ich auch das neue Munich Center for Mathematical Philosophy, das ganz toll werden wird. Weltweit begeistern sich nämlich gerade ungemein viele junge Philosophen und Philosophinnen für die Anwendung logischer und mathematischer Methoden in der Philosophie, es herrscht große Begeisterung und Aufregung darüber, alles ist in einer ähnlichen Aufbruchsstimmung wie damals beim Wiener Kreis, München wird weltweit führend darin sein, und es wäre so schade, wenn unsere Studierenden daran nicht teilhätten.

P: Beruhige dich. Vielleicht komme ich dich ja auch mal besuchen und mit ein bisschen Glück kann ich sogar eine Studentin oder einen Studenten überreden, mich zu begleiten.

H: Das ist nett.

P: Aber jetzt muss ich weiter über die wirklich tiefen Fragen nachdenken. (Senkt den Kopf, murmelt) Wenn die Studierenden in Herrn Leitgebs Büro in die Ludwigstrasse 31 gehen, das Nichts immer noch dort ist, Herrn Leitgebs Schreibtisch sowohl mit einem Lastwagen geliefert als auch in sein Büro geschoben wird, und zugleich Aristoteles und Platon der Philosoph sind: Verdrängen die Studierenden das Nichts aus dem Büro, bewegt es sich dann weiter in den Lastwagen, oder war es vielmehr immer schon dort, und bin vielleicht sogar ich eins mit Aristoteles und Platon? Und Herr Leitgeb mit mir? Rede ich die ganze Zeit mit mir selbst? Ist das Nichts, das dann in dem Lastwagen sein wird, identisch mit dem Nichts, das jetzt in meinem bzw. in Aristoteles' Büro in der Ludwigstrasse 31 ist, und das, obwohl Aristoteles schon tot ist, ich aber nicht? Und wenn Fragen nicht wahr oder falsch sind: Dann muss ich sie doch auch gar nicht beantworten. ... (Winkt und geht weg)

H: Bis bald. Ich sehe dich dann in meiner Vorlesung. (Wischt sich über die Stirn)

Diese Vorlesung wendet sich – wie schon der Titel besagt – an Philosophen, die die Grundzüge der klassischen Aussagen- und Prädikatenlogik kennenlernen wollen (oder müssen :-).

Eine der grundlegenden Aufgaben der Philosophischen Logik ist es, die *logische Form* sprachlicher Ausdrücke herauszuarbeiten, d.h., die logisch relevanten Bestandteile von Ausdrücken zu identifizieren, zu kategorisieren und die

Art und Weise, wie sie zusammengesetzt sind, zu bestimmen. Denn erst wenn feststeht, was überhaupt die logische Form von sprachlichen Ausdrücken ist, können wir angeben, welche logischen Eigenschaften sie haben und in welche logischen Beziehungen sie eintreten, also, ob etwa ein Aussagesatz wahr oder falsch ist, welche anderen Sätze aus dem Satz folgen, durch welche Sätze er impliziert wird, ob er widersprüchlich ist, etc.

Was genau sprachliche Ausdrücke sind und um welche sprachlichen Ausdrücke es der Logik im besonderen geht, werden wir gleich im nächsten Kapitel behandeln. Im Idealfall sollten wir zu jedem sprachlichen Ausdruck der Umgangssprache genau eine "richtige" logische Form finden. Das ist jedoch illusorisch. Die Umgangssprache ist viel zu vage und mehrdeutig, als dass wir in jedem Falle von *der* logischen Form eines umgangssprachlichen Ausdrucks sprechen können. Oft gelingt uns jedoch eine recht gute Annäherung, und falls wir Zweifel hegen, ob wir die (oder eine) "richtige" logische Form gefunden haben, so kann eine solche gefundene logische Form zumindest für einen gewissen Zweck dienlich sein, und falls sie sich nicht als zweckdienlich erweist, so können wir immer noch eine andere Form wählen. Dies alles trägt in jedem Falle zu einem besseren Verständnis unserer Sprache bei und dadurch indirekt auch zu einem besseren Verständnis dessen, worüber unsere Sprache spricht, nämlich der Welt. So können wir Missverständnisse vermeiden, die zu den verschiedensten unliebsamen Konsequenzen führen. Denken wir beispielsweise an folgendes Argument: *Alle schlauen Menschen sind Füchse. Alle Füchse haben vier Beine. Daher haben alle schlauen Menschen vier Beine.* Der Grund, warum wir dieses Argument intuitiv nicht als gültig ansehen, ist, dass wir den Ausdruck 'Füchse' in zwei verschiedenen Bedeutungen verwenden, nämlich einmal in einem metaphorischen und einmal in einem zoologischen Sinn. In einer logischen Sprache könnte uns das nicht passieren, denn dort müssen wir die beiden Vorkommnisse von 'Füchse' durch verschiedene logische Zeichen repräsentieren. Genauso: Der Kontroverse *"Zahlen existieren." "Nein: Zahlen existieren nicht!" "Doch!"* können einerseits unterschiedliche ontologische Theorien zu Zahlen zugrundeliegen, andererseits aber auch unterschiedliche Auffassungen der Bedeutung von 'existieren' (z.B. 'existiert als Objekt oder Individuum egal welcher Art' versus 'existiert als physikalisches Objekt, welches in Raum und Zeit lokalisiert und mit kausalen Kräften versehen ist'). Im ersteren Fall geht es um einen echten wissenschaftlichen Wettstreit darum, welche die bessere philosophische Theorie der Natur der Zahlen ist, der zweitere Fall jedoch wäre bloß das Resultat eines Missverständnisses, welches durch die logische Analyse sprachlicher Ausdrücke vermieden oder zumindest unwahrscheinlicher gemacht werden kann.

Wenn wir also eine logische Form für die sprachlichen Ausdrücke angegeben haben, können wir zur zweiten wichtigen Aufgabe der Logik übergehen, nämlich sprachlichen Ausdrücken *logische Eigenschaften* und *Beziehungen* zuzuschreiben. Wir tun dies ohnehin oft – ganz nebenbei –, selbst wenn wir die Logik noch gar nicht beherrschen. Wenn beispielsweise jemand behauptet, dass Herbert ein Philosophiestudent ist, und wenn wir bereits wissen, dass alle Philosophiestudierenden Logik lernen, dann folgern wir zurecht daraus, dass Herbert Logik lernt. Eine wichtige logische Beziehung ist also z.B. die der *logischen Folge*. Wir wenden logische Folgerungen aber nicht nur im Alltag an, sondern vor allem auch in den Wissenschaften. In allen exakten Wissenschaften gibt man nämlich Theorien dadurch an, dass man gewisse Sätze als grundlegend oder gegeben voraussetzt und alle anderen Sätze, die man für wahr hält, versucht, aus ersteren zu folgern. Im Idealfall werden die Sätze ("Gesetze" und "Beobachtungsdaten"), die man voraussetzt, wahr sein, und dann wird sich die Wahrheit dieser Sätze auch auf diejenigen Sätze (die "Vorhersagen") vererben, die man aus den vorausgesetzten Sätzen herleiten kann.

In der Logik haben wir nun verschiedene Möglichkeiten, solche wichtigen logischen Begriffe – wie den der logischen Folge – exakt zu fassen. In dieser Vorlesung werden wir diese Möglichkeiten aufzeigen und genau behandeln. Insbesondere werden wir feststellen, dass sich logische Form und logische Eigenschaften und Beziehungen in unterschiedlich feiner "Auflösung" erklären lassen: einmal – grobkörniger – *aussagenlogisch* – und andererseits – feinkörniger – *prädikatenlogisch*. Wir werden also alle Themen dieses Buches zweimal behandeln: In der ersten Hälfte unter der schwächeren "Lupe" der Aussagenlogik und in der zweiten Hälfte mit dem stärkeren "Mikroskop" der Prädikatenlogik.

Die Logik ist das grundlegende Werkzeug, das wir Philosophen brauchen, um philosophische Fragen genau und unzweideutig formulieren zu können, um festlegen zu können, unter welchen Bedingungen ein Satz wahr ist, um wichtige philosophische Begriffe definieren zu können, um Argumente auf ihre Gültigkeit hin untersuchen zu können, um stillschweigende Voraussetzungen philosophischer Argumente explizit machen zu können, um aus Behauptungen auf korrekte Weise Schlüsse ziehen zu können, um in einfachen Modellen die Plausibilität von Theorien überprüfen zu können, um mathematische Methoden auf philosophische Fragestellungen anwendbar machen zu können, und um insgesamt Fortschritt in der Philosophie erzielen zu können, so wie z.B. die Naturwissenschafter dies in ihren Wissenschaften leisten. Kurz gesagt: Durch die Logik lernt man klar zu sprechen und klar zu denken – eine Grundanforderung an jede gute Philosophin und jeden guten Philosophen.

Anders ausgedrückt:

> Little progress is made in mathematics or philosophy without a strong capacity for abstract pattern recognition.
>
> (Timothy Williamson, Interview in: V.F. Hendricks und J. Symons (Hg.), *Formal Philosophy*, Breinigsville, PA: Automatic Press, 2005.)

Genau diese Fähigkeit zur logisch-formalen Abstraktion, die man durch das Studium der Logik lernt, wenden meinen Kolleginnen/Kollegen und ich auch in unserem *Munich Center for Mathematical Philosophy* an: Schauen Sie doch mal vorbei! (Physikalisch in der Ludwigstraße 31, virtuell unter *http://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/index.html.*)

Das vorliegende Vorlesungskriptum[1] wird absolut ausreichen, um dem Inhalt der Vorlesung voll und ganz folgen zu können. Hier sind dennoch noch ein paar zusätzliche Literaturempfehlungen zu Logik-Einführungen für Philosophen:

- B. Mates, *Elementare Logik. Prädikatenlogik der ersten Stufe mit Identität*, 2. Auflage, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1978.
- G. Link, *Collegium Logicum*, Band 1, Paderborn: Mentis, 2009.
- J. Barwise und J. Etchemendy, *Language, Proof and Logic*, Stanford: CSLI, 2002.
- V. Halbach, *the logic manual*, Oxford: Oxford University Press, 2010.

[1] Dieses Vorlesungsskriptum entsteht in Zusammenarbeit mit Alexander Hieke, welcher an der Universität Salzburg ebenfalls Logik-Vorlesungen abhält. Ich möchte mich sehr bei Marian David und Georg Reiter bedanken, die an der Universität Graz auf Basis dieses Skripts in die Logik eingeführt haben, und deren Rückmeldungen bereits in die aktuelle Version desselben eingeflossen sind.

Kapitel 1

Vorbemerkungen

1.1 Sprachliche Ausdrücke

Wenn es die erste Aufgabe des Gebietes der Philosophischen Logik ist, die logische Form sprachlicher Ausdrücke zu bestimmen, so müssen wir uns zuerst die Frage stellen:

> Was sind sprachliche Ausdrücke?

Am einfachsten ist es, mit einigen typischen Beispielen für sprachliche Ausdrücke (in unserem Fall der deutschen Sprache) zu beginnen. Betrachten wir z.B. die Ausdrücke, die in den folgenden fünf Zeilen vorkommen:

> Heidi, Herbert, Otto, der Papst, der Stephansdom
>
> fahren, laufen, lachen, beten, weinen
>
> mit, über, auf, unter
>
> Heidi geht, Herbert läuft, Otto singt, der Papst betet

Wir haben hier die sprachlichen Ausdrücke mehr oder weniger genau in grammatikalische Kategorien unterteilt im Sinne der Grammatik der *deutschen Sprache*, welche sich – wie wir sehen werden – nicht mit den Kategorien der *logischen Sprachen* decken, die wir später behandeln werden. Darüber hinaus können wir mit den Mitteln der natürlichen Sprache auch "sinnlose" Ausdrücke wie

> Stephansdom lachen, Heidi über, Herbert weinen Otto unter

bilden. In jedem Fall haben wir es dabei mit sprachlichen Ausdrücken zu tun. Wir wissen aber immer noch nicht, welche Art von "Dingen" sprachliche Ausdrücke denn nun sind.

Und das ist auch nicht einfach zu beantworten: Wir können ja auch mit Hilfe unserer Stimmbänder, Zunge, Lippen, etc. Laute erzeugen, die wir als sprachliche Ausdrücke betrachten – wenn auch sprachliche Ausdrücke recht flüchtiger Natur, nämlich Schallwellen, also Longitudinalschwingungen der Luftmoleküle. Freilich haben wir schon seit geraumer Zeit die technischen Möglichkeiten, diese Schallwellen aufzuzeichnen, aber im Allgemeinen haben wir solche Aufzeichnungsgeräte nicht zur Hand, und die von uns produzierten Schallwellen sind unwiederbringlich "verloren". Nichtsdestotrotz sind sie sicherlich sprachliche Ausdrücke. Weniger flüchtig sind solche sprachlichen Ausdrücke, die niedergeschrieben wurden – im traditionellen Fall Tinte-, Kreidehäufchen oder Ähnliches. Wir tippen sprachliche Ausdrücke aber auch in unsere Computer. Hier stellt sich bereits ganz deutlich die Frage, was denn die sprachlichen Ausdrücke in diesem Falle sind, die Lichtpunkte am Monitor, die Elektronen im Arbeits- oder Massenspeicher oder eine Textdatei auf einem USB-Stick (was auch immer genau das sein mag)? Wir wollen diese Frage hier nicht beantworten, sondern nur darauf hinweisen, dass dies letztlich eine Frage der Konvention ist: Wir selbst – also die Sprecher – entscheiden, welche physikalischen Gegenstände wir als sprachliche Objekte anerkennen und verwenden, auch wenn uns diese Entscheidung beim Gebrauch der Sprache meist gar nicht bewusst ist.

Es gibt aber für unsere Zwecke hier noch wichtigere Probleme. Betrachten wir die Aussagesätze

> Otto ist ein Philosoph.
>
> Otto ist ein Philosoph.
>
> Otto is a philosopher.

Die Frage is nun: Wie viele verschiedene Sätze stehen hier? Die Antwort ist jedoch noch nicht eindeutig zu geben, da wir noch nicht wissen, was mit dem Wort 'Satz' gemeint ist. Wenn wir Sätze als Häufchen, etwa bestehend aus Druckerschwärze, betrachten, also als konkrete *Inschriften* oder *Vorkommnisse*, so stehen hier *drei* Sätze. Betrachten wir sie hingegen als abstrakte Gegenstände in dem Sinne, dass sie Mengen gestaltgleicher Inschriften sind, so stehen hier nur *zwei* Sätze, denn zwei der Inschriften fallen dann unter ein und denselben *Typus*. Wir unterscheiden hier also zwischen sogenannten Inschriften und deren Typen. Die Typen (die Mengen gestaltgleicher Inschriften) gewinnen wir durch Abstraktion aus den Inschriften, indem wir gestaltgleichen Inschriften denselben Typ zuordnen. Für die Bestimmung des Typs einer Inschrift ist also nur wichtig, wie die Inschrift "aussieht", nicht aber *wo* sie *wann* vorkommt. Umgekehrt erhalten wir durch Instantiierung bzw. Realisierung konkrete Inschriften aus deren Typus. In der englischen wie oft auch in der deutschen Fachliteratur werden Inschriften bzw. Vorkommnisse übrigens als '*tokens*' bezeichnet und die Typen als '*types*'.[1] Wenn wir uns also fragen, wie viele Sätze oben stehen, und wenn wir mit 'Satz' den Typus meinen, dann meinen wir offensichtlich mit 'oben stehen': 'oben als Inschrift instantiiert/realisiert sein'. Wenn wir jedoch mit 'Satz' die Inschrift meinen, dann meinen wir mit 'oben stehen': 'räumliche Koordinaten haben, die oben auf dem Papier liegen'. Satztypen haben natürlich keine räumlichen Koordinaten, genauso wenig wie man von Satzinschriften sagen würde, sie seien instantiiert/realisiert.

Die Unterscheidung zwischen Vorkommnissen und Typen finden wir nicht nur im Hinblick auf sprachliche Gegenstände – ganz im Gegenteil: Wir treffen sie auch oft im Alltag an. Wenn etwa auf einer Straße im Abstand von zwei Minuten zwei VW Käfer an uns vorbei rollen, dann haben wir zwei Instantiierungen desselben Autotyps beobachtet, also zwei Käfer-Vorkommnisse vom Käfer-Typus.

Im Falle sprachlicher Ausdrücke gibt es jedoch noch eine dritte Antwort auf die Frage, wie viele Sätze denn nun in der obigen Liste stehen, eine Antwort, die uns bei Automobilen nicht zur Verfügung steht. Sowohl Inschriften als auch Typen haben nämlich im allgemeinen eine *Bedeutung* (während dies bei Automobilen im allgemeinen nicht der Fall ist – auch wenn so manchen Leuten ihr Auto wohl recht viel "bedeutet"). Wenn wir nämlich Sätze als sogenannte *Propositionen* betrachten, nämlich als die Bedeutungen von Inschriften oder Typen, so haben wir es oben mit genau *einem* Satz zu tun, da alle drei Inschriften bzw. zwei Typen dieselbe Bedeutung haben bzw. dieselbe Proposition ausdrücken. Wir sehen also, dass ein und dieselbe Proposition durch Inschriften bzw. Typen verschiedener Sprachen ausgedrückt werden kann. Denn der deutsche Satz 'Otto ist ein Philosoph' drückt offensichtlich dieselbe Proposition aus wie der englische Satz 'Otto is a philosopher'. Dies erkennen wir u.a. daran, dass wir 'Otto is a philosopher' als englische Übersetzung des deutschen Satzes 'Otto ist ein Philosoph' anerkennen. Wir können jedoch auch ein und dieselbe Proposition durch zwei Satztypen derselben Sprache ausdrücken. Z.B. drücken die Satztypen der folgenden Satzinschriften dieselbe Proposition aus:

- Herbert ist der Bruder von Josef.

[1] Diese Terminologie geht auf den bedeutenden amerikanischen Philosophen Charles Sanders Peirce zurück.

- Josef ist der Bruder von Herbert.

Wir wollen hier bis auf weiteres den "Mittelweg" beschreiten und Sätze bzw. sprachliche Ausdrücke der natürlichen Sprachen im allgemeinen als Typen betrachten, also als Mengen gestaltgleicher Inschriften. Diese Typen sind es also, die wir logisch analysieren, um deren logische Form zu erhalten. Der Grund, dass wir diesen Mittelweg wählen, ist, dass (i) Inschriften – wie bereits erwähnt – recht flüchtiger Natur sind, und Logiker sich lieber mit Dingen beschäftigen, die ihnen immer zur Verfügung stehen (auch wenn diese Dinge abstrakt sind), und dass (ii) Propositionen von vielen Philosophen und Logikern als einigermaßen dubiose Entitäten betrachtet werden, ja dass sogar deren Existenz in Zweifel gezogen wird.[2] Um also auch den Bedenken dieser Philosophen und Logiker Genüge zu tun, wollen wir von der Einführung von Propositionen absehen, zumal wir sie für unsere Zwecke hier tatsächlich nicht benötigen. Typen sind in der Tat genau diejenigen Entitäten, die für unsere Bedürfnisse am besten geeignet sind.

1.2 Verwendung und Erwähnung

Im vorigen Abschnitt haben wir – wie das so üblich ist – Sätze und andere sprachliche Ausdrücke *verwendet*, um Informationen zu übermitteln. Darüber hinaus haben wir aber auch gewisse sprachliche Ausdrücke *erwähnt*. Z.B. haben wir oben den Satz 'Denn der deutsche Satz 'Otto ist ein Philosoph' drückt offensichtlich dieselbe Proposition aus wie der englische Satz 'Otto is a philosopher'.' verwendet, in dem wir sowohl den deutschen Satz 'Otto ist ein Philosoph' als auch den englischen Satz 'Otto is a philosopher' erwähnt, d.h. über dieselben "geredet" haben. Wir sehen schon, dass die Verwendung von einfachen Anführungszeichen ein gängiges Mittel ist, um zu verdeutlichen, dass wir einen sprachlichen Ausdruck erwähnen und nicht verwenden. Wir wollen im folgenden *einfache* Anführungszeichen nur dazu verwenden, um Ausdrücke zu erwähnen. *Doppelte* Anführungszeichen können wir dazu verwenden, um jemanden zu zitieren oder um einen metaphorischen Sprachgebrauch anzudeuten.

Dazu einige Beispielsätze:

1. 'Otto' hat vier Buchstaben.

2. 'Otto' hat fünf Buchstaben.

[2] Der bekannteste Vertreter einer "propositionslosen" Philosophie ist Willard Van Orman Quine, einer der bedeutendsten Philosophen des 20. Jahrhunderts.

3. Otto hat vier Buchstaben.

4. Otto ist ein Mann.

5. ‘Otto’ ist ein Mann.

Im ersten, zweiten und fünften Satz sprechen wir von dem Wort, also dem sprachlichen Ausdruck, ‘Otto’, während wir im dritten und vierten Satz von der Person Otto sprechen. Der erste Satz ist wahr, der zweite falsch, und der dritte Satz scheint sinnlos zu sein. Der vierte Satz ist wahr, und der fünfte Satz scheint wiederum sinnlos zu sein. Betrachten wir jedoch den dritten und fünften Satz etwas genauer: Im dritten Satz wird der Person Otto die Eigenschaft zugeschrieben, vier Buchstaben zu haben. Dies erscheint auf den ersten Blick deshalb sinnlos, weil man üblicherweise Eigenschaften von sprachlichen Ausdrücken niemals Personen zuschreiben oder auch aberkennen würde. In der Logik dürfen wir jedoch durchaus ein wenig liberaler sein, d.h., wenn nur Ausdrücke Buchstaben haben können und Otto eine Person ist, dann ist der Satz ‘Otto hat vier Buchstaben’ schlichtweg *falsch* (und nicht sinnlos). Im folgenden werden wir der Einfachheit halber oftmals diesen toleranteren Weg beschreiten. Aus analogen Gründen kann man auch den fünften Satz als falsch betrachten, da ja sprachliche Ausdrücke niemals Männer sind. Im Falle des dritten Satzes haben wir sogar noch eine weitere Möglichkeit, den Sinn dieses Satzes zu “retten”: Wir können den Ausdruck ‘haben’ nämlich im Sinne von ‘besitzen’ verstehen, und wenn Otto wirklich vier Buchstaben (z.B. ausgeschnittene Kartonstücke oder ähnliches) besitzt, dann ist der Satz sogar wahr.

Neben der Verwendung von Anführungszeichen gibt es noch einige andere Methoden, um Ausdrücke zu erwähnen; wir verwenden im folgenden insbesondere durch Absetzung und Einrückung gekennzeichnete Kontexte. Wenn wir z.B. oben den Satz

1. ‘Otto’ hat vier Buchstaben.

durch die Methode der Absetzung und Einrückung erwähnt haben, dann hätten wir dies auch durch das Setzen einfacher Anführungszeichen bewerkstelligen können, wenn auch auf Kosten der Übersichtlichkeit. Die Methode der Absetzung und Einrückung wird in diesem Buch aber manchmal auch dazu verwendet werden, gewisse Zeichenfolgen besonders hervorzuheben.

Nachdem wir nun ein wenig Verständnis von Verwendung und Erwähnung von sprachlichen Ausdrücken gewonnen haben sollten, können wir diese Begriffe noch etwas exakter fassen:

> Ein Objekt x wird in einem Satz A *erwähnt* genau dann, wenn in dem Satz A über x gesprochen wird.

Ein Objekt kann dabei alles Mögliche sein: ein Mensch, ein Tier, eine Zahl, ein sprachlicher Ausdruck, etc. Um den Begriff der Erwähnung noch etwas besser verstehen zu können, wollen wir die folgenden Beispiele betrachten:

- (Der Mensch) Aristoteles wird in dem Satz 'Aristoteles ist ein Grieche' erwähnt, da in dem Satz über Aristoteles gesprochen wird.
- (Der sprachliche Ausdruck) 'Aristoteles' wird in dem Satz 'Aristoteles ist ein Grieche' nicht erwähnt, da in dem Satz nicht über (den sprachlichen Ausdruck) 'Aristoteles' gesprochen wird.
- (Der sprachliche Ausdruck) 'Aristoteles' wird in dem Satz ''Aristoteles' hat 11 Buchstaben' erwähnt, da in dem Satz über (den sprachlichen Ausdruck) 'Aristoteles' gesprochen wird.
- (Der Mensch) Aristoteles wird in dem Satz ''Aristoteles' hat 11 Buchstaben' nicht erwähnt, da in dem Satz nicht über Aristoteles gesprochen wird.

Wenden wir uns nun dem Begriff der Verwendung zu. Man kann zwei Arten der *Verwendung* von sprachlichen Ausdrücken unterscheiden:

> Der sprachliche Ausdruck x wird in einem Satz A *syntaktisch verwendet*, wenn x in A als Zeichenfolge vorkommt.
>
> Der sprachliche Ausdruck x wird in einem Satz A *semantisch verwendet*, wenn x in A als Zeichenfolge vorkommt, und wenn x in A so verwendet wird, daß x irgendetwas bezeichnet oder ausdrückt.

Zum Beispiel: Wenn x in A genau einmal als Zeichenfolge vorkommt und dabei unter Anführungszeichen steht, dann wird x beispielsweise in A *nicht* so verwendet, daß x irgendetwas bezeichnet oder ausdrückt. In diesem Fall wird x also nur syntaktisch, aber nicht semantisch verwendet. Die zweitere Bedeutung von 'Verwendung' – Verwendung im *semantischen* Sinne – ist die weit wichtigere. Ist in der Fachliteratur von Verwendung die Rede, dann ist praktisch immer diese Art von Verwendung gemeint, und wir selbst werden 'Verwendung' ebenfalls immer im semantischen Sinne verstehen, solange wir nichts anderes dazusagen.

Betrachten wir nun einige weitere Beispiele zum Begriff der Verwendung:

- (Der sprachliche Ausdruck) 'Aristoteles' wird in dem Satz 'Aristoteles ist ein Grieche' syntaktisch verwendet, da 'Aristoteles' als Zeichenfolge in dem Satz vorkommt, und zwar ganz am Anfang des Satzes.

- (Der sprachliche Ausdruck) ‘Aristoteles’ wird in dem Satz ‘Aristoteles ist ein Grieche’ semantisch verwendet, da ‘Aristoteles’ als Zeichenfolge in dem Satz vorkommt und ‘Aristoteles’ in dem Satz wie üblich dazu verwendet wird, (den Menschen) Aristoteles zu bezeichnen.
- (Der sprachliche Ausdruck) ‘Aristoteles’ wird in dem Satz ‘ ‘Aristoteles’ hat 11 Buchstaben’ syntaktisch verwendet, da ‘Aristoteles’ als Zeichenfolge in dem Satz vorkommt, und zwar fast ganz am Anfang des Satzes, nach genau einem Anführungszeichen.
- (Der sprachliche Ausdruck) ‘Aristoteles’ wird in dem Satz ‘ ‘Aristoteles’ hat 11 Buchstaben’ nicht semantisch verwendet, da ‘Aristoteles’ als Zeichenfolge in dem Satz zwar vorkommt, aber ‘Aristoteles’ in dem Satz nicht wie üblich dazu verwendet wird, (den Menschen) Aristoteles zu bezeichnen, sondern stattdessen als bloß syntaktischer Teil eines Ausdrucks mit Anführungszeichen vorkommt, der selbst – wie wir gleich sehen werden – in dem Satz *semantisch* verwendet wird.
- (Der sprachliche Ausdruck) ‘ ‘Aristoteles’ ’ wird in dem Satz ‘ ‘Aristoteles’ hat 11 Buchstaben’ syntaktisch verwendet, da ‘ ‘Aristoteles’ ’ als Zeichenfolge in dem Satz vorkommt, und zwar ganz am Anfang des Satzes.
- (Der sprachliche Ausdruck) ‘ ‘Aristoteles’ ’ wird in dem Satz ‘ ‘Aristoteles’ hat 11 Buchstaben’ semantisch verwendet, da ‘ ‘Aristoteles’ ’ als Zeichenfolge in dem Satz vorkommt und ‘ ‘Aristoteles’ ’ in dem Satz wie üblich dazu verwendet wird, (den sprachlichen Ausdruck) ‘Aristoteles’ zu bezeichnen. ‘ ‘Aristoteles’ ’ kommt ja in dem Satz *nicht* unter Anführungszeichen vor.

Wie bereits betont: Wenn in der Literatur von der Unterscheidung von Erwähnung und Verwendung die Rede ist, dann ist normalerweise die Unterscheidung von Erwähnung und *semantischer* Verwendung gemeint. In vielen Fällen fallen syntaktische und semantische Verwendung eines Ausdrucks aber einfach zusammen, wie aus dem obigen Beispiel ersichtlich ist, wo von der Verwendung des sprachlichen Ausdrucks ‘Aristoteles’ in dem Satz ‘Aristoteles ist ein Grieche’ die Rede ist.

Man mag sich die Frage stellen, warum wir denn so genau und ausführlich die Unterscheidung zwischen Verwendung und Erwähnung erläutert haben. Der Grund liegt einfach darin, dass wir in der Logik ständig über sprachliche Ausdrücke sprechen müssen, und wir daher sauber zwischen der Verwendung und der Erwähnung von sprachlichen Ausdrücken unterscheiden sollten, um

Verwirrungen vorzubeugen. Nicht nur Logiker, sondern etwa auch Sprachphilosophen und Linguisten sollten sich dieser Unterscheidung bewusst sein, und manchmal sogar auch Wissenschaftler anderer Disziplinen, wie etwa der Mathematik, der Psychologie oder der Soziologie.

1.3 Aussagesätze

Wir haben uns in diesem Kapitel zuerst Gedanken darüber gemacht, was denn sprachliche Ausdrücke ganz im Allgemeinen sind, anschließend haben wir dann die Begriffe der Verwendung und Erwähnung von Ausdrücken unterschieden, da in der Logik häufig über sprachliche Ausdrücke gesprochen wird. Nun wollen wir uns der für die Logik wichtigsten Kategorie sprachlicher Ausdrücke widmen, nämlich der Kategorie der Aussagesätze.

In den natürlichen Sprachen gibt es eine ganze Menge verschiedener grammatikalischer Kategorien, wie die der Substantive, Verben, Präpositionen, Partizipien, Nominalphrasen, etc. Die Logik kümmert sich jedoch um diese Kategorien und diese Kategorisierung nicht allzu sehr. Sie bietet vielmehr ihre eigenen *logischen* Kategorien an, nach denen die Ausdrücke syntaktisch einzuteilen sind. Und die herausragende logische Kategorie – welche wir allerdings auch in der Grammatik der natürlichen Sprachen finden – ist eben die der *Aussagesätze*. Denn die Aussagesätze sind diejenigen sprachlichen Ausdrücke, die uns im Alltag und in den Wissenschaften dazu dienen, Information zu übermitteln und damit sinnvoll zu kommunizieren. Nun ist es sehr schwierig, genau zu charakterisieren, was eine Information ist, und was es denn heißt, eine solche zu übermitteln. Solange diese Begriffe jedoch nicht geklärt sind, sollten wir daher den Begriff des Aussagesatzes nicht damit definieren. Aber es bietet sich ein Ausweg an: Die Aussagesätze dienen uns nicht nur dazu, Information zu übermitteln, sondern sie sind genau diejenigen Ausdrücke, die wahr oder falsch sind. Die Begriffe der Wahrheit und Falschheit sind zudem gut geeignet, als zentrale Begriffe der Logik zu dienen, da es ein primäres Ziel der Wissenschaften ist herauszufinden, welche Aussagesätze denn wahr sind, und welche falsch. Außerdem wurde bereits gezeigt, dass die Definition von 'wahr' und 'falsch' auf wissenschaftlicher Basis durchgeführt werden kann. Wir werden in diesem Buch eine Variante einer solchen Definition kennenlernen, die auf Arbeiten des polnischen Logikers und Philosophen Alfred Tarski beruht.[3] Wir können also Folgendes festlegen:

Ein *Aussagesatz* ist ein sprachlicher Ausdruck, der wahr oder falsch ist.

[3] Vgl. [12].

Etwas ist also ein Aussagesatz genau dann wenn es die Eigenschaft besitzt, wahr oder falsch zu sein.

Die Intuitionen, die uns dabei leiten, sind die folgenden: Ein Aussagesatz ist wahr, wenn er mit der Wirklichkeit übereinstimmt, sonst falsch. Diese Intuitionen wollen wir später formal exakt fassen.

Bringen wir nun einige Beispiele für Sätze der deutschen Sprache, von denen manche – aber nicht alle – Aussagesätze sind:

1. Salzburg hatte im Jahre 1998 mehr als 140.000 Einwohner.
2. Bertrand Russell erhielt im Jahre 1950 den Nobelpreis.
3. Sherlock Holmes erhielt im Jahre 1950 den Nobelpreis.
4. Die Quadratwurzel aus 2 erhielt im Jahre 1950 den Nobelpreis.
5. Hast Du das Fenster geschlossen?
6. Habe ich Dir nicht schon hundert Mal gesagt, dass Du das Fenster schließen sollst?
7. Österreich gewährt politischen Flüchtlingen Asyl.
8. Österreich soll politischen Flüchtlingen Asyl gewähren.
9. $7 + 5 = 12$.
10. $7 + 5 = 11$.
11. $((a + b) + c) = (a + (b + c))$.
12. $a \cdot (b + c) = a \cdot b - a \cdot c$.
13. Herbert löscht die Tafel.
14. Herbert, lösche die Tafel!
15. Herbert löscht die Tafel!
16. Es ist möglich, dass es Leben auf dem Mars gibt.
17. Es ist möglich, dass $2 \cdot 2 = 3$.
18. Es ist gut, nicht zu stehlen.
19. Johann Sebastian Bach ist ein um vieles besserer Komponist als Hector Berlioz.

20. Heidi liebt Herbert.

21. Herbert wird von Heidi geliebt.

22. Heidi weiß, dass Herbert glaubt, dass er sie liebt.

23. Das, was zuvor ist, ist natürlich auch nachher nicht.

Wenn wir wissen wollen, welche dieser Zeichenfolgen ein Aussagesatz ist, müssen wir uns die Frage stellen, ob die jeweilige Zeichenfolge wahr oder falsch ist. Dazu müssen wir uns nicht unbedingt darüber klar werden, ob die Zeichenfolge wahr ist, noch müssen wir uns darüber klar werden, ob sie falsch ist; wir sollten nur Klarheit darüber gewinnen, ob sie *wahr-oder-falsch* ist. Es geht also nur darum festzustellen, ob der jeweilige sprachliche Ausdruck überhaupt in die Kategorie der Zeichenfolgen gehört, denen man sinnvoll einen Wahrheitswert zuschreiben kann. Hat der Ausdruck keine der beiden Eigenschaften der Wahrheit bzw. der Falschheit, dann ist er auch kein Aussagesatz.

Satz 1 ist offensichtlich ein Aussagesatz, und dazu auch noch wahr. Wir können sogar die Wahrheit dieses Satzes feststellen, indem wir in den offiziellen österreichischen Statistiken für das Jahr 1998 nachlesen. Für die Wahrheit des Satzes ist es jedoch eigentlich völlig unerheblich, ob wir dazu in der Lage sind festzustellen, ob dieser Satz wahr oder falsch ist. Selbst wenn wir uns nicht bewusst wären, dass dieser Satz tatsächlich wahr ist, ja selbst wenn wir es gar nicht herausfinden *könnten*, wahr wäre er doch. Und selbst wenn er falsch wäre, würde es sich dabei immer noch um einen Aussagesatz handeln. Auch Satz 2 ist wahr, da der britische Philosoph Bertrand Russell tatsächlich im Jahr 1950 den Literaturnobelpreis erhalten hat. Allenfalls könnte man sich daran stören, dass die Ausdrucksweise 'den Nobelpreis' anzudeuten scheint, dass genau ein Nobelpreis im Jahre 1950 vergeben wurde, was nicht der Fall ist. Aber in dieser Hinsicht dürften wir auch – momentan jedenfalls – tolerant sein. Bezüglich Satz 3 haben wir zwei Möglichkeiten gegeben: (i) Da Sherlock Holmes ja gar nicht existiert und auch nie existiert hat, bezeichnet der Ausdruck 'Sherlock Holmes' nichts, der Satz kann somit auch nicht wahr oder falsch sein, da wir ja keinen Gegenstand zur Verfügung haben, dem wir die Eigenschaft, im Jahre 1950 den Nobelpreis erhalten zu haben, zuschreiben oder absprechen können. (ii) Der Ausdruck 'Sherlock Holmes' bezeichnet sehr wohl etwas, nämlich den fiktiven, von Sir Arthur Conan Doyle erfundenen Detektiv, den wir wissenschaftlich betrachtet vielleicht in der Welt der abstrakten Entitäten finden können, und der somit existiert – in diesem Falle ist Satz 3 falsch. In Abhängigkeit davon, welche Auffassung man vertritt, erweist sich Satz 3 also einmal nicht als Aussagesatz und das andere Mal schon. Wir sehen schon: Es ist nicht immer einfach, festzustellen oder festzulegen, ob ein Satz ein Aussagesatz ist! Das heißt aber nicht, dass es völlig beliebig wäre, einen sprachlichen Ausdruck entweder als Aussagesatz oder eben nicht als Aussagesatz zu klassifizieren: Es hängt eben von der jeweiligen Begründung ab. Und es gibt selbstverständlich unzählige sprachliche Ausdrücke – sagen wir, 'grzfghdj', um einen Extremfall zu wählen – die definitiv *keine* deutschen Aussagesätze sind und über deren Klassifikation es keine weitere Diskussion geben kann.

Zurück zu den obigen Beispielen: Satz 4 von oben ist der modernen logischen Auffassung nach falsch, da die Quadratwurzel aus 2 existiert, aber nie irgendeinen Nobelpreis erhalten hat. Auch wenn wir diesen Standpunkt bevorzugen, so gibt es doch wie bereits angesprochen andere traditionellere Auffassungen, nach denen dieser Satz sinnlos ist, da man Zahlen ja überhaupt nicht sinnvollerweise Eigenschaften von Personen zuschreiben oder absprechen kann: Wenn ein Satz aber sinnlos ist, ist er weder wahr noch falsch, und daher handelt es sich dann gemäß dieser anderen Auffassung bei Satz 4 um keinen Aussagesatz. (Es gibt noch ein Problem mit Satz 4: Welche der beiden Quadratwurzeln aus 2 – $(+\sqrt{2})$ oder $(-\sqrt{2})$ – ist denn gemeint? Für die Frage, ob Satz 4 ein Aussagesatz ist, spielt dies jedoch keine größere Rolle.) Satz 5 ist definitiv kein Aussagesatz, da ein Fragesatz weder wahr noch falsch ist. Satz 6 ist ebenfalls kein Aussagesatz – rein grammatikalisch liegt hier ein Fragesatz vor, der aber tatsächlich als Befehl oder als Aufforderung gemeint ist. Satz 7 ist wahr und daher ein Aussagesatz. Satz 8 ist gemäß vieler Auffassungen wahr, es gibt aber – wie wir im Abschnitt 2.3, S.62 sehen werden – auch Philosophen, die Satz 8 nicht als Aussagesatz betrachten würden, weil diese Philosophen *normative Sätze* ganz allgemein nicht als wahr oder falsch betrachten. Satz 9 bis Satz 12 sind Aussagesätze – mancher davon wahr, mancher davon falsch; gegebenenfalls müsste bei den Sätzen 11 und 12 noch der Zahlbereich angeben werden. Satz 13 ist wieder ein Aussagesatz, im Gegensatz zu den Sätzen 14 und 15, die auf unterschiedliche Art und Weise Aufforderungen zum Ausdruck bringen. Satz 16 und Satz 17 sind ebenfalls Aussagesätze, wobei Satz 16 wahr und Satz 17 gemäß üblicher Auffassung falsch ist. Für Satz 18 gilt all das, was wir schon für Satz 8 festgehalten haben. Auch wenn viele Satz 19 zustimmen würden, ist doch für viele fraglich, ob Satz 19 wirklich ein Aussagesatz ist, da keine Einigkeit darüber herrscht, ob *ästhetische* Ausdrücke wie 'besser' überhaupt etwas in der Welt beschreiben. Die Sätze 20 bis 22 sind allesamt Aussagesätze. Satz 23 ist das "Produkt eines kranken Geistes".

Abgesehen von seiner definierenden Eigenschaft, wahr oder falsch zu sein, kann man einen Aussagesatz auch an folgenden Eigenschaften erkennen:

1. Ein Aussagesatz ist sinnvoll, d.h., er hat eine Bedeutung.

Damit haben auch alle seine Teile eine Bedeutung, und

die Zusammensetzung seiner Teile ist sinnvoll; er ist korrekt gebildet.

2. Ein Aussagesatz hat die Funktion, Information zu übermitteln.

3. Alle Namen, die in einem Aussagesatz vorkommen, bezeichnen existierende Gegenstände, d.h. wenn in einer Zeichenfolge mindestens ein Name vorkommt, der keinen existierenden Gegenstand bezeichnet, dann ist diese Zeichenfolge kein Aussagesatz.

Es gibt auch logische Systeme, die sich mit Aussagesätzen im Sinne von 1 und 2 auseinandersetzen, ohne jedoch 3 vorauszusetzen. Diese Systeme nennt man '*(existenzannahmen-)freie Logiken*' bzw. im Englischen '*Free Logics*'.[4] In diesen wird *nicht* von vornherein angenommen, dass Namen in Aussagesätzen zwangsläufig auch etwas bezeichnen. Da diese aber nicht zu den klassischen logischen Systemen gehören, werden sie in diesem Buch nicht genauer behandelt. Wir werden allerdings an einigen Stellen kurz auf solche Systeme der freien Logik zurückkommen, und auch für die freie Logik stellt die – von uns behandelte – klassische Aussagen- und Prädikatenlogik die Grundlage dar.

[4] Vgl. [6].

1.4 Übungen

Übung 1.1 Wie viele Ausdruckstypen von Buchstaben bzw. Wörtern sind in jedem einzelnen der folgenden Sätze instantiiert, wie viele in allen Sätzen zusammen? Wie oft sind die Ausdruckstypen ‘a’, ‘t’, ‘d’, ‘Hase’ und ‘Nase’ instantiiert?

1. Jeder Hase hat eine Nase.
2. Ich bin ein Hase.
3. Folglich habe ich eine Nase.

Übung 1.2 Ein logischer Laie äußert die drei unteren Übungssätze. Auf welche Arten lassen sich diese Sätze deuten, und was ist die wörtliche Deutung dieser Sätze?

1. Aristoteles hat 11 Buchstaben.
2. Dieser Satz hat 23 Zeichen.
3. ‘Dieser Satz’ hat 10 Zeichen.

Übung 1.3 Geben Sie für jedes der folgenden Beispiele an, an welcher Stelle ein Ausdruck erwähnt bzw. verwendet wird, und *wer* oder *was* dabei jeweils erwähnt oder verwendet wird!

1. Aristoteles ist lang.
2. ‘Aristoteles’ ist lang.
3. Aristoteles ist länger als ‘Aristoteles’.
4. ‘‘Aristoteles’’ ist länger als ‘Aristoteles’.
5. ‘Aristoteles’ bezeichnet nicht ‘Aristoteles’, sondern Aristoteles. ‘‘Aristoteles’’ hingegen bezeichnet nicht Aristoteles, sondern ‘Aristoteles’.
6. ‘Schnee ist weiß’ ist wahr genau dann wenn Schnee weiß ist.
7. Die Verwendung von ‘Verwendung’ und von ‘Erwähnung’ hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden. Das ist der Grund meiner Erwähnung von ‘Die Verwendung von ‘Verwendung’ und von ‘Erwähnung’ hilft, Verwendung von Erwähnung zu unterscheiden.’

8. ‘Das Spielen mit der Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung’ ist nicht ‘alles im Leben, weißt du?’.

9. Dies ist ein Satz mit ‘Zwiebelringen’, ‘Salatblättern’, ‘Tomatenscheiben’ und ‘Pommes Frites als Beilage’.

Übung 1.4 Welche der folgenden Zeichenfolgen sind Aussagesätze? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

1. Herbert und Heidi sind befreundet.

2. Herbert und Heidi sind beliebt.

3. Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.

4. Herbert und Heidi lieben sich.

5. Herbert und Heidi lieben einander.

6. Es ist nicht der Fall, daß Herbert und Heidi beide nicht glücklich sind.

7. Oh nein, oh nein, oh nein! Das darf doch wohl nicht wahr sein!

8. Wenn Herbert in die Stadt gefahren ist, so sitzt er sicherlich bereits in seinem Büro.

9. An der Liebe Niederlagen
läßt der Dichter Lieder nagen.
(Mühsam)

10. Die Quadratwurzel aus Zwiebelsuppe und rechtwinkligem Lebertran ist mit Goethes Wanderjahren verheiratet und liebt Chopin mehr als die Kniekehlen ihrer Mutter.

11. Mein Bart ist genau dann rosarot, wenn ich mich weniger langeweile als die Fleischstrudelsuppe meiner Großmutter.

12. Ich weiß, daß $7 + 5 = 11$.

13. Thales von Milet, ein ionischer Naturphilosoph, sagte die Sonnenfinsternis vom 28. März 585 v.Chr. voraus.

14. Der Räuber sagte: “Geld oder Leben!”, und er nahm beides.

15. Das Wetter ist heute grauenhaft, nicht wahr?

16. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.

17. Zwei Trichter wandeln durch die Nacht.
    Durch ihres Rumpfs verengten Schacht
    fließt weißes Mondlicht
    still und heiter
    auf ihren
    Waldweg
    u.s.w.

    (Morgenstern)

18. Du sollst nicht töten.

19. balzerig würmelte es im männechensee
    und den weibern ward so pfingstig ums heil
    zumahn: wenn ein knie-ender sie hirschelte.
    (Jandl)

20. Schweig, Elender!

21. Kleine Lügen und auch kleine
    Kinder haben kurze Beine.
    (Ringelnatz)

22. Die Eins sind nicht nur, sondern sie erhalten sich durch ihr gegenseitiges Ausschließen. (Hegel)

23. Wer in Wasser badet, kann naß werden.

24. Der einst die Hottentotten schor,
    ist nun Friseur am Schottentor.

25. Dornröschen wurde von einem wunderschönen Prinzen durch einen zärtlichen Kuß aus einem tiefem Schlaf erweckt.

26. Österreich hat sich nach dem Staatsvertrag im Jahre 1955 durch ein Verfassungsgesetz zur Neutralität verpflichtet.

27. Dieses Verfassungsgesetz muß abgeschafft werden.

28. Dieses Lied gefällt mir besonders gut.

29. ’s echt cool, eh?

30. Der Satz mit der Nummer 30 auf dieser Seite ist falsch.

Teil I

Aussagenlogik

Kapitel 2

Aussagenlogische Analyse

Nachdem wir uns ein wenig Klarheit verschafft haben über die Natur sprachlicher Ausdrücke und unsere Weisen des Umgangs mit sprachlichen Ausdrücken (Verwenden und Erwähnen), und nachdem wir die für uns zentralen sprachlichen Ausdrücke kennengelernt haben – nämlich die Aussagesätze – wollen wir uns nun unserer ersten echten logischen Aufgabe widmen: Der logischen Analyse von Aussagesätzen. Unser Ziel wird es dabei letztlich sein, die logische Form von Aussagesätzen zu ermitteln und in einer Symbolsprache wiederzugeben. Der erste Schritt auf unserem Weg dahin wird darin bestehen, uns Gedanken zur Struktur von Aussagesätzen zu machen, die elementaren logischen Bestandteile von Aussagesätzen kennenzulernen und schlussendlich zu verstehen, wie die Wahrheit bzw. Falschheit von zusammengesetzten Aussagesätzen von der Wahrheit bzw. Falschheit ihrer Aussagesatzteile abhängt. Genau dies wird auch das Thema dieses Kapitels sein.

2.1 Einfache Aussagesätze

Wie wir bereits mehrmals betont haben, wollen wir die logische Form von Aussagesätzen bestimmen, und dazu müssen wir untersuchen, wie Aussagesätze logisch zerlegt bzw. analysiert werden können. Dies heißt, wir müssen die logisch relevanten Bestandteile von Aussagesätzen identifizieren und dann betrachten, wie diese miteinander verknüpft sind.

Hier lässt sich folgende grundlegende Unterscheidung treffen: Es gibt Aussagesätze, deren Teile sämtlich *keine* Aussagesätze sind, und es gibt Aussagesätze, die sehr wohl andere Aussagesätze als echte Bestandteile enthalten. Erstere nennen wir ‘einfach’, letztere ‘komplex’. Beispielsweise ist der Aussagesatz

- Herbert liebt Heidi, und Heidi liebt Josef.

komplex, da er zwei Aussagesätze als echte Bestandteile enthält, die durch 'und' verknüpft sind. Diese beiden Bestandteile selbst sind hingegen einfach.

Wir wollen uns zuerst den einfachen Aussagesätzen zuwenden, die sozusagen so etwas wie die "logischen Atome" der Sprache darstellen. Die "einfachsten" der einfachen Aussagesätze sind dabei die, in denen einem Gegenstand eine Eigenschaft zugesprochen wird. Ein Beispiel für einen solchen Satz ist:

- Der Papst ist fromm.

Dabei ist der Ausdruck 'der Papst' ein Name einer Person, wobei wir unter Namen nicht nur Eigennamen verstehen, sondern alle Ausdrücke, die die sprachliche Funktion haben, auf genau einen Gegenstand Bezug zu nehmen. Der Ausdruck 'fromm' ist ein Adjektiv, welches die Eigenschaft ausdrückt, fromm zu sein. Das Wörtchen 'ist' ist eine sogenannte Kopula, welche wir im Deutschen benötigen, um Namen mit Eigenschaftswörtern zu verbinden. Eigenschaften müssen Gegenständen im Deutschen jedoch keineswegs durch Adjektive zugeschrieben werden, wie die folgenden Beispiele zeigen:

- Der Papst ist ein Deutscher.

- Der Papst betet.

Hier werden die Eigenschaften, ein Deutscher zu sein bzw. zu beten, mit Hilfe einer Nominalphrase bzw. eines Verbs ausgedrückt. Die grammatikalischen Unterschiede zwischen Adjektiven, Nominalphrasen und Verben sind logisch jedoch irrelevant. In einem ersten Schritt der logischen Analyse werden wir sie daher nicht berücksichtigen:

- Fromm(der Papst)

- Deutscher(der Papst)

- Betet(der Papst)

Diese Ausdrücke sind nichts anderes als die Übersetzungen der obigen drei natursprachlichen Sätze ins "Logiker-Deutsch". Wir nennen die ganz links stehenden Ausdrücke von nun an '*Prädikate*' bzw. '*generelle Terme*' und die darauf folgenden Ausdrücke in Klammern '*Namen*' bzw. '*singuläre Terme*'. Generelle Terme sind insofern *generell*, als sie auf viele verschiedene Gegenstände zutreffen können. Singuläre Terme sind *singulär* in dem Sinne, als sie genau ein Objekt bezeichnen "wollen".

Die oben angeführten Prädikate sind alle *ein*stellig, d.h., dass mit diesen Prädikaten immer genau ein singulärer Term einhergeht, bzw., dass sie auf genau einen singulären Term angewandt werden. Ein Prädikat kann jedoch im Prinzip beliebig viele Stellen haben, auch wenn in den natürlichen Sprachen Prädikate mit sehr vielen Stellen kaum bzw. gar nicht vorkommen. Ein Aussagesatz, in dem ein zweistelliges Prädikat vorkommt, ist etwa:

- Herbert ist jünger als Heidi.

Ein wenig reglementiert sieht dies im Logiker-Deutsch so aus:

- Jünger(Herbert, Heidi)

Auf ein zweistelliges Prädikat folgen also zwei Namen. Im Allgemeinen sagt man, dass auf ein n-stelliges Prädikat n Namen folgen, wobei n irgendeine natürliche Zahl ist, d.h. $n = 1, 2, 3, \ldots$ Solche Prädikate, die mehr als eine Stelle aufweisen, drücken keine Eigenschaften, sondern vielmehr Relationen bzw. Beziehungen zwischen Gegenständen aus, in unserem Beispiel etwa die Beziehung des Jüngerseins.

Betrachten wir noch einige Beispiele für mehrstellige Prädikate. Der deutsche Satz

- Linz liegt zwischen Wien und Salzburg.

sieht reglementiert wie folgt aus:

- Dazwischenliegen(Linz, Wien, Salzburg)

Hier findet das dreistelliges Prädikat 'Dazwischenliegen' Verwendung. Auch vierstellige Prädikate trifft man in der deutschen Sprache an:

- Herbert fährt mit Heidi von Salzburg nach Wien.

Dies sieht in Logiker-Deutsch so aus:

- Fahren-mit-von-nach(Herbert, Heidi, Salzburg, Wien).

'Fahren-mit-von-nach' ist also ein vierstelliges Prädikat. Etwas natürlicher ausgedrückt könnte man auch sagen, dass

- ____ fährt mit ____ von ____ nach ____

das vierstellige Prädikat ist, welches in dem deutschen Satz vorkommt. Wir können einfache Aussagesätze also auch so betrachten, dass darin die singulären Terme die "Leerstellen" der Prädikate auffüllen und dass dabei die Reihenfolge der eingesetzten singulären Terme wichtig ist. Denn der Satz

- Herbert fährt mit Heidi von Wien nach Salzburg.

hat natürlich eine völlig andere Bedeutung als unser ursprünglicher Satz. Und der Satz

- Herbert fährt mit Wien von Heidi nach Salzburg.

ist vielleicht sogar sinnlos, bestenfalls aber falsch.

Wir haben oben einfache Aussagesätze dadurch charakterisiert, dass sie keine weiteren Aussagesätze als echte Teile enthalten. Wie wir aber an den Beispielen sehen können, lassen sie sich auch anhand ihrer logischen Form charakterisieren:

> *Einfache Aussagesätze* sind Aussagesätze, deren logische Form eine Folge von $n+1$ Ausdrücken ist, deren erstes Glied ein n-stelliges Prädikat P^n ist, und deren zweites bis $n+1$-tes Glied n singuläre Terme $t_1, \ldots, t_n$ sind; einfache Aussagesätze lassen sich also in folgende Form bringen:
>
> $$P^n(t_1, \ldots, t_n)$$

Einfache Aussagesätze bzw. deren Formen werden in der Literatur auch 'atomar', 'elementar' oder 'primitiv' genannt. Alle Aussagesätze, die nicht einfach sind, werden wir '*komplex*' nennen:

> *Komplexe Aussagesätze* sind Aussagesätze, die nicht einfach sind.

Komplexe Aussagesätze sind demnach so etwas wie die "logischen Moleküle" der Sprache. Wenn wir uns der logischen Analyse komplexer Aussagesätze widmen, müssen wir zunächst eine Entscheidung treffen, was denn überhaupt die logisch relevanten Bestandteile von zusammengesetzten Aussagesätzen sind. Gemäß dieser Entscheidung werden wir entweder Aussagenlogik oder Prädikatenlogik oder (wenn auch nicht in diesem Buch) irgendeine andere Logik betreiben. Im nächsten Abschnitt werden wir uns zunächst mit denjenigen komplexen Aussagesätzen auseinandersetzen, die sich *aussagenlogisch* zerlegen lassen. Die zweite Hälfte dieses Buches wird dann damit beginnen, dass wir uns den Details der sogenannten prädikatenlogischen Analyse von Aussagesätzen widmen werden. Was genau mit der Unterscheidung zwischen 'aussagenlogisch' und 'prädikatenlogisch' gemeint ist, wird jedoch bereits im Laufe der nächsten Sektionen klar werden.

2.2 Komplexe aussagenlogisch zerlegbare Sätze

Wir wollen uns nun also den komplexen Aussagesätzen zuwenden. Wir werden verschiedene Arten und Weisen kennenlernen, wie man einfache Aussagesätze zu komplexen Aussagesätzen zusammensetzen kann, wobei nur manche dieser Zusammensetzungen aussagenlogisch analysiert werden können.

2.2.1 Negationssätze

Eine erste einfache Möglichkeit, komplexe Sätze zu bilden, bieten uns die Ausdrücke 'nicht', 'kein' und ähnliche. Wir können beispielsweise den einfachen Aussagesatz

- Johannes ist Vorarlberger.

auf die folgenden Weisen negieren:

- Johannes ist kein Vorarlberger.
- Johannes ist nicht ein Vorarlberger.
- Es ist nicht der Fall, dass Johannes ein Vorarlberger ist.

Dies sind alles natursprachliche Verneinungen bzw. Negationen des obigen einfachen Aussagesatzes. In der ersten Version steckt die Negation im Wörtchen 'kein', in der zweiten Version (die bestimmt nicht in einem stilistisch einwandfreien Deutsch formuliert ist) wird sie schon deutlicher durch die Verwendung des Wörtchens 'nicht', und in der dritten Version ist die Negation dadurch besonders hervorgehoben, dass wir die negierende Phrase 'es ist nicht der Fall, dass' an den Beginn des Satzes gestellt haben. Da alle diese Versionen dieselbe Bedeutung haben, können wir die Verneinung des einfachen Aussagesatzes im Logiker-Deutsch wie folgt standardisieren:

- Nicht Vorarlberger(Johannes)

Wir setzen also die negierende Phrase 'nicht' immer vor den zu negierenden Satz: Es ist der *gesamte Satz* 'Vorarlberger(Johannes)', welcher verneint wird.

Eine alternative Analyse bestünde darin, sich den generellen Term 'Vorarlberger' verneint zu denken (also 'Nicht-Vorarlberger'). Die Analyse als *Satz*negation stellt sich jedoch in vielen Fällen als die weniger komplizierte heraus, weil man ansonsten neben den komplexen Sätzen auch noch komplexe generelle Terme untersuchen müsste. Dies ist zwar logisch möglich, und es gibt entsprechende logische Systeme dafür, es ist aber auch nicht notwendig, auf diese zurückzugreifen. Dazu kommt, dass Negationsausdrücke wie 'Es ist nicht der Fall, dass' im Deutschen ziemlich klar auf einen ganzen Aussagesatz angewendet werden müssen und nicht auf einen generellen Term. (Ähnliche Bemerkungen ließen sich später auch in Bezug auf andere logische Verknüpfungen, wie z.B. ‘und’, treffen. Wir werden aussagenlogische Verknüpfungen stets nur auf ganze Aussagesätze anwenden.)

Während es im Deutschen mehrere Ausdrücke gibt, welche die *Negation* ausdrücken, wollen wir uns in der logischen Sprache auf *genau ein* Zeichen beschränken, und zwar das Symbol $\neg$. Solche aussagenlogische Zeichen, mit Hilfe derer wir aus Sätzen neue Sätze bilden können, nennen wir ‘*Junktoren*’.

Im folgenden sollen ‘A’ und ‘B’ für beliebige Aussagesätze stehen. Wenn A also ein Aussagesatz ist, dann ist

$$\neg A$$

seine Negation. Alle Sätze dieser Form nennen wir ‘*Negationssätze*’. Wir können den obigen Negationssatz daher auch so anschreiben:

- ¬Vorarlberger(Johannes)

Dabei ist die Negation von A wahr, wenn A falsch ist, und sie ist falsch, wenn A wahr ist. Solche Zusammenhänge lassen sich in sogenannten *Wahrheitstafeln* darstellen:

Wahrheitstafel 1 (Negation)

A	$\neg A$
w	f
f	w

Wie wir sehen, verwenden wir die Zeichen ‘w’ und ‘f’ als Abkürzungen für ‘wahr’ und ‘falsch’. Man sagt auch, w und f seien die *Wahrheitswerte* der Wahrheit und Falschheit. Mit dieser Wahrheitstafel ist die Bedeutung des Negationszeichens vollständig erfasst, da wir uns – wie bereits in Kapitel 1 erwähnt – hier nur für die Wahrheit und Falschheit von Aussagesätzen interessieren, zumal gerade diese Eigenschaften von Sätzen für die Wissenschaft von zentraler Bedeutung sind.

Wir können das Negationszeichen nicht nur auf einfache Sätze anwenden, sondern auch auf komplexe. Wenden wir es z.B. auf den obigen Negationssatz an, so erhalten wir:

- ¬¬Vorarlberger(Johannes)

Dieser Satz besagt mehr oder weniger dasselbe wie der ursprüngliche einfache Satz, auch wenn er keineswegs *derselbe* Satz ist, da wir Sätze ja als Satztypen auffassen und nicht als Propositionen. ‘Vorarlberger(Johannes)’ und ‘¬¬Vorarlberger(Johannes)’ drücken zwar vielleicht dieselbe Proposition aus, aber sie unterscheiden sich als Satztypen, da letzterer Negationszeichen enthält, ersterer aber nicht, letzterer aus 24 Zeichen besteht, ersterer aber aus 22, etc.

2.2.2 Konjunktionssätze

Die Negation bietet uns die Möglichkeit, aus *einem* bereits gegebenen Satz einen weiteren jedenfalls komplexen Satz, eben die Negation des ersteren, zu bilden. Die meisten logischen Verknüpfungen jedoch werden auf *zwei* Sätze angewandt, um dadurch einen neuen Satz zu erzeugen. Die erste Verknüpfung dieser Art, die wir nun kennenlernen, ist die Konjunktion.

Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

- Herbert und Hans sind Oberösterreicher.

Dieser Satz ist eine "deutsche Kurzform" für den gleichbedeutenden Satz:

- Herbert ist Oberösterreicher und Hans ist Oberösterreicher.

Dieser sogenannte Konjunktionssatz besteht aus zwei (einfachen) Teilsätzen. Im Logiker-Deutsch könnten wir ihn auch so schreiben:

- Oberösterreicher(Herbert) und Oberösterreicher(Hans)

Wir wollen nun auch einen Junktor zur Bildung von Konjunktionssätzen einführen, und zwar das Symbol $\wedge$. Wenn also A und B Aussagesätze sind, dann ist

$$(A \wedge B)$$

die Konjunktion dieser beiden Sätze. Die runden Klammern verwenden wir deshalb, da wir so Mehrdeutigkeiten vermeiden können, wie wir später noch sehen werden. Wir nennen alle Sätze dieser Form '*Konjunktionssätze*'. Wir können den obigen Konjunktionssatz daher auch so anschreiben:

- (Oberösterreicher(Herbert) $\wedge$ Oberösterreicher(Hans))

Auch hier ist es wieder wichtig festzuhalten, wie die Wahrheitswerte der Teilsätze mit dem Wahrheitswert des gesamten Konjunktionssatzes in Verbindung stehen. Die Konjunktion ist nämlich genau dann wahr, wenn *beide* ihrer Teilsätze wahr sind, denn mit einem Konjunktionssatz will man ja behaupten, dass der eine Teilsatz wahr ist *und* der andere Teilsatz wahr ist. Ist also nur einer der beiden Teilsätze falsch, so ist die gesamte Konjunktion falsch. Dies können wir wieder in einer Wahrheitstafel veranschaulichen.

Wahrheitstafel 2 (Konjunktion)

A	B	$(A \wedge B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Auch hier müssen A und B nicht unbedingt einfache Aussagesätze sein, sondern können selbst bereits zusammengesetzt sein. Z.B. ist auch der Satz

- $\neg$Vorarlberger(Johannes) $\wedge$ (Oberösterreicher(Herbert) $\wedge$ Oberösterreicher(Hans))

ein Konjunktionssatz, dessen erstes *Konjunkt* der Negationssatz

- $\neg$Vorarlberger(Johannes)

ist, und dessen zweites Konjunkt der Konjunktionssatz

- (Oberösterreicher(Herbert) $\wedge$ Oberösterreicher(Hans))

ist.

Man könnte vielleicht argumentieren, dass das natursprachliche 'und' nicht angemessen durch obiges $\wedge$ repräsentiert wäre, da Und-Sätze machmal auch zeitliche Konnotationen mit sich tragen können. Z.B. scheint man durch die Äußerung von 'Sie haben geheiratet und haben ein Kind bekommen' etwas anderes auszudrücken als durch die Äußerung von 'Sie haben ein Kind bekommen und haben geheiratet'. Der britische Philosoph H. Paul Grice[1] argumentierte gegen diese Kritik an der obigen Wahrheitstafel, indem er darauf hinwies, dass wir zwar durch die Äußerung der beiden Sätze Unterschiedliches vermitteln ("implicate") können, dies jedoch nicht heißt, dass die beiden Aussagesätze selbst Unterschiedliches bedeuten und nicht der obigen Wahrheitstafel genügen würden. Dies könne man daran ersehen, dass es logisch konsistent wäre zu sagen: 'Sie haben ein Kind bekommen und haben geheiratet, *jedoch nicht in dieser Reihenfolge*.' Wäre die zeitliche Abfolge ein Teil der wörtlichen Bedeutung von 'und' – wäre sie sozusagen semantisch in die logische Verknüpfung 'und' "eingebaut" – müsste so eine Äußerung ein Widerspruch sein, was aber nicht der Fall sei. Grice zieht daraus den Schluss, dass man die *Semantik* von Aussagesätzen, d.h., ihre Wahrheitsbedingungen, von der *Pragmatik* von Aussagesätzen, d.h. der kommunikativen Rolle von Äußerungen von Aussagesätzen

[1] Siehe [5].

unterscheiden müsse. Die obige Wahrheitstafel für das ‘und’ gehöre in die Semantik und sei für diese voll und ganz adäquat. Zur Pragmatik des ‘und’ müssten dann noch Regeln guter Kommunikation hinzukommen, die überdies sensibel gegenüber dem Äußerungskontext zu sein hätten. (Wir werden auf die Unterscheidung von Semantik und Pragmatik noch zurückkommen.)

2.2.3 Disjunktionssätze

Die nächste Art und Weise, zwei Sätze zu einem neuen Satz zu verknüpfen, besteht darin, ein ‘oder’ zwischen die beiden Sätze zu schreiben. Ein Beispiel für einen solchen Satz ist:

- Der Papst kommt nächsten Sommer nach Wien oder nach Salzburg.

Im Logiker-Deutsch liest sich dies wie folgt:

- Kommt-nach-im(der Papst, Wien, nächster Sommer) oder
  Kommt-nach-im(der Papst, Salzburg, nächster Sommer)

Wir führen dafür den Junktor $\vee$ in die logische Sprache ein, um aus zwei Aussagesätzen A und B deren sogenannte Disjunktion

$$(A \vee B)$$

bilden zu können. Demgemäß können wir obigen Satz auch wie folgt formulieren:

- (Kommt-nach-im(der Papst, Wien, nächster Sommer) $\vee$
  Kommt-nach-im(der Papst, Salzburg, nächster Sommer))

‘nächster Sommer’ ist dabei ebenso wie ‘der Papst’, ‘Wien’ und ‘Salzburg’ ein singulärer Term – dieser Term bezieht sich freilich nicht auf eine Person oder eine Stadt, sondern vielmehr auf eine Zeitspanne, eben den nächsten Sommer.

Wir gehen davon aus, dass unser Beispielsatz wahr ist, (i) wenn der Papst nächsten Sommer nach Wien kommt, nicht aber nach Salzburg, (ii) wenn er nächsten Sommer nach Salzburg kommt, nicht aber nach Wien, aber auch (iii) wenn er nächsten Sommer sowohl nach Wien als auch nach Salzburg kommt. Wenn wir diesen Satz also so verstehen, dann haben wir es hier mit der *einschließenden* Disjunktion zu tun, zu welcher die folgende Wahrheitstafel gehört:

Wahrheitstafel 3 (Disjunktion)

A	B	$(A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Analog zu den Konjunktionssätzen lassen sich Disjunktionssätze sowohl aus einfachen als auch aus komplexen Sätzen zusammensetzen.

Wenn wir den vorigen Beispielsatz jedoch so verstehen, dass der Papst im nächsten Sommer entweder nach Wien kommt oder nach Salzburg, aber keinesfalls beide Städte besucht, dann haben wir es mit der *ausschließenden* Disjunktion zu tun. Beispiele, die wir im Sinne einer ausschließenden Disjunktion verstehen könnten, wären:

- Bei diesem chinesischen Menü gibt es Suppe oder Frühlingsrolle als Vorspeise.
- Alex ist männlich oder weiblich.

Diese ausschließende Disjunktion hat natürlich eine andere Wahrheitstafel, nämlich:

Wahrheitstafel 4 (ausschließende Disjunktion)

A	B	$(A \curlyvee B)$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

In der Logik spielt jedoch die einschließende Disjunktion die bei weitem größere Rolle. (In der Mengentheorie, also einem Teil der Mathematik, verhält es sich ganz ähnlich: Dort wird auch die Vereinigung zweier Mengen als grundlegender angesehen als das Bilden der sogenannten "symmetrischen Differenz" zweier Mengen. Vereinigung entspricht dem einschließenden 'oder', symmetrische Differenz dem ausschließenden 'oder'.)

Zudem lässt sich die ausschließende Disjunktion mit Hilfe der einschließenden Disjunktion (und der Negation und Konjunktion) definieren:

$(A \curlyvee B)$ genau dann, wenn $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$.

Später werden wir sehen, dass die Wahrheitstafeln von $(A \curlyvee B)$ und $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$ übereinstimmen. Wir werden das Zeichen $\curlyvee$ für die ausschließende Disjunktion also wieder vergessen und in Zukunft nur mehr die einschließende Disjunktion verwenden. Wenn wir im Folgenden von *Disjunktionssätzen* spechen, so meinen wir immer Sätze, deren logische Form mittels der *einschließenden* oder-Verknüpfung gebildet wird. Auch in obigem 'Bei diesem chinesischen Menü gibt es Suppe oder Frühlingsrolle als Vorspeise' lässt sich übrigens das 'oder' durchaus als einschließend verstehen, man muss sich nur als stillschweigende Zusatzinformation "hinzudenken": ... und natürlich beinhaltet jedes Menü nur eine Speise pro Gang.

2.2.4 Implikationssätze

Zu den wichtigsten Typen von komplexen Aussagesätzen gehören diejenigen, die mit Wenn-dann-Phrasen gebildet werden. Diese Sätze nennt man *Implikationssätze*. Ein Beispiel für einen Implikationssatz ist:

- Wenn Mozart Salzburger ist, dann ist er Österreicher.

Im Logiker-Deutsch sieht dieser Satz wie folgt aus:

- Wenn Salzburger(Mozart), dann Österreicher(Mozart)

Der Junktor $\rightarrow$, den wir als Zeichen für die Implikation in die logische Sprache einführen, steht für das gesamte 'Wenn-dann', d.h., dass wir die in der deutschen Sprache getrennte Phrase zu einem einzigen Symbol "zusammenfassen", welches wir zwischen die Teile des Implikationssatzes setzen. Unser Beispiel lässt sich also mit dem neuen Junktor so formulieren:

- Salzburger(Mozart) $\rightarrow$ Österreicher(Mozart)

Dabei nennt man den Aussagesatz, der vor dem Junktor steht, das '*Antezedens*' des Implikationssatzes, und den Aussagesatz, der nach dem Junktor steht, das '*Konsequens*' des Implikationssatzes.

Während die Angabe der Wahrheitstafeln für die Negation, Konjunktion und Disjunktion relativ unproblematisch war, stellt uns die Angabe der Wahrheitstafel für die Implikation vor größere Schwierigkeiten. Unsere Aufgabe ist es, folgende Wahrheitstafel mit Wahrheitswerten aufzufüllen:

Wahrheitstafel 5

A	B	$(A \to B)$
w	w	?
w	f	?
f	w	?
f	f	?

Nun wollen wir die Fragezeichen Schritt für Schritt ersetzen – wir werden noch sehen, wohin genau uns das führen wird.

Intuitiv betrachten wir unseren vorigen Beispielsatz zu Mozart doch als wahr. Darüberhinaus wissen wir, dass sowohl das Antezedens als auch das Konsequens dieses Satzes wahr ist, dass also Mozart sowohl Salzburger als auch Österreicher ist. Wir haben also ein Beispiel gefunden, in dem $(A \to B)$ wahr ist, und auch A und B wahr sind: Wir können daher das erste Fragezeichen in unserer Tafel von oben sicher nicht durch ein 'f' ersetzen, denn sonst müßten wir $(A \to B)$ auch in unserem Beispiel als falsch bewerten, was kontraintuitiv wäre. Da wir aber dann nur mehr ein 'w' für das erste Fragezeichen einsetzen können, erhalten wir:

Wahrheitstafel 6

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	?
f	w	?
f	f	?

Betrachten wir nun den folgenden Satz:

- Wenn 6 durch 3 teilbar ist, dann ist 6 nicht durch 3 teilbar.

Diesen Satz kann man halbformal so aufschreiben:

- Teilbar-durch$(6, 3) \to \neg$Teilbar-durch$(6, 3)$

Intuitiv ist dieser Satz falsch. Sein Antezedens ist zwar wahr, aber sein Konsequens ist falsch. Wir können daher das zweite Fragezeichen in der Tafel oben nicht durch ein 'w' ersetzen, weil der von uns betrachtete Implikationssatz sonst als wahr bewertet werden müßte, was in unserem Beispiel kontraintuitiv wäre. Es bleibt uns also nur die folgende Erweiterung unserer Tafel:

Wahrheitstafel 7

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	?
f	f	?

Nun zu den zwei verbleibenden Fragezeichen in der letzten Wahrheitstafel: Hier verlassen uns unsere Intuitionen etwas, da wir es nicht gewöhnt sind, Wenn-dann-Sätze zu bewerten, deren Antezedens falsch ist. Wir wollen daher von vornherein keine der verbleibenden vier Möglichkeiten ausschließen:

(1)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w?
f	f	w?

(2)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w?
f	f	f?

(3)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f?
f	f	w?

(4)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f?
f	f	f?

Lassen wir Möglichkeit (1) vorerst beiseite, und wenden wir uns gleich Möglichkeit (2) zu: Wie wir sehen können, ist gemäß Tafel (2) der Wahrheitswert von $(A \to B)$ immer identisch mit dem Wahrheitswert von B. Was Wahrheit und Falschheit betrifft, könnten wir unter Verwendung der Tafel (2) also immer statt $(A \to B)$ einfach B verwenden. Aber das entspricht keineswegs unserem sprachlichen Verständnis des 'wenn-dann'. Ein Implikationssatz hat nicht notwendigerweise dieselbe Bedeutung noch denselben Wahrheitswertverlauf wie sein Konsequens. Also müssen wir Tafel (2) verwerfen.

Die Tafel (3) werden wir im nächsten Unterabschnitt kennenlernen, sie passt nämlich genau zu den sogenannten Äquivalenzsätzen, wie z.B.

- Hans ist der Bruder von Herbert genau dann, wenn Herbert der Bruder von Hans ist.

die als wahr gelten werden, wenn der linke Teil der Äquivalenz denselben Wahrheitswert aufweist wie der rechte Teil der Äquivalenz. Für die Implikationssätze ist diese Wahrheitstafel dann aber natürlich nicht geeignet, denn

Äquivalenzsätze drücken Implikationen “in beide Richtungen” aus: Ein Äquivalenzsatz hat nämlich dieselbe Bedeutung wie $((A \to B) \land (B \to A))$ und daher nicht wie $(A \to B)$ allein.

Die Tafel (4) kennen wir bereits – es handelt sich um die Wahrheitstafel der Konjunktion. Aber $(A \to B)$ und $(A \land B)$ sollten sicherlich nicht in denselben “logischen Topf” geworfen werden. Also scheiden wir auch Tafel (4) aus.

Damit bleibt uns nur mehr die Möglichkeit (1) übrig:

Wahrheitstafel 8 (Implikation)

A	B	$(A \to B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wenn wir also die natursprachliche, durch Wenn-dann-Sätze ausgedrückte Implikation *überhaupt* mit einer Wahrheitstafel erfassen können, dann nur durch *diese* Wahrheitstafel. Ein Implikationssatz ist also immer wahr, wenn sein Antezedens falsch ist, und er ist auch immer wahr, wenn sein Konsequens wahr ist. Es gibt nur einen einzigen Fall, in dem er falsch ist: Sein Antezedens ist wahr, und sein Konsequens ist falsch.

Die Logiker sind sich sehr wohl bewusst, dass mit dieser Wahrheitstafel – gerade in den Fällen, in denen das Antezedens falsch ist – die Bedeutung natursprachlicher Implikationssätze nicht immer adäquat wiedergegeben werden kann. Es hat sich aber gezeigt, dass diese Wahrheitstafel für die logische Konstruktion wissenschaftlicher Theorien hinreichend ist und sich als außerordentlich praktisch und nützlich erweist. Weiters stellt die Analyse mit Hilfe obiger Wahrheitstafel auch die *einfachste* Methode dar, Implikationssätze logisch zu analysieren. Für die linguistisch adäquate Analyse mancher natursprachlicher Implikationssätze ist die Wahrheitstafelmethode dennoch nicht geeignet. Oft verwenden wir einen Implikationssatz nämlich, um eine Beziehung zwischen Antezedens und Konsequens auszudrücken, die über eine reine Verknüpfung von Wahrheitswerten hinausgeht.[2]

Geben wir einige Beispiele dazu an:

[2] Der britische Philosoph H. Paul Grice, den wir bei den Konjunktionssätzen schon erwähnt hatten, hat allerdings argumentiert, dass natursprachliche Implikationssätze (zumindest die im Indikativ formulierten) *semantisch* gesehen sehr wohl immer materiale Implikationen sind, d.h. der Wahrheitstafel der materialen Implikation genügen, dass Äußerungen derselben jedoch *pragmatisch* mit verschiedenen Konnotationen versehen sein können, die sich aus den Regeln unserer Kommunikationspraxis heraus erklären lassen. Nach Grice wäre also die Wahrheitstafelmethode sehr wohl immer auf solche Wenn-dann-Sätze anwendbar,

- Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
- Wenn am 31. Dezember vermehrt Sonnenflecken auftreten, dann kommt es am 1. Jänner zu einem schweren Konjunktureinbruch.

Diese beiden Sätzen könnte man auch so verstehen, dass ein kausaler Zusammenhang zwischen Antezedens und Konsequens zum Ausdruck gebracht werden soll, den man deutlicher auch mit einem Wort wie 'weil' hätte ausdrücken können:

- Weil es regnet, ist die Straße nass.
- Weil am 31. Dezember vermehrt Sonnenflecken auftreten, kommt es am 1. Jänner zu einem schweren Konjunktureinbruch.

Wir werden unten auf S.59 sehen, dass der Wahrheitswert solcher Sätze nicht alleine vom Wahrheitswert seiner Teilsätze abhängt und daher die Bedeutung von 'weil' nicht durch eine Wahrheitstafel erfasst werden kann. Auf der anderen Seite sollte man nicht glauben, dass jeder Wenn-dann-Satz einen kausalen Zusammenhang ausdrücken soll: Wenn eine Mathematikerin den Satz 'Wenn n durch 4 teilbar ist, dann ist n auch durch 2 teilbar' behauptet, dann möchte sie natürlich nicht sagen, dass irgendein kausaler Prozess die eine Teilbarkeitseigenschaft von n mit der anderen verbinden würde, dass daher die Teilbarkeit von n durch 2 zeitlich ein wenig nach der Teilbarkeit von n durch 4 "stattfinden" würde, oder dergleichen. Stattdessen drückt das 'wenn-dann' in der Mathematik *begriffliche* Zusammenhänge aus. (Ähnlich: 'Wenn Hans ein Junggeselle ist, dann ist Hans unverheiratet' ist wahr, weil es zur *Definition* des Ausdrucks 'Junggeselle' gehört, einen unverheirateten Mann zu bezeichnen.)

Ähnlich wie bei den Kausalsätzen verhält es sich bei den sogenannten *irrealen* oder *kontrafaktischen Konditionalsätzen*, wie z.B.:

- Wenn Oswald Kennedy nicht erschossen hätte, dann wäre Nixon niemals Präsident geworden.

Auch solche Sätze sind einer logischen Analyse mittels Wahrheitstafel nicht zugänglich. Insbesondere würde man einen solchen im irrealen Konjunktiv formulierten Wenn-dann-Satz nicht schon deshalb als wahr bewerten wollen, weil sein Wenn-Teil falsch ist, wie es ja gemäß unserer Wahrheitstafel oben der Fall wäre. Insgesamt stellt sich die Wahrheitstafel von oben als ungeeignet für

soweit die semantischen Eigenschaften derselben betroffen sind und nicht die pragmatischen. Mehr dazu findet sich unter [5]. Die Unterscheidung von Semantik und Pragmatik werden wir auch zu Beginn des Kapitels 6 kurz behandeln.

die Analyse von Implikationssätzen im *Konjunktiv* dar (während die Wahrheitstafel für die Analyse von Implikationssätzen im *Indikativ* – also *nicht* in der Möglichkeitsform - weit vielversprechender ist).

Wir müssen uns überhaupt gänzlich von der Idee befreien, dass irgendein *engerer inhaltlicher* Zusammenhang zwischen dem Antezedens und dem Konsequens eines Implikationssatzes bestehen muß. So etwas mag zwar im Alltag selten vorkommen, aber man kann doch sinnvollerweise sagen:

- Heute ist Dienstag und der Papst ist Katholik.
- Heute ist Dienstag oder der Papst ist Katholik.

Genauso kann man aber sinnvollerweise folgenden Implikationssatz behaupten:

- Wenn heute Dienstag ist, dann ist der Papst Katholik.

Das Konsequens ist wahr, daher ist gemäß der Wahrheitstafel für die Implikation auch der Implikationssatz wahr.

Die Analyse von Implikationssätzen, die ganz bestimmte kausale, zeitliche oder andere inhaltliche Zusammenhänge zwischen den Teilsätzen ausdrücken sollen, ist *nicht* Gegenstand der elementaren Aussagenlogik, aber ein wichtiger Forschungsschwerpunkt der philosophischen Logik.[3] Das soll aber nicht heißen, dass es nicht auch sehr gute Argumente dafür gibt, einen erklecklichen Teil der Wenn-dann-Sätze der natürlichen Sprache mittels des $\rightarrow$ mit der vorher diskutierten Wahrheitstafel zu analysieren. In der Tat werden wir später noch einige solche Argumente kennenlernen. Man könnte so sagen: Die Deutung des 'wenn-dann' mittels unserer Wahrheitstafel ist die schwächst mögliche – daher aber auch allgemeinst mögliche! – Deutung des 'wenn-dann', die Implikationssätzen dabei immer noch nicht-triviale logischen Eigenschaften zuspricht. Sie gibt das wieder, was all die verschiedenen Spezifizierungen des 'wenn-dann' in der natürliche Sprache – kausale, begriffliche, konjunktivische usw. – gemeinsam haben. Analysiert man das 'wenn-dann' der natürlichen Sprache mittels unserer Wahrheitstafel lässt man sozusagen *offen*, ob es eine bestimmte kausale, begriffliche, konjunktivische usw. Konnotation besitzen soll. Dabei geht vielleicht Information verloren, das heißt aber noch nicht, dass die entsprechende Analyse nicht für viele Zwecke hinreichend wäre. Wenn man übrigens klarstellen will, dass man das 'wenn-dann' in der durch die obige Wahrheitstafel festgelegte Bedeutung meint, dann fügt man oft hinzu, man meine das *materiale* wenn-dann bzw. das *materiale* Implikationszeichen. 'Material' bedeutet dann so viel wie: rein von Wahrheitswerten abhängig.

[3]Siehe [7].

Manchmal sprechen wir auch davon, dass etwas eine Ursache für etwas anderes ist, wenn wir dabei eigentlich aber nur an hinreichende oder notwendige Bedingungen denken. Diese können wir in der Aussagenlogik jedoch sehr wohl behandeln, denn die Termini 'hinreichende Bedingung' und 'notwendige Bedingung' lassen sich hier exakt definieren. Wenn wir etwa sagen:

- Heidis fleißige Mitarbeit in der Lehrveranstaltung "Logik 1" ist eine hinreichende Bedingung für ihren positiven Abschluss dieser Lehrveranstaltung

so ist dies ein falscher Satz. Wenn wir hingegen sagen:

- Heidis fleißige Mitarbeit in der Lehrveranstaltung "Logik 1" ist eine notwendige Bedingung für ihren positiven Abschluss dieser Lehrveranstaltung

so ist dies wohl ein wahrer Satz. Denn wäre der erste Satz wahr, so müsste Heidi über die fleißige Mitarbeit hinaus nichts weiter dazutun, um eine positive Note zu erhalten; dafür muß sie aber auch und vorallem eine Klausur bestehen, etc. Ihre fleißige Mitarbeit ist also nicht *hinreichend* für ihren positiven Abschluss. Der zweite Satz ist aber vermutlich wahr, da sie ohne fleißige Mitarbeit eben kein Verständnis für Logik entwickeln wird und daher dann auch keine positive Note erhalten wird, d.h. ihre fleißige Mitarbeit ist *notwendig* für den positiven Abschluss.

So viel zu den sprachlichen Intuitionen, die der Redeweise von 'hinreichend für' und 'notwendig für' unterliegen – nun zu der einfachsten Weise, diese Intuitionen präziser zu fassen: Überlegungen analog zu den obigen lassen sich auch an der Wahrheitstafel für die Implikation ablesen: Ein Implikationssatz $(A \to B)$ ist ja genau dann falsch, wenn sein Antezedens A wahr und sein Konsequens B falsch ist – die Wahrheit des Antezedens zieht also gleichsam die Wahrheit des Konsequens nach sich, falls der Implikationssatz wahr ist. Das Antezedens ist also immer eine hinreichende Bedingung für das Konsequens – kurz:

- Wenn Antezedens, so Konsequens.

An der Wahrheitstafel für die Implikation sieht man aber auch, dass die Falschheit des Konsequens die Falschheit des Antezedens gewissermaßen nach sich zieht, falls der Implikationssatz wahr ist. Dies bedeutet, dass das Konsequens immer eine notwendige Bedingung für das Antezedens ist – ohne Bestehen des Konsequens kein Bestehen des Antezedens. Denn wenn das Konsequens nicht besteht, dann besteht auch das Antezedens nicht.

Also ist bei einem Satz der Form

- $(A \to B)$

das Antezedens A immer die hinreichende Bedingung für das Konsequens B bzw. B die notwendige Bedingung für A. Wir halten somit fest:

- Ein Satz A ist eine *hinreichende Bedingung* für einen Satz B genau dann, wenn $(A \to B)$ wahr ist.

- Ein Satz B ist eine *notwendige Bedingung* für einen Satz A genau dann, wenn $(A \to B)$ wahr ist.

Übrigens werden notwendige Bedingungen oftmals auch ausgedrückt, indem das Wörtchen 'nur' an geeigneter Stelle platziert wird. Statt

- Heidis fleißige Mitarbeit in der Lehrveranstaltung "Logik 1" ist eine notwendige Bedingung für ihren positiven Abschluss dieser Lehrveranstaltung

kann man nämlich auch kürzer sagen:

- Nur wenn Heidi in der Lehrveranstaltung "Logik 1" fleißig mitarbeitet, wird sie diese Lehrveranstaltung positiv abschließen.

Durch das Hinzufügen des 'nur' wird aus der hinreichenden Bedingung eine notwendige. Während in

- Wenn es regnet, ist die Straße nass. $(A \to B)$

das Regnen eine *hinreichende* Bedingung für die Nässe der Straße ist, ist in

- Nur wenn es regnet, ist die Straße nass. $(B \to A)$

das Regnen eine notwendige Bedingung für die Nässe der Straße. Der letzte Satz sagt also nichts anderes aus, als:

- Wenn die Straße nass ist, dann regnet es. $(B \to A)$

Das Hinzufügen des 'nur' dreht also gleichsam den Implikationspfeil um.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass Implikationssätze der folgenden Formen im Allgemeinen paarweise gleichbedeutend sind:

- $(A \to B)$.

- Wenn A, (dann) B.

- B, wenn A.

- Nur wenn (auch) B, (dann) A.
- Nur A, wenn (auch) B.
- A nur dann, wenn (auch) B.
- A ist hinreichend dafür, dass B.
- B ist notwendig dafür, dass A.
- A ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass B.
- B ist eine notwendige Bedingung dafür, dass A.

Erläutern wir dies nochmals anhand eines Beispiels: Wenn wir 'A' durch 'Etwas ist blau' und 'B' durch 'Etwas ist farbig' ersetzen, dann erhalten wir lauter Aussagesätze, die allesamt von ein und derselben Form ($A \to B$) sind:

- Wenn etwas blau ist, dann ist es farbig.
- Etwas ist farbig, wenn es blau ist.
- Nur wenn etwas auch farbig ist, ist es blau.
- Etwas ist nur blau, wenn es auch farbig ist.
- Etwas ist blau nur dann, wenn es auch farbig ist.
- Dass etwas blau ist, ist hinreichend dafür, dass es farbig ist.
- Dass etwas farbig ist, ist notwendig dafür, dass es blau ist.
- Dass etwas blau ist, ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass es farbig ist.
- Dass etwas farbig ist, ist eine notwendige Bedingung dafür, dass es blau ist.

Alle diese Sätze haben exakt dieselbe logische Form, die mittels $\to$ angegeben werden kann.

2.2.5 Äquivalenzsätze

Als letzte Möglichkeit zur Zusammensetzung von Aussagesätzen, die wir mittels Wahrheitstafeln behandeln können, wollen wir die *Äquivalenz* anführen. Ein Beispiel für einen Äquivalenzsatz ist:

- Herbert küsst Heidi genau dann, wenn Heidi Herbert küsst.

Ein wenig in logische Form gebracht, sieht dieser Satz so aus:

- Küsst(Herbert, Heidi) genau dann, wenn Küsst(Heidi, Herbert)

Das logische Symbol für Äquivalenz ist der Doppelpfeil $\leftrightarrow$. Im Logiker-Deutsch sieht unser Beispielsatz dann wie folgt aus:

- Küsst(Herbert, Heidi) $\leftrightarrow$ Küsst(Heidi, Herbert)

Der Doppelpfeil soll uns daran erinnern, dass – wie wir oben bereits erwähnt haben – Äquivalenzsätze gleichbedeutend mit der Konjunktion zweier Implikationssätze sind. D.h., ein Äquivalenzsatz

- $(A \leftrightarrow B)$

hat dieselbe Bedeutung wie

- $((A \to B) \wedge (B \to A))$

'Äquivalenz' heißt ja nichts anderes als 'Gleichwertigkeit', und bei uns heißt dies: gleichwertig hinsichtlich der Wahrheitswerte der Teilsätze. Wenn die beiden Teilsätze eines Äquivalenzsatzes also denselben Wahrheitswert haben, dann ist der Äquivalenzsatz wahr, haben sie unterschiedliche Wahrheitswerte, so ist er falsch:

Wahrheitstafel 9 (Äquivalenz)

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Da ja ein Äquivalenzsatz gleichbedeutend ist mit der Konjunktion der entsprechenden Implikationssätze, hätten wir diese Wahrheitstafel auch aus den Wahrheitstafeln für Implikation und Konjunktion erschließen können.

Noch etwas ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen Implikationssätzen und Äquivalenzsätzen: Anstatt 'A genau dann, wenn B' zu sagen, darf man gleichbedeutend formulieren: A ist eine (zugleich) notwendige und hinreichende Bedingung für B. Denn dies heißt ja wiederum nichts anderes als: A ist eine notwendige Bedingung für B (d.h., $B \to A$) und A ist auch eine hinreichende Bedingung für B (d.h., $A \to B$). Und Äquivalenz ist ja, wie gesagt, nichts anderes als Implikation in beide Richtungen.

Wenn wir im Übrigen in diesem Buch das eine oder andere Mal kurz 'gdw' schreiben, so wird das einfach eine bequeme Abkürzung von 'genau dann wenn' sein.

2.2.6 Aussagenlogische Zerlegbarkeit

Wir haben nun alle Aussagesätze kennengelernt, die wir als aussagenlogisch zerlegbar betrachten wollen. Wir werden uns also merken:

> Ein Aussagesatz ist *aussagenlogisch zerlegbar* genau dann, wenn er entweder die Negation eines Aussagesatzes ist, oder die Konjunktion, Disjunktion, Implikation oder Äquivalenz zweier Aussagesätze ist.

Eine unmittelbare Folgerung dieser Festlegung ist, dass einfache Aussagesätze aussagenlogisch unzerlegbar sind, da sie ja keine Negations-, Konjunktions-, Disjunktions-, Implikations- oder Äquivalenzsätze sind.

Gemäß der fünf Kategorien aussagenlogisch zerlegbarer Sätze werden wir später die Sprache der Aussagenlogik aufbauen, welche zwar diejenige logische Sprache ist, auf der alle anderen logischen Sprachen basieren, die aber keineswegs selbst schon ausdrucksstark genug ist, um in ihr sämtliche Aussagesätze der natürlichen Sprache *adäquat* logisch analysieren zu können. Das ist aber auch gar nicht ihre Aufgabe. Im nächsten Abschnitt werden wir einige Beispiele für aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätze kennenlernen, die sich der aussagenlogischen Analyse "widersetzen". Manche davon werden sich im zweiten Teil dieses Buches jedoch als *prädikatenlogisch* zerlegbar herausstellen, und die prädikatenlogische Sprache wird als hinreichend ausdrucksstart erweisen, um in ihr das Gros der Wissenschaftssprachen erfolgreich repräsentieren zu können. Darüber hinaus gehende aussagenlogisch unzerlegbare Aussagesätze werden wir in diesem Buch nicht mehr analysieren, aber es gibt sehr wohl andere Erweiterungen der logischen Sprache, in denen dies möglich ist. Diese sind dann das Thema von Erweiterungen der Prädikatenlogik, welche jedoch nicht mehr in dieser Vorlesung behandelt werden können.

2.3 Komplexe aussagenlogisch unzerlegbare Sätze

Die erste Kategorie der aussagenlogisch unzerlegbaren Sätze ist – wie wir gesehen haben – die der einfachen Aussagesätze. Diese sind aussagenlogisch unzerlegbar, da sie keine Aussagesätze mehr als echte Teile enthalten, sondern "nur" singuläre und generelle Terme. Diese Terme werden wir aber erst in der Prädikatenlogik als echte logische Bestandteile von Aussagesätzen analysieren können. Die aussagenlogisch unzerlegbaren Sätze, die wir nun kennenlernen werden, können sehr wohl andere Aussagesätze als echte unmittelbare Teile enthalten, diese sind jedoch nicht mittels den aussagenlogischen Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ verknüpft, sondern durch andere logische Zeichen, die uns in einer aussagenlogischen Analyse nicht zur Verfügung stehen. Es gibt also neben den einfachen (und somit aussagenlogisch unzerlegbaren) Aussagesätzen eine Reihe von *komplexen* aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätzen, von denen wir nur eine kleine, philosophisch relevante Auswahl betrachten wollen.

Wir haben oben gesehen, dass materiale Implikationssätze keinen kausalen Zusammenhang zwischen Antezedens und Konsequens ausdrücken. In der natürlichen Sprache gibt es freilich sehr wohl sinnvolle Kausalsätze, welche sich nur nicht als aussagenlogisch analysierbar herausstellen. Ein Beispiel für einen solchen Kausalsatz ist die alltagspsychologische Feststellung:

- Herbert ist glücklich, weil Heidi ihn geküsst hat.

Vermutlich ist es bei diesem und den meisten Kausalsätzen so, dass, wenn der Kausalsatz wahr ist, beide seiner Teilsätze auch wahr sind. D.h., wenn mindestens ein Teilsatz falsch ist, dann ist zwangsläufig auch der Kausalsatz falsch. Wenn wir aber nur wissen, dass beide Teilsätze wahr sind, dann können wir rein aussagenlogisch betrachtet noch nichts über den Wahrheitswert des Gesamtsatzes aussagen, wie wir an folgenden Beispielen sehen können:

- Die Autobahn ist nass, weil es geregnet hat.

- Die Autobahn ist asphaltiert, weil es geregnet hat.

Nehmen wir an, die Autobahn ist wirklich nass, sie ist natürlich auch asphaltiert, und es hat vor kurzem geregnet. Dann sind in beiden Beispielsätzen beide Teilsätze wahr, aber nur der erste Kausalsatz ist wahr, da eben der entsprechende Kausalzusammenhang besteht, der zweite hingegen ist falsch. Wir können also keine vollständige Wahrheitstafel für den Kausaloperator 'weil' angeben, sondern nur eine partielle:

Wahrheitstafel 10 (Kausalität)

A	B	$(A, \text{weil } B)$
w	w	?
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Hier können wir das Fragezeichen in der ersten Zeile nicht durch einen konkreten Wahrheitswert ersetzen; aber eine Wahrheitstafel, in der nicht alle Zeilen vollständig ausgefüllt sind, ist eigentlich gar keine Wahrheitstafel, d.h., dass die Bedeutung des Kausaloperators 'weil' mit aussagenlogischen Mitteln nicht angegeben werden kann, er mithin also *kein* aussagenlogischer Junktor sein kann. Kausalsätze werden eingehender in der Konditionallogik[4] – der Logik der (insbesondere kontrafaktischen) Wenn-dann-Sätze – sowie in der Wissenschaftstheorie und in der Metaphysik behandelt.

In der Philosophie im Allgemeinen, im speziellen aber in der Metaphysik, spielen auch sogenannte *(alethische) Modalsätze* eine wichtige Rolle. In diesen geht es um Möglichkeit und Notwendigkeit:

1. Es ist möglich, dass es intelligentes Leben auf der Erde gibt.
2. Es ist möglich, dass es intelligentes Leben auf dem Mond gibt.
3. Es ist möglich, dass $2 + 2 = 5$.
4. Notwendigerweise gilt, dass $2 + 2 = 5$.
5. Notwendigerweise gilt, dass $2 + 2 = 4$.
6. Notwendigerweise gilt, dass es intelligentes Leben auf der Erde gibt.

Wie wir gleich zeigen werden, ist auch die Bedeutung solcher Sätze aussagenlogisch nicht eindeutig durch den Wahrheitswert ihrer Teilsätze bestimmt. Die Wahrheitswerte solcher Sätze können erst in einer Erweiterung der Aussagenlogik, nämlich der *(alethischen) Modallogik*[5] bestimmt werden, auf die wir hier natürlich nicht weiter eingehen werden. Wir wollen nur die üblichen logischen Symbole für Möglichkeit ($\Diamond$) und Notwendigkeit ($\Box$), die in der Modallogik Verwendung finden, einführen, um eine konzisere Notation zur Verfügung zu haben. Diese beiden Symbole werden auch 'Möglichkeitsoperator' und 'Notwendigkeitsoperator' genannt. Die Sätze 3 und 5 sehen dann wie folgt aus:

[4] Siehe [7].
[5] Siehe [3].

- $\Diamond\, 2 + 2 = 5$
- $\Box\, 2 + 2 = 4$

Wenn ein Satz A wahr ist, so ist offensichtlich auch der Satz $\Diamond A$ wahr, da die Wahrheit des Satzes A doch die Möglichkeit des Satzes A impliziert, wie wir an Satz 1 sehen: Schon daraus, dass es in der Tat intelligentes Leben auf der Erde gibt, folgt doch, dass es möglich ist, dass es intelligentes Leben auf der Erde gibt. Wenn wir jedoch nur wissen, dass ein Satz A falsch ist, können wir noch nichts über den Wahrheitswert von $\Diamond A$ sagen; denn es gibt Fälle, in denen A falsch ist, $\Diamond A$ jedoch wahr (wie eventuell in Satz 2), und es gibt Fälle in denen beide Sätze falsch sind (wie in Satz 3). Denn es gibt kein intelligentes Leben auf dem Mond, obwohl es vermutlich möglich wäre, dass es intelligentes Leben auf dem Mond gäbe, und es ist weder so, dass 2+2=5 ist, noch ist es so, dass es möglich wäre, dass 2+2=5. Daher können wir auch für $\Diamond$ nur eine partielle Wahrheitstafel angeben:

Wahrheitstafel 11 (Möglichkeit)

A	$\Diamond A$
w	w
f	?

Nun zur Notwendigkeit: Wenn ein Satz A falsch ist, so ist auch der Satz $\Box A$ falsch, da die Falschheit des Satzes A zeigt, dass A nicht mit Notwendigkeit gelten kann, wie wir an Satz 4 sehen. Wenn wir andererseits nur wissen, dass der Satz A wahr ist, dann können wir wiederum noch nichts über den Wahrheitswert von $\Box A$ sagen; denn hier gibt es Fälle, in denen A wahr ist, $\Box A$ aber falsch (wie in Satz 6), und es gibt Fälle in denen beide Sätze wahr sind (wie in Satz 5). So können wir auch für $\Box$ nur eine partielle Wahrheitstafel angeben:

Wahrheitstafel 12 (Notwendigkeit)

A	$\Box A$
w	?
f	f

Weitere Kategorien komplexer aussagenlogisch unzerlegbarer Sätze sind die der *epistemischen* und *doxastischen Modalsätze*[6], welche vor allem für die philosophische Disziplin der Erkenntnistheorie von fundamentaler Bedeutung

[6] Siehe [2].

sind. Dies sind Sätze, in denen von Wissen bzw. Glauben oder Überzeugung die Rede ist (wobei Glauben hier nicht religiös, sondern im Sinne von Führwahrhalten verstanden wird). Ein epistemischer Satz ist etwa:

- Otto weiß, dass Heinrich Vorarlberger ist.

Ein wichtiges Prinzip der Erkenntnistheorie besagt, dass Wissen Wahrheit impliziert, d.h. bezüglich unseres Beispiels: Wenn Otto weiß, dass Heinrich Vorarlberger ist, dann ist es auch wahr, dass Heinrich Vorarlberger ist. Das heißt wiederum, dass, wenn es falsch ist, dass Heinrich Vorarlberger ist, Otto auch nicht weiß, dass er Vorarlberger ist. Allgemein gilt also: Wenn A falsch ist, dann ist auch KA falsch, wobei wir das Symbol K in der logischen Sprache für die natursprachliche Phrase '... weiß, dass' verwenden. (Das K rührt übrigens vom englischen Wort '*knowledge*' her.) Dies führt uns zu folgender abermals partieller Wahrheitstafel des Wissensoperators K:

Wahrheitstafel 13 (Wissen)

A	KA
w	?
f	f

Da es aber offensichtlich sowohl wahre Sätze gibt, die nicht gewußt werden, als auch wahre Sätze, die gewußt werden, ist es uns nicht möglich, das Fragezeichen in der ersten Zeile durch einen eindeutigen Wahrheitswert zu ersetzen. Die Bedeutung des Wissensoperators K kann also ebenfalls nicht durch eine Wahrheitstafel angegeben werden.

Noch schlimmer ist es um die doxastischen Sätze bestellt. Wie wir alle aus eigener (leidvoller) Erfahrung wissen, gibt es (i) Sätze, die wahr sind und geglaubt werden, (ii) Sätze, die wahr sind und nicht geglaubt werden, (iii) Sätze, die falsch sind und geglaubt werden, und (iv) Sätze, die falsch sind und nicht geglaubt werden. Hier sieht die Wahrheitstafel für den Glaubensoperator B (von '*belief*'), den wir als Symbol für die Phrase '... glaubt, dass' verwenden, also besonders dürftig aus:

Wahrheitstafel 14 (Glauben)

A	BA
w	?
f	?

Auch doxastische (also: Glaubens-) Operatoren können daher nicht im Rahmen der Aussagenlogik behandelt werden.

Nach der Metaphysik und Erkenntnistheorie wollen wir nun noch Sätze betrachten, die in einer weiteren philosophischen Hauptdisziplin eine zentrale Rolle spielen, nämlich in der Ethik: dies sind die *deontischen* (oder *normativen*) *Modalsätze*. Typische Beispiele dafür sind:

- Studenten müssen immer brav und artig sein.
- Es ist verboten, im Hörsaal Fußball zu spielen.
- Es ist erlaubt, den Lehrer zu loben und zu preisen.

Es geht hier also um Gebote, Verbote und Erlaubnisse. Bezüglich dieser Sätze gibt es unterschiedliche Auffassungen: Manche Philosophen meinen, dass sie Aussagesätze sind, die also wahr oder falsch sind; andere sind jedoch der Meinung, dass es nicht die semantische Funktion von deontischen Sätzen ist, die Wirklichkeit zu beschreiben, sondern vielmehr gewisse "richtige" Einstellungen und Gedanken in uns hervorzurufen und uns damit zu einem "moralisch korrekten" Leben anzuleiten. Wie schon einmal erwähnt, sind diese Sätze in letzterem Falle natürlich keine Aussagesätze und somit auch nicht wahr oder falsch, sondern haben bestenfalls "Geltung" bzw. "Richtigkeit". Wer jedoch die erste Auffassung bevorzugt, kann versuchen, Wahrheitstafeln für deontische Sätze anzugeben. Doch genau wie beim Glaubensoperator gibt es auch bei den deontischen Operatoren sämtliche Kombinationsmöglichkeiten von Wahrheit und Falschheit für den Ausgangssatz A einerseits und den daraus gebildeten Gebotssatz OA (vom englischen '*obligatory*'), den Verbotssatz FA (vom englischen '*forbidden*') und den Erlaubnissatz PA (vom englischen '*permitted*') andererseits. Wir verzichten daher darauf, die partiellen Wahrheitstafeln für diese Operatoren anzugeben, da sie uns überhaupt nichts mehr über deren Bedeutung sagen können. Das heißt aber nicht, dass diese deontischen Operatoren keinerlei logischen Analyse zugänglich wären: In der Tat beschäftigt sich ein ganzes Teilgebiet der philosophischen Logik – die deontische Logik[7] – mit der Logik dieser logischen Junktoren.

Als letzte Kategorie komplexer aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesätze wollen wir die der *generellen Sätze* anführen. Die prominentesten Vertreter dieser Kategorie sind die All- und Existenzaussagesätze, welche wir im zweiten Teil dieser Vorlesung prädikatenlogisch analysieren werden. Beispiele für solche Sätze sind

- Alle Österreicher sind strebsam und fleißig.

[7] Siehe [1].

- Es gibt Österreicher, die strebsam und fleißig sind.

Wie wir später sehen werden, ist auch nur der Versuch der Angabe einer Wahrheitstafel für solche Sätze zum Scheitern verurteilt. Bestenfalls könnte man ein "Gebilde" dieser Art angeben:

Wahrheitstafel 15 (??? Allsatz ???)

$P(x)$	$\forall x P(x)$
w	
w	
$\vdots$	
f	
f	
$\vdots$	

Der Wahrheitswert von $\forall x P(x)$ ("Alles hat die Eigenschaft P") würde von den Wahrheitswerten des "unbestimmten" Ausdrucks $P(x)$ abhängen. Dabei müsste aber x verschiedene "Werte" annehmen können, unter Umständen auch unendlich viele Werte (wie in "Alle Zahlen…"). All das müsste präzisiert werden – und *wird* auch präzisiert werden, nämlich später in der Prädikatenlogik – diese Präzisierungen übersteigen jedoch die Ausdruckskraft einer einfachen Wahrheitstafel. (Genauso verhält es sich bei den Existenzsätzen.)

Das tut aber momentan nichts zur Sache: In diesem ersten aussagenlogischen Teil der Vorlesung wird es für uns nur wichtig sein, dass Sätze dieser Art aussagenlogisch unzerlegbar sind und sich damit einer aussagenlogischen Analyse verwehren.

Noch ein kleiner Vorgriff auf die prädikatenlogischen Sprachen, die wir im zweiten Teil dieses Buches behandeln werden: Der Aussagesatz 'Alles ist materiell' ist ebenfalls ein Allsatz und somit gemäß unserer Klassifikation ein komplexer aussagenlogisch unzerlegbarer Satz. Doch man mag sich die Frage stellen, welcher echte Teil von diesem denn nun wiederum ein Aussagesatz sein soll? So einen Teil müsste es ja geben, wenn es sich bei 'Alles ist materiell' wirklich um einen komplexen Aussagesatz handeln soll. Die Antwort auf diese Frage wird sich deutlicher nach der Behandlung der prädikatenlogischen Sprache erschließen: Denn in dieser wird 'Alles ist materiell' mittels einer Formel der Form $\forall x M(x)$ repräsentiert werden, in der $\forall x$ für 'für alle x' steht und $M(x)$ für 'x ist materiell'. Der letztere Formelteil $M(x)$, so könnte man sagen, repräsentiert dabei einen Satz der Art 'es ist materiell', welcher als Aussagesatz bezeichnet werden darf, solange klargestellt ist, wofür 'es' in dem jeweiligen Kontext stehen soll. Das heißt, 'Alles ist materiell' wird letztlich verstanden werden als: *Für alles gilt, dass es materiell ist.* Somit ist dann 'Es ist materiell' ein Aussagesatz, der sich als echter Teil von 'Alles ist materiell' (bzw. 'Für alles gilt, dass es materiell ist') herausstellt. Mithin ist dann 'Alles ist materiell' in der Tat ein komplexer Aussagesatz, weil er einen weiteren Aussagesatz als echten Teil enthält.

2.4 Klassifikation von Aussagesätzen

Wir möchten zum Abschluss dieser Sektion noch eine Übersicht über die von uns vorgenommene Klassifikation der Aussagesätze geben:

- *Aussagesätze*
  - *einfach (aussagenlogisch unzerlegbar)*
  - *komplex*
    - *aussagenlogisch zerlegbar:*
      - Negationssätze
      - Konjunktionssätze
      - Disjunktionssätze
      - Implikationssätze
      - Äquivalenzsätze
    - *aussagenlogisch unzerlegbar:*
      - Kausalsätze
      - alethische Modalsätze
      - epistemische Modalsätze
      - doxastische Modalsätze
      - deontische Modalsätze
      - generelle Sätze
      - ⋮

2.5 Argumente

Weder in der Philosophie noch in den Wissenschaften ist es ausreichend, einfach Behauptungen aufzustellen, d.h. durch die bloße Äußerung eines Aussagesatzes etwas ohne weitere Begründung zu behaupten. Stattdessen müssen wir *Argumente* für unsere Behauptungen vorbringen. Ein *gültiges* Argument kann einem nämlich zusätzlich einen guten *Grund* dafür bieten, an die jeweilige Behauptung zu glauben, die die Konklusion des Argumentes ist. Demgemäß ist es nicht alleine wichtig, die logische Form von Aussagesätzen herauszufinden, sondern insbesondere auch die von Argumenten. Mit der logischen Form von Argumenten werden wir uns ausführlich in Abschnitt 3.2 auseinandersetzen.

Zunächst aber wollen wir nur einige Beispiele von Argumenten angeben, festlegen, was überhaupt ein Argument ist, und die übliche Terminologie einführen, mit deren Hilfe man über Argumente und deren Bestandteile spricht. Ein klassisches Beispiel für ein natursprachliches Argument ist:

- Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.

Dieses Argument besteht aus drei Aussagesätzen. Die ersten beiden Aussagesätze sind die *Prämissen* des Argumentes, d.h. sie werden vorausgesetzt bzw. angenommen. Der letzte Aussagesatz beginnt mit einem 'also', welches die *Konklusion* des Argumentes einleitet, d.h. in unserem Fall den Aussagesatz 'Sokrates ist sterblich'. Die Konklusion eines Argumentes soll üblicherweise durch die Prämissen des Argumentes gestützt werden, und *Konklusionsindikatoren* wie 'also' zeigen den Übergang von den Prämissen zur Konklusion an. Um diese Struktur zu verdeutlichen, kann man das natursprachliche Argument in folgende traditionelle Standardform bringen:

(Arg. 1) Alle Menschen sind sterblich.

Sokrates ist ein Mensch.

Also: Sokrates ist sterblich.

Wir schreiben also alle Prämissen untereinander, lassen einen horizontalen Strich folgen, und schreiben schließlich den Konklusionsindikator 'also:', gefolgt von der Konklusion.

Das nächste Beispiel schreiben wir gleich in Standardform an:

(Arg. 2) Alle Menschen sind sterblich.

Sokrates ist ein Fisch.

Also: Sokrates ist ein Philosoph.

Dieses Argument ist – im Gegensatz zu vorigem – offensichtlich "unsinnig", aber es ist nichtsdestotrotz ein Argument. Argumente müssen also nicht "vernünftig" oder gar gültig sein, es ist nur wichtig, dass sie eine gewisse Form haben.

Auch die folgende Folge von Aussagesätzen ist ein Argument:

(Arg. 3) Der Papst kommt nächsten Sommer nach Wien oder nach Salzburg.

Der Papst kommt aber nächsten Sommer nicht nach Wien.

Daher: Der Papst kommt nächsten Sommer nach Salzburg.

Wir sehen, dass es in der deutschen Sprache die verschiedensten Konklusionsindikatoren gibt, etwa:

also, daher, somit, folglich,...

Da alle diese Ausdrücke dasselbe bedeuten, werden wir in der logischen Sprache jedoch nur einen einzigen Konklusionsindikator verwenden, nämlich

$\therefore$

Im Abschnitt 3.2 werden wir die Form eines Argumentes mit den Prämissen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ und der Konklusion B daher einfach so schreiben:

$$A_1, \ldots, A_{n-1} \therefore B$$

Wir halten fest:

Ein *Argument* ist eine Folge von n (wobei $n > 0$) Aussagesätzen,

1. deren erster bis $n-1$-ter Aussagesatz 'Prämisse' genannt werden, und
2. deren n-ter Satz durch einen Konklusionsindikator eingeleitet wird, welchem ein Aussagesatz folgt, der 'Konklusion' genannt wird.

Wir haben also auch den Fall eines Argumentes eingeschlossen, welches eine "Folge" von genau einem Aussagesatz ist, für das also $n = 1$ gilt. Sein erster und einziger Satz ist zugleich die Konklusion des Argumentes, d.h. es gibt keine Prämissen, wie dies beispielsweise bei folgendem Argument der Fall ist:

Also: Sokrates ist identisch mit Sokrates.

Die Konklusion 'Sokrates ist identisch mit Sokrates' ist hier schon für sich genommen unzweifelhaft wahr; entsprechend deutet das Fehlen der Prämissen an, dass die Wahrheit eines Satzes dieser Form gar nicht mehr durch irgendwelche Prämissen gestützt werden muss.

Argumente wirken auf den ersten Blick sehr ähnlich den Implikationssätzen, und in der Tat werden wir noch einige interessante Beziehungen zwischen diesen beiden Klassen von sprachlichen Ausdrücken kennenlernen. Dennoch sollte man diese klar auseinanderhalten: Implikationssätze sind wahr oder falsch und somit Aussagesätze, während es keine Sinn ergibt, von einem Argument als 'wahr' oder 'falsch' zu sprechen. Argumente können sich jedoch, wie wir in Bälde sehen werden, als logisch gültig oder ungültig herausstellen. Argumente sind eben bestimmte *Folgen* von Aussagesätzen, in den ebenfalls ein Konklusionindikator vorkommt, sie sind freilich nicht selbst Aussagesätze. Entsprechend lässt sich ein Implikationssatz verneinen, während man nicht sinnvoll von der Verneinung eines Argumentes sprechen kann. Usw.

2.6 Übungen

Übung 2.1 Welche Aussagesätze in Übung 1.4 sind einfach?

Übung 2.2

- Ist in Übung 1.4 der Satz 6 die Negation des Satzes 3?
- Ist in Übung 1.4 der Satz 3 die Negation des Satzes 'Herbert ist nicht glücklich und Heidi ist nicht glücklich.'?
- Welcher der Sätze 1 bis 6 in Übung 1.4 ist ein Konjunktionssatz?
- Was ist die Disjunktion der Aussagesätze 'Heute schneit es nicht.' und 'Die Straßen sind glatt.'?
- Was ist die Implikation der Aussagesätze 'Herbert ist glücklich.' und 'Heidi ist glücklich'?
- Geben Sie die Negation dieses Satzes an!
- Ist der Satz 'Wenn Dieter Bohlen österreichischer Bundeskanzler ist, dann ist der Papst österreichischer Bundeskanzler' wahr oder falsch?

Übung 2.3

- Welche der Aussagesätze in Übung 1.4 sind unzerlegbar, aber nicht einfach?

Übung 2.4 Welche der folgenden Aussagesätze sind aussagenlogisch unzerlegbar? Welche der aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätze sind einfach?

1. Heute regnet es in Salzburg.
2. In Salzburg regnet es fast immer.
3. Wenn es in Salzburg nicht regnet, dann hagelt's, stürmt's oder schneit's.
4. Dieter Bohlen soll Absichten haben, in absehbarer Zeit Bundeskanzler zu werden.
5. Das englische Wort 'mind' kann nicht ins Deutsche übersetzt werden.
6. Wenn ich mir morgen mein linkes Schuhband zuerst zubinde, dann wird Hermann Maier der nächste Bundespräsident von Österreich.

7. Mit dem Beitritt zur EU hat es in Österreich einen gewaltigen wirtschaftlichen Aufschwung gegeben.
8. Wäre Österreich nicht der EU beigetreten, hätten wir wohl weniger Sorgen mit dem Euro.
9. Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.
10. Sir Karl Popper und Theodor W. Adorno sind beide Philosophen, aber sie können einander nicht besonders gut leiden.
11. Zum Mittagessen gibt es Wiener Schnitzel mit Salat, Schweinsbraten mit Knödel oder Kasnocken.
12. Einige bedeutende Österreicher stammen aus Böhmen oder Mähren.
13. Nächstes Jahr kommt der Präsident der USA nach Österreich.
14. Silber glänzt, Gold erst recht.
15. Tirol ist in einen nördlichen, einen südlichen und einen östlichen Teil aufgeteilt.
16. Jeder Junggeselle ist männlich und unverheiratet, ohne dabei gleich ein Priester zu sein.
17. Alle Studenten lernen Logik, obgleich nicht alle Studenten dies mit Begeisterung tun.
18. Wenn das mit der Politik so weiter geht, dann werden sich Situationen wiederholen, die wir uns alle nicht wünschen.

Übung 2.5 Bringen Sie die folgenden Argumente in Standardform.

1. Wenn Fips eine Katze ist, dann jagt Fips gerne Mäuse. Fips jagt aber nicht gerne Mäuse. Somit ist Fips keine Katze.
2. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips ist eine Katze. Folglich trinkt Fips gerne Milch.
3. Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch. Folglich ist Fips eine Katze.
4. Fips ist eine Katze. Denn: Wenn Fips eine Katze ist, dann trinkt Fips gerne Milch. Fips trinkt gerne Milch.

5. Also ist Fips eine Katze oder er ist keine Katze.

6. Sokrates ist Philosoph und Grieche. Platon ist Philosoph und Grieche. Aristoteles ist Philosoph und Grieche. Daher sind alle Philosophen Griechen.

Kapitel 3

Aussagenlogische Repräsentierung

Im letzten Kapitel haben wir damit begonnen, Aussagesätze unter logischen Gesichtspunkten zu klassifizieren. Insbesondere haben wir die fünf wichtigsten aussagenlogischen Junktoren kennengelernt – Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz – und, darauf basierend, aussagenlogisch zerlegbare und aussagenlogisch unzerlegbare Aussagesätze unterschieden.

In diesem Kapitel werden wir die (aussagen-)logische Form von Aussagesätzen bestimmen und durch logische Formeln transparent machen. Diesen Vorgang werden wir als 'logische Repräsentierung von Aussagesätzen durch Formeln' bezeichnen. Ähnlich werden wir auch die logischen Formen von Argumenten angeben können. Dies alles wird auf aussagenlogischem Niveau vonstatten gehen: Aussagenlogisch unzerlegbare Aussagesätze werden wiederum durch unzerlegbare Formeln, sogenannte Aussagenvariablen, repräsentiert werden. Aussagenlogisch zerlegbare Aussagesätze werden durch zerlegbare Formeln – Negationsformeln, Konjunktionsformeln, Disjunktionsformeln, Implikationsformeln oder Äquivalenzformeln – wiedergegeben werden.

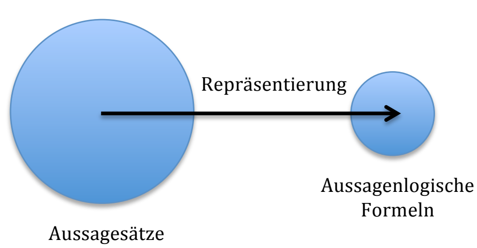


Abbildung 3.1: Aussagenlogische Repräsentierung

3.1 Repräsentierung von Aussagesätzen

3.1.1 Ein "Rezept" zur Repräsentierung

Die aussagenlogische Repräsentierung von Aussagesätzen ist eine Prozedur, die natursprachliche Aussagesätze in aussagenlogische *Formeln* übersetzt, welche wir als die aussagenlogischen Formen der Aussagesätze betrachten. In diesen Formeln kommen neben den bereits bekannten logischen Symbolen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ sowie Klammern auch sogenannte *Aussagenvariablen* $p, q, r, s, t, \ldots$ vor, welche wir zur Repräsentierung aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesätze verwenden. (Man sollte sich nicht an der traditionellen Bezeichnung 'Aussagen*variablen*' stören: Aussagenvariablen werden nichtsdestotrotz dazu verwendet, bestimmte Aussage*sätze* der natürlichen Sprache formal wiederzugeben.)

Demgemäß werden wir den einfachen und daher aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesatz aus dem vorigen Kapitel

- Johannes ist Vorarlberger.

bzw. in Logiker-Deutsch,

- Vorarlberger(Johannes)

wie folgt repräsentieren:

- p

Die logische Form der Negation des vorigen Satzes, also

- Johannes ist kein Vorarlberger.

den wir ins Logiker-Deutsch als

- $\neg$Vorarlberger(Johannes)

übertragen haben, ist somit

- $\neg p$

Die folgenden Beispielsätze aus dem vorigen Kapitel

- Herbert und Hans sind Oberösterreicher.
- Der Papst kommt nächsten Sommer nach Wien oder nach Salzburg.
- Wenn Mozart Salzburger ist, dann ist er Österreicher.
- Herbert küsst Heidi genau dann, wenn Heidi Herbert küsst.

die im Logiker-Deutsch wie folgt lauten

- (Oberösterreicher(Herbert) $\wedge$ Oberösterreicher(Hans))
- Kommt-nach-im(der Papst, Wien, nächster Sommer) $\vee$ Kommt-nach-im(der Papst, Salzburg, nächster Sommer)
- Salzburger(Mozart) $\rightarrow$ Österreicher(Mozart)
- Küsst(Herbert, Heidi) $\leftrightarrow$ Küsst(Heidi, Herbert)

werden entsprechend durch Formeln so repräsentiert:

- $(p \wedge q)$
- $(p \vee q)$
- $(p \rightarrow q)$
- $(p \leftrightarrow q)$

Wir haben bei dieser Repräsentierung die aussagenlogisch unzerlegbaren Bestandteile – in diesen Fällen lauter einfache Sätze – mit Aussagenvariablen übersetzt. Wie wir sehen, steht im *Kontext* des ersten Aussagesatzes die Aussagenvariable p für 'Oberösterreicher(Herbert)' bzw. für 'Herbert ist Oberösterreicher'. Im Kontext des zweiten Aussagesatzes steht sie jedoch für 'Kommt-nach-im(der Papst, Wien, nächster Sommer)' bzw. 'Der Papst kommt nächsten Sommer nach Wien'. Da wir diese beiden Kontexte strikt getrennt haben, konnten wir es uns erlauben, dieselbe Aussagenvariable für verschiedene Aussagesätze zu verwenden. Gleiches gilt für die Aussagenvariable q. *Innerhalb* eines Kontextes gelten jedoch uneingeschränkt die folgenden *Regeln zur Ersetzung aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesätze durch Aussagenvariablen*:

(AV1) Zwei Vorkommnisse desselben aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesatzes müssen durch dieselbe Aussagenvariable repräsentiert werden.

(AV2) Vorkommnisse von verschiedenen aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätzen müssen durch verschiedene Aussagenvariablen repräsentiert werden.

Zum Beispiel muß der Aussagesatz

- Wenn der Papst Deutscher und Katholik ist, dann ist der Papst Katholik.

bzw.

- ((Deutscher(der Papst) $\wedge$ Katholik(der Papst)) $\rightarrow$ Katholik(der Papst))

durch

- $((p \wedge q) \rightarrow q)$

repräsentiert werden, und nicht etwa durch

- $((p \wedge q) \rightarrow r)$

oder gar durch

- $((p \wedge p) \rightarrow p)$

Würden die ersten zwei Sätze unserer Liste auf S.72 in ein und demselben Kontext vorkommen, etwa dadurch, dass wir sie mittels Konjunktion verknüpften, so müsste diese Konjunktion wie folgt repräsentiert werden:

- $((p \wedge q) \wedge (r \vee s))$

Auch die komplexen aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätze aus Abschnitt 2.3 würden – für sich genommen – durch p repräsentiert werden. Ebenso ist die logische Form des Aussagesatzes

- Es ist möglich, dass der Papst nach Salzburg kommt und der Erzbischof gerade in Rom ist.

einfach

- p

obwohl dieser Satz einen Konjunktionssatz enthält, allerdings nur *innerhalb* des aussagenlogisch unzerlegbaren 'es ist möglich'-Kontextes.

Andere werden vielleicht die Wahrheit dieses letzten Satzes in Zweifel ziehen, also vielmehr seine Negation

- Es ist nicht möglich, dass der Papst nach Salzburg kommt und der Erzbischof gerade in Rom ist.

für wahr halten, welche sehr wohl aussagenlogisch zerlegbar ist und durch

- $\neg p$

repräsentiert wird.

Wir dürfen die Repräsentierung von Aussagesätzen aber keinesfalls als ein echtes Verfahren oder einen genau spezifizierten Algorithmus betrachten, sondern vielmehr als eine Art von Kunstfertigkeit, für die nur eine grobe und vage Heuristik existiert, welche uns als Leitfaden beim Repräsentieren dienen kann. Die Angabe eines Algorithmus (den etwa auch ein Computer verstehen könnte) ist deshalb so schwierig, wenn nicht gar unmöglich, weil die Vielfalt und die daraus resultierenden Mehrdeutigkeiten und Vagheiten der natürlichen Sprache es uns nicht erlauben, ein Verfahren anzugeben, das immer *genau eine richtige logische Form* erzeugt. Das tut der Sinnhaftigkeit der Repräsentierung aber keinen Abbruch, da es ja gerade die Aufgabe der Repräsentierung ist, eine eindeutige logische Form für Aussagesätze festzulegen, um Mehrdeutigkeiten und Vagheiten zu vermeiden. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

- Herbert und Heidi sind verheiratet.

Dieser Satz ist insofern mehrdeutig als wir ihn einerseits so verstehen können, dass Herbert mit jemandem (nicht weiter spezifizierten) verheiratet ist *und* Heidi mit jemandem (ebenfalls nicht weiter spezifizierten) verheiratet ist, wir ihn andererseits aber auch so verstehen können, dass Herbert *mit* Heidi verheiratet ist. Entsprechend hat dieser Satz zwei Versionen in Logiker-Deutsch, nämlich:

- (Verheiratet(Herbert) $\wedge$ Verheiratet(Heidi))
- Verheiratet-mit(Herbert, Heidi)

und auch zwei logische Formen

- $(p \wedge q)$
- p

Wird der Satz also als Konjunktionssatz verstanden, so muß der generelle Term 'verheiratet' als einstellig betrachtet werden, wird er jedoch als einfacher Satz betrachtet, so muß dieser Term als zweistellig betrachtet werden.

Während im vorangegangenen Beispiel mehrere Repräsentierungen *aufgrund der Mehrdeutigkeit* des natursprachlichen Satzes möglich waren, gibt es auch Fälle, in denen zwar die Bedeutung des zu repräsentierenden Satzes eindeutig ist, aber *trotzdem* mehrere Repräsentierungen möglich sind, wie etwa im folgenden Beispiel:

- Fips ist eine graue Maus.

Dabei nehmen wir an, dass es vom Kontext und von der Namensgebung 'Fips' her klar ist, dass wirklich über ein bestimmtest Tier gesprochen werden soll und nicht etwa im übertragenen Sinne von einem Menschen ausgesagt werden soll, er sei eine "graue Maus" (also unscheinbar).

Wenn wir diesen Satz nun so analysieren, dass auf den singulären Term 'Fips' der einstellige generelle Term 'graue Maus' angewandt wird, also der Satz im Logiker-Deutsch so aussieht:

- Graue_Maus(Fips)

dann wird er als einfacher Aussagesatz wie folgt repräsentiert:

- p

Wir können aber den Satz auch so deuten, dass er uns *zwei* Informationen übermittelt, nämlich dass Fips grau und darüber hinaus eine Maus ist. Dann haben wir zwei generelle Terme vorliegen, die beide auf den singulären Term 'Fips' angewandt werden, und demgemäß haben wir im Logiker-Deutsch einen Konjunktionssatz mit zwei Vorkommnissen von 'Fips' vorliegen:

- (Grau(Fips) $\wedge$ Maus(Fips))

Die logische Form des Satzes ist dann also:

- $(p \wedge q)$

Hier ergeben sich somit zunächst einmal zwei Repräsentierungsmöglichkeiten, welche in diesem Fall aber nicht daher rühren, dass die natürliche Sprache gewisse "Defekte" aufweist, sondern vielmehr daher, dass man in der gewünschten "Übersetzung" von der deutschen Sprache in unserer künstliche aussagenlogische Formelsprache unterschiedlich nahe am Ausgangstext bleiben kann: Die zwei Informationen 'grau' und 'Maus', die von dem Ausgangssatz transportiert werden, können in der logischen Form des Satzes explizit aufscheinen – in der zweiten Variante – oder eben nicht – in der ersten Variante. (Ganz ähnliche Fragen stellen sich übrigens auch bei Übersetzungen von einer natürlichen Sprache in eine andere, etwas vom Lateinischen ins Deutsche.)

Sollten wir eine der beiden Repräsentierungsmöglichkeiten vorziehen? Ja, denn wir sollten die folgende Repräsentierungsregel berücksichtigen:

(K) Wenn die Wahl zwischen zwei möglichen Repräsentierungen R1 und R2 eines Aussagesatzes A besteht, so dass das Ergebnis von R1 "komplexer" ("feingliedriger") ist als das Ergebnis von R2, dann wähle R1 als Repräsentierung von A.

So ist etwa in unserem Beispiel $(p \wedge q)$ komplexer als p, weil erstere Formel aus zwei durch $\wedge$ verknüpften Teilsätzen besteht. Der Grund dafür, dass wir diese Regel befolgen sollten, ist, dass es uns komplexere Repräsentierungen ermöglichen werden, mehr über die logischen Folgerungsbeziehungen zu sagen. Wie wir später sehen werden, impliziert ein Konjunktionssatz jedes seiner Konjunkte; also folgt aus der Aussage, dass Fips eine graue Maus ist, dass er auch grau ist (und eine Maus ist). Es wird sich aber herausstellen, dass gemäß der Definition des Begriffs der logischen Implikation – welche wir später genau kennen lernen werden – der einfache Satz 'Graue_Maus(Fips)' weder den einfachen Satz 'Grau(Fips)' noch den einfachen Satz 'Maus(Fips)' logisch impliziert, ganz im Gegensatz zum Konjunktionssatz '(Grau(Fips) $\wedge$ Maus(Fips))'. Anders ausgedrückt: In dem einfachen Satz 'Graue_Maus(Fips)' gehen die Bestandteile 'grau' und 'Maus' logisch gesehen verloren, was bei dem Konjunktionssatz '(Grau(Fips) $\wedge$ Maus(Fips))' nicht der Fall ist.

Wir müssen jedoch aufpassen, denn wir dürfen natursprachlichen Sätze, in denen ein Eigenschaftswort auf ein Hauptwort angewandt wird (wie 'grau' auf 'Maus') nicht immer als Konjunktionssätze betrachten, wie etwa bei folgendem Beispiel:

- Aristoteles ist ein großer Philosoph.

Dieser Satz sagt nicht aus, dass Aristoteles groß ist (in welchem Sinne auch immer) und dass Aristoteles ein Philosoph ist, sondern dass Aristoteles *als Philosoph* groß ist. Die einzig richtige Repräsentierung ist also in diesem Fall

- p

Wir können nun ein allgemeines "Rezept" zur Repräsentierung von Aussagesätzen in der aussagenlogischen Sprache angeben.

Gegeben sei ein Aussagesatz A:

1. Suche *typische Phrasen*, die *komplexe aussagenlogisch unzerlegbare Aussagesätze* kennzeichnen, und bestimme die dazugehörigen Vorkommnisse aussagenlogisch unzerlegbarer Teilsätze von A.

2. *Ersetze* die Vorkommnisse dieser komplexen aussagenlogisch unzerlegbarer Teilsätze von A durch Vorkommnisse von Aussagenvariablen $p, q, r, s, t, \ldots$ (gemäß den Regeln (AV1) und (AV2) auf Seite 73 zur Ersetzung aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesätze durch Aussagenvariablen). Wenn ein komplexer aussagenlogisch unzerlegbarer Satz als Teil eines größeren komplexen aussagenlogisch unzerlegbaren Satzes auftritt, dann führe die Ersetzung nur für Letzteren durch.

   Sei A' das Resultat dieser Ersetzung.

3. Suche sämtliche *Vorkommnisse singulärer Terme* in A'.

4. Suche sämtliche *Vorkommnisse genereller Terme* in A'.

5. Bestimme, welche Vorkommnisse der generellen Terme in A' sich auf welche Vorkommnisse der singulären Terme in A' *beziehen*. (Dabei wird auch die *Stellenanzahl* der generellen Terme bestimmt.)

   Durch die Schritte 3–5 wird festgehalten, welche in A vorkommenden Teilsätze, die nicht Teile von komplexen aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesätzen sind, einfach sind.

6. Suche *typische Phrasen* in A', die *komplexe aussagenlogisch zerlegbare Aussagesätze* kennzeichnen. (Dabei werden auch die Vorkommnisse von Ausdrücken von A', die durch diese Phrasen verknüpft werden, bestimmt.)

   Man beachte, dass die Punkte 3–6 oft nicht unabhängig voneinander und gegebenenfalls mehrfach durchlaufen werden müssen.

7. *Ersetze* die Vorkommnisse einfacher Teilsätze von A' durch Vorkommnisse von Aussagenvariablen $p, q, r, s, t, \ldots$ (gemäß der Regeln (AV1) und (AV2) auf Seite 73 zur Ersetzung aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesätze durch Aussagenvariablen, wobei berücksichtigt werden muß, dass die bereits in 2 eingeführten Aussagenvariablen gemäß (AV2) nicht mehr verwendet werden dürfen).

   Sei A'' das Resultat dieser Ersetzung.

8. *Ersetze* die Phrasen in A'', die in 6 gefunden wurden, durch die entsprechenden *Junktoren*, und *setze Klammern* um die durch $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ verbundenen Zeichenfolgen.

   Das Ergebnis der Schritte 1–8 ist die logische Form von A.

Manchmal ist es etwas schwierig, die "typischen Phrasen", auf die wir uns in den Punkten 7 und 8 bezogen haben, mit den aussagenlogischen Junktoren in Verbindung zu setzen, da die natürliche Sprache eine Vielfalt an Ausdrücken bereitstellt, die zwar unterschiedliche Konnotation haben mögen, aber dennoch dieselbe "logische Bedeutung" aufweisen.

Wir können uns dies am Beispiel eines Konjunktionssatzes verdeutlichen.

Der Satz

- Herbert und Hans sind Oberösterreicher.

ist zum Beispiel aussagenlogisch ununterscheidbar von den Sätzen:

- Herbert ist Oberösterreicher, und Hans ist Oberösterreicher.
- Sowohl Herbert als auch Hans ist Oberösterreicher.
- Herbert ist Oberösterreicher, Hans ist Oberösterreicher.
- Herbert ist Oberösterreicher, aber auch Hans ist Oberösterreicher.
- Nicht nur Herbert, sondern auch Hans ist Oberösterreicher.

Um das Repräsentieren aller komplexen aussagenlogisch zerlegbaren Aussagesätze etwas zu erleichtern, geben wir im folgenden eine Übersicht einiger Aussagesätze mit typischen natursprachlicher Phrasen für Junktoren, wobei wir keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erheben:

Negation:
Heidi ist **nicht** müde. Herbert ist **kein** Tiroler. Hans ist **keineswegs** verärgert. **Es ist nicht der Fall, dass** Philosophen weise sind. **Es ist nicht so, dass** alle Weisen Philosophen sind. **Es stimmt nicht, dass** Logik langweilig ist. **Auf keinen Fall** darf Logik aus dem Lehrplan gestrichen werden. Es ist **un**möglich, Philosophie ohne Logik zu betreiben.

Konjunktion:
Herbert **und** Heidi studieren Philosophie. Herbert liebt die Metaphysik, **aber** nicht die Ethik. Heidi mag die Ethik, **jedoch** die Wissenschaftstheorie liegt ihr nicht. Herbert ist Empirist, **aber** Heidi **auch**. Heidi bevorzugt die *klassische* Aussagenlogik, Herbert **auch**. **Während** Heidi Quine als den bedeutendsten Philosophen des 20. Jahrhunderts betrachtet, bewundert Herbert die Philosophie Carnaps. **Obwohl** Quine Carnap sehr schätzte, waren sie oftmals unterschiedlicher Meinung. **Nicht nur** Herbert und Heidi sind Empiristen, **sondern auch** Quine und Carnap. Quine lehnte zwar die Existenz intensionaler Entitäten ab, **doch immerhin** akzeptierte er die Existenz von Mengen. Quine glaubte nicht an mögliche Welten, **doch** Carnap **schon**. **Sowohl** Philosophen **als auch** Mathematiker betreiben Logik, **ja sogar** Computerwissenschafter betrachten sie als eine grundlegende Disziplin.

Disjunktion:
Herbert holt den ersten Band der *Principia Mathematica* aus der Universitätsbibliothek ab, **oder** Heidi holt dieses Buch ab. Die Universitätsbibliothek hat im Juli **oder** August geschlossen, **oder aber** in **beiden** Monaten

Implikation:
Wenn Heidi die Metaphysikprüfung schafft, **dann** lädt Herbert sie zum Essen ein. Herbert schließt den ersten Studienabschnitt mit diesem Semester ab, **sofern** er die Ethikprüfung positiv absolviert. **Falls** Herbert die Ethikprüfung besteht, **dann** hat Heidi mit ihm gelernt. **Nur wenn** Heidi mit Herbert gelernt hat, besteht er die Ethikprüfung. Herbert besteht die Ethikprüfung **nur dann**, **wenn** Heidi mit ihm gelernt hat. **Aus der Tatsache, dass** Herbert die Ethikprüfung bestanden hat, **folgt**, **dass** Heidi mit ihm gelernt hat. **Dass** Herbert die Ethikprüfung bestanden hat, **impliziert**, **dass** Heidi mit ihm gelernt hat. Heidi besteht die Logikprüfung, **vorausgesetzt**, **dass** sie das Buch *Logik für Philosophen* gut studiert hat. **Wenn** Herbert ein Philosophiestudent ist, **so** ist er ein vernunftbegabtes Lebewesen. **Dass** Herbert ein Philosophiestudent ist, **ist eine hinreichende Bedingung dafür**, **dass** er ein vernunftbegabtes Lebewesen ist. **Dass** Herbert ein vernunftbegabtes Lebewesen ist, **ist eine notwendige Bedingung dafür**, **dass** er ein Philosophiestudent ist.

Äquivalenz:
Herbert besucht den Vortrag von Prof. Hintikka **genau dann**, **wenn** Heidi den Vortrag besucht. Herbert besucht den Vortrag von Prof. Hintikka **dann und nur dann**, **wenn** Heidi den Vortrag besucht. **Dass** Herbert den Vortrag von Prof. Hintikka besucht, **ist eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass** Heidi den Vortrag besucht.

3.1.2 Einige Beispiele zur Repräsentierung

Wir wollen nun zeigen, wie wir unser Rezept dazu verwenden können, um drei Beispielsätze zu repräsentieren:

Beispiel 1: Betrachten wir den folgenden Satz aus Übung 1.4 nochmals:

(S1) Herbert und Heidi sind beide nicht glücklich.

Wir gehen nun gemäß unseres Repräsentierungsrezeptes wie folgt vor:

1. Wir suchen zuerst typische Phrasen, die komplexe aussagenlogisch unzerlegbare Aussagesätze kennzeichnen. Solche finden wir jedoch nicht.

2. Wir ersetzen nun alle Vorkommnisse komplexer aussagenlogisch unzerlegbarer Teilsätze von (S1) durch Vorkommnisse von Aussagenvariablen. Da aber keine solchen Teilsätze in (S1) vorkommen, können wir auch nichts ersetzen. (S1)′ ist also identisch mit (S1).

3. Wir suchen sämtliche Vorkommnisse singulärer Terme in (S1):

   (a) Erster Versuch: 'Herbert und Heidi' ist der einzige singuläre Term in (S1). Aber was soll dieser Name denn benennen? Wenn er überhaupt etwas benennt, dann könnte das nur ein Klumpen Raum-Zeit bestehend aus zwei Menschen sein, doch das kann wohl kaum gemeint sein. Das 'und' ist eher so zu verstehen, dass es zwischen zwei *Aussagesätzen* stehen muß, wir müssen nur noch herausfinden zwischen welchen.

   (b) Zweiter Versuch: 'Herbert' und 'Heidi' sind die zwei singulären Terme in (S1). Das klingt schon vernünftiger, denn hier handelt es sich um Namen für Gegenstände, nämlich für einzelne Menschen.

4. Wir suchen sämtliche Vorkommnisse genereller Terme in (S1):

   (a) Erster Versuch: 'sind beide nicht glücklich' ist der einzige generelle Term in (S1). Aber die Ausdrücke 'beide' und 'nicht' deuten darauf hin, dass die Regel (K) (von Seite 76) verletzt sein könnte: Vielleicht sind wir in der Lage, die Repräsentierung dadurch zu verbessern, dass 'beide' und 'nicht' als logische Verknüpfungen übersetzt werden? Die Kopula 'sind' hilft uns zwar beim Auffinden genereller Terme, wir können sie aber als Teil des generellen Terms betrachten und sollten sie somit nicht als eigenständigen Term repräsentieren.

(b) Zweiter Versuch: ‘glücklich’ ist der einzige generelle Term in (S1). Hier handelt es sich um einen Term, der eine Eigenschaft ausdrückt, also um einen generellen Term in dem Sinne, wie wir dies eingeführt haben.

5. Wir bestimmen nun, auf welche Vorkommnisse singulärer Terme sich ‘glücklich’ bezieht. Auf ‘nicht’ kann sich ‘glücklich’ beispielsweise selbstverständlich nicht beziehen, denn ‘Nicht ist glücklich’ ist wohl offenkundiger Unsinn. Offensichtlich bezieht sich ‘glücklich’ einmal auf ‘Herbert’ und ein weiteres Mal auf ‘Heidi’, obgleich dieser zweifache Bezug in (S1) nur implizit enthalten ist, da ja ‘glücklich’ nur ein einziges Mal vorkommt. Würde man (S1) ins Logiker-Deutsch übertragen, dann käme ‘glücklich’ freilich zweimal vor. ‘glücklich’ selbst ist aber einstellig, da dieser Term ja jeweils auf nur einen singulären Term angewandt wird.

   Wir haben also durch die Schritte 3–5 festgestellt, dass in (S1) folgende zwei einfache Teilsätze enthalten sind:

   - Herbert ist glücklich.
   - Heidi ist glücklich.

   In Logiker-Deutsch formuliert sehen diese Sätze so aus:

   - Glücklich(Herbert)
   - Glücklich(Heidi)

6. Wir suchen typische Phrasen, die komplexe aussagenlogisch zerlegbare Aussagesätze kennzeichnen. In unserem Fall sind dies die Phrasen ‘und’, ‘beide’ und ‘nicht’. Es ist klar, dass sich diese Phrasen auf irgendeine Art und Weise auf die einfachen Teilsätze von (S1) beziehen. Die Ausdrücke ‘und’ und ‘beide’ drücken zusammen wohl eine Konjunktion aus. Die Frage ist, welche Aussagesätze durch sie verknüpft werden. Bislang haben wir nur die einfachen Teilsätze ‘Herbert ist glücklich’ und ‘Heidi ist glücklich’ gegeben. Doch (S1) sagt offensichtlich nicht aus, dass diese Personen glücklich sind. Es können also nicht diese einfachen Aussagesätze sein, die durch eine Konjunktion verknüpft werden. (S1) besagt vielmehr, dass Herbert und Heidi beide *nicht* glücklich sind, d.h., dass Herbert nicht glücklich ist und Heidi nicht glücklich ist. Somit bezieht sich ‘nicht’ eigentlich wiederum auf zwei Teilsätze, nämlich einmal auf den Satz ‘Herbert ist glücklich’ und einmal auf den Satz ‘Heidi ist glücklich’, was im Logiker-Deutsch deutlich zutage tritt:

- Nicht Glücklich(Herbert)
- Nicht Glücklich(Heidi)

Die Phrase ‘und ... beide’ verknüpft also vielmehr diese beiden Negationssätze, so dass wir im Logiker-Deutsch den folgenden Konjunktionssatz erhalten:

- Nicht Glücklich(Herbert) und Nicht Glücklich(Heidi)

7. Wir ersetzen nun alle Vorkommnisse einfacher Teilsätze von (S1) durch Vorkommnisse von Aussagenvariablen. Somit ersetzen wir ‘Herbert ist glücklich’ durch p und ‘Heidi ist glücklich’ durch q:

   - Nicht p und Nicht q

   (S1)$''$ ist das Resultat dieser Ersetzung.

   Gemäß Regel (AV2) (von Seite 73) haben wir für die beiden verschiedenen Teilsätze verschiedene Aussagenvariablen verwendet.

8. Wir ersetzen schließlich die Phrasen, die wir in 6 gefunden haben, durch die entsprechenden Junktoren. Die Phrase ‘und ... beide’ wird demgemäß durch $\wedge$ ersetzt, und die Phrase ‘nicht’ wird durch $\neg$ ersetzt. Wenn wir nun noch korrekterweise die Klammern um die durch $\wedge$ verbundenen Zeichenfolgen setzen, dann erhalten wir die logische Form von (S1):

   - $(\neg p \wedge \neg q)$

Beispiel 2: Wir betrachten noch einen weiteren Beispielsatz aus Übung 1.4:

(S2) Herbert und Heidi sind befreundet

1. Wiederum finden wir keine typischen Phrasen, die komplexe aussagenlogisch unzerlegbare Aussagesätze kennzeichnen.

2. Somit können wir auch hier nichts ersetzen: (S2)$'$ ist also wieder identisch mit (S2).

3. Die singulären Terme in (S2)$'$ sind: ‘Herbert’ und ‘Heidi’.

4. Der einzige generelle Term in (S2)$'$ ist ‘befreundet’.

5. ‘befreundet’ bezieht sich auf die beiden singulären Terme ‘Herbert’ und ‘Heidi’, und zwar so, dass dadurch eine Beziehung zwischen Herbert und Heidi ausgedrückt wird. Denn ‘befreundet’ ist doch offensichtlich ein zweistelliger genereller Term. Wenn beispielsweise jemand sagen würde: ‘Aristoteles ist befreundet’, dann würde derjenige, der diese bedeutungslose Zeichenfolge äußert, neben verständnislosen Blicken als Antwort bestenfalls ‘Mit wem?’ ernten.

   Nach den Schritten 4–5 ergibt sich also, dass – ins Logiker-Deutsch übertragen – in (S2)′ folgender einfacher Aussagesatz enthalten ist:

   - Befreundet(Herbert, Heidi)

6. Der einzige Kandidat für eine typische Phrase, die komplexe aussagenlogisch zerlegbare Aussagesätze kennzeichnet, ist: ‘und’. Auf den ersten Blick scheint es sich hier also um einen Konjunktionssatz zu handeln. Aber welche Aussagesätze sollte das ‘und’ hier noch verknüpfen können? ‘? und Befreundet(Herbert, Heidi)’ bzw. ‘Befreundet(Herbert, Heidi) und ?’ lassen sich nicht vervollständigen, weil in unserem Beispielsatz nichts übriggeblieben ist, was man für das Fragezeichen einsetzen könnte. Also kann das ‘und’ in unserem Beispielsatz gar nicht zwei Aussagesätze zu einem Konjunktionssatz verknüpfen. Das ‘und’ ist vielmehr bereits in ‘Befreundet(Herbert, Heidi)’ enthalten. Wenn man will, kann man sich vorstellen, dass es dem Beistrich (Komma) “entspricht”. Um noch stärker zu verdeutlichen, dass das ‘und’ hier nichts zur logischen Form beiträgt, kann man sich auch vor Augen halten, dass es einen Satz gibt, der dieselbe Bedeutung wie (S2)′ hat, in dem aber das ‘und’ gar nicht vorkommt:

   - Herbert ist mit Heidi befreundet.

   Hier entspricht der Ausdruck ‘ist-befreundet-mit’ unserem ‘. . . -und-. . . -sind-befreundet’.

   Es gibt also keinerlei typische Phrasen in (S2)′, die komplexe aussagenlogisch zerlegbare Aussagesätze kennzeichnen.

7. Nach der Ersetzung von ‘Befreundet(Herbert, Heidi)’ durch eine Aussagenvariable erhalten wir als (S2)″:

   - p

8. Die in 6 gefundene Form ist schon die logische Form von (S2), da es keine Phrasen in (S2)″ gibt, die durch einen Junktor ersetzt werden können.

Beispiel 3: Der folgende Beispielsatz stammt aus Übung 2.4:

(S3) Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen, auch wenn er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte.

1. Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob in (S3) keine einzige Phrase vorkäme, die einen komplexen aussagenlogisch unzerlegbaren Aussagesatz kennzeichnete. Doch betrachten wir den Ausdruck 'der Österreicher' etwas genauer. Dieser sieht zunächst wie ein singulärer Term aus. Wenn es sich dabei aber wirklich um einen singulären Term handelte, müßte es einen bestimmten Gegenstand geben, den 'der Österreicher' benennen würde. Nun existiert *der* "allgemeine" Österreicher aber nicht, denn es gibt nur konkrete Menschen, die Österreicher *sind*, die also die *Eigenschaft* haben, Österreicher zu sein. 'der Österreicher' kann demgemäß kein singulärer Term sein, da damit nicht auf einen bestimmten Österreicher Bezug genommen wird, sondern auf Österreicher im allgemeinen. Wir haben es hier also mit etwas wie einem Allsatz (oder zumindest mit einem 'für die meisten' Satz oder dergleichen) zu tun, in dem der generelle Term 'Österreicher' vorkommt. 'der Österreicher' ist dann vielmehr zu verstehen als 'alle Österreicher'. 'Der Österreicher ist eigentlich ein Freund fremder Kulturen' sagt also dasselbe aus wie 'Alle Österreicher sind eigentlich Freunde fremder Kulturen'.

   Im zweiten Teil des Satzes sieht 'er' zunächst wiederum wie ein guter Kandidat für einen singulären Term aus, doch was soll 'er' hier bezeichnen? "Den" Österreicher? Wie wir bereits gesehen haben, gibt es einen solchen Gegenstand gar nicht, und somit muß es sich auch hier wiederum um eine versteckte Allphrase handeln, mit der man auf alle Österreicher Bezug nimmt, und zwar vermutlich um dieselbe Allphrase wie im ersten Teil von (S3). (S3) besteht dann nicht etwa aus zwei generellen Sätzen, sondern ist als ganzes genommen ein genereller Satz: Von "den" Österreichern wird ausgesagt, dass sie eigentlich Freunde fremder Kulturen sind, aber außerdem nicht zu viele Ausländer in ihrer Heimat sehen möchten. Dieses 'aber außerdem' ist logisch gesehen eine Konjunktion – das eine ist der Fall und das andere ist der Fall – welche sich freilich im Kontext der Quantifikation über die Gesamtheit der Österreich befindet und somit als zu repräsentierender Teil von 'der Österreicher' bzw. 'alle Österreicher' gleichsam überdeckt oder neutralisiert wird. Denn 'der Österreicher' bzw. 'alle Österreicher' leitet einen generellen Satz ein, den wir aussagenlogisch nicht weiter analysieren können noch sollen.

   Die einzige einigermaßen plausible alternative Auffassung bestünde darin, den Satz so zu verstehen: Für "den" Österreicher gilt, dass er eigentlich ein Freund fremder Kulturen ist, und außerdem gilt für "den" Österreicher, dass er nicht zu viele Ausländer in seiner Heimat sehen möchte. So verstanden wäre der Beispielssatz eine Konjunktion zweiter genereller Sätze anstatt eines generellen Satzes, in dessen Mitte sich ein Konjunktionszeichen befindet. Das Pronomen 'er' jedoch weist in dem Beispielssatz auf das anfängliche Vorkommnis von 'der Österreicher' zurück, was nahelegt, ein und dasselbe Vorkommnis von 'der Österreicher' auf den ganzen Satz (inklusive der Konjunktion) zu beziehen. Wir bleiben daher bei der ersteren Auffassung, dergemäß der Satz insgesamt als genereller Satz zu verstehen ist.

2. Wir ersetzen (S3) folglich durch eine Aussagenvariable und erhalten als (S3)$'$:

   - p

3. Es gibt keine Vorkommnisse singulärer Terme in (S3)$'$.

4. Es gibt keine Vorkommnisse genereller Terme in (S3)$'$.

5. Daher bezieht sich auch kein genereller Term in (S3)$'$ auf einen singulären Term in (S3)$'$.

6. Es gibt keine einfachen Teilsätze in (S3)$'$, die wir durch Aussagenvariablen ersetzen können. (S3)$''$ ist also identisch mit (S3)$'$.

7. Weiters existieren keine typischen Phrasen in (S3)$''$, die komplexe aussagenlogisch zerlegbare Aussagesätze kennzeichnen.

8. Dementsprechend können wir auch keine Junktoren in (S3)$''$ einführen, und daher ist die logische Form von (S3):

   - p

3.2 Repräsentierung von Argumenten

Die Repräsentierung von Argumenten ist mit wenigen Worten erklärt: Ein Argument wird repräsentiert, indem jeder einzelne der darin vorkommenden Aussagesätze gemäß des obigen Rezeptes repräsentiert wird. Der einzig dabei noch bemerkenswerte Punkt ist, dass ein Argument *als Ganzes* als Kontext gesehen werden sollte: Verwendet man beispielsweise p zugleich bei der

Repräsentierung von zwei verschiedenen Prämissen eines Argumentes, dann sollte p bei beiden Prämissen auch für denselben Aussagesatz stehen.

Sehen wir uns nochmals die Beispiele (Arg. 1) bis (Arg. 3) aus Abschnitt 2.5 an. (Arg. 1) lässt sich wie folgt repräsentieren:

$$p, q \therefore r$$

Denn p ist die logische Form des Allsatzes 'Alle Menschen sind sterblich', q ist die logische Form des einfachen Aussagesatzes 'Sokrates ist ein Mensch' und r ist die logische Form des einfachen Aussagesatzes 'Sokrates ist sterblich'. Wie wir sehen, werden die Prämissenformeln durch Beistriche getrennt und die Konklusion durch $\therefore$ angezeigt.

Die logische Form von (Arg. 2) ist identisch mit der logischen Form von (Arg. 1) Der Grund dafür ist, dass die aussagenlogische Repräsentierung nicht fein genug ist, um die logisch relevanten Unterschiede in der Form der Argumente wiedergeben zu können. Wie wir noch sehen werden, sind *beide* Argumente aussagenlogisch *ungültig*, da ihre gemeinsame logische Form aussagenlogisch ungültig ist. Die *prädikatenlogischen* Formen sind jedoch unterschiedlich, wobei sich später – erwartungsgemäß – die Form des ersten Argumentes als prädikatenlogisch gültig und die des zweiten Argumentes als prädikatenlogisch ungültig herausstellen wird.

Die logische Form von (Arg. 3) ist:

$$(p \vee q), \neg p \therefore q$$

p steht dabei immer für denselben Aussagesatz ('Der Papst kommt nächsten Sommer nach Wien'), genauso q (für 'Der Papst kommt nächsten Sommer nach Salzburg'). Die aus der Repräsentierung resultierende Argumentform – und somit auch das repräsentierte Argument – wird sich bereits in der Aussagenlogik als logisch gültig herausstellen.

3.3 Übungen

Übung 3.1 Repräsentieren Sie die folgenden Aussagesätze:

- Wenn Dieter Bohlen 2013 Bundeskanzler wird, dann werden die Konservativen, aber nicht die Grünen in die Regierung gehen.
- Wenn der Täter mit dem gestohlenen Auto flüchtete, so kann er, sofern die Zollbeamten nicht wachsam waren, schon über die Grenze sein, doch wenn er nicht mit dem gestohlenen Auto flüchtete, sondern zu Fuß ging, so kann er nicht weit gekommen sein.

Übung 3.2 Repräsentieren die Aussagesätze aus den Übungen 1.4 und 2.4.

Übung 3.3 Repräsentieren Sie die Argumente aus Übung 2.5.

Übung 3.4 Repräsentieren Sie die folgenden Argumente:

- Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Österreich 2011 genau dann aus der EU aus, wenn Österreich dies tut.
- Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberösterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberösterreich. Daher existiert Gott.

Kapitel 4

Die aussagenlogische Sprache

Wir haben bereits Symbole eingeführt, um aussagenlogisch unzerlegbare Aussagesätze zu repräsentieren, nämlich

p, q,...

Außerdem haben wir Junktoren – also weitere Symbole – dazu verwendet, um in der formalen Sprache Negationsphrasen, Konjunktionsphrasen, etc. zu repräsentieren. Eigentlich wissen wir aber noch gar nicht, zu welcher *Sprache* diese Symbole genau gehören. Offensichtlich handelt es sich dabei um eine "künstlich" kreierte formale Sprache – der Zweck dieses Kapitels ist es nun, diese formale Sprache exakt aufzubauen: die Sprache der Aussagenlogik.

4.1 Das Alphabet der aussagenlogischen Sprache

Wenn man eine Sprache definieren will, muss man zunächst einmal angeben, aus welchen Bestandteilen die Ausdrücke der Sprache denn zusammengesetzt sein sollen. Wir müssen uns also zunächst dem *Alphabet* oder *Vokabular* der aussagenlogischen Sprache zuwenden. Bei formalen Sprachen ist es im Allgemeinen so, dass die Zeichen des Alphabets in drei Kategorien eingeteilt werden können, und zwar in die folgenden:

1. Deskriptive Zeichen.

2. Logische Zeichen.

3. Hilfszeichen.

Wie wir später sehen werden, ist es die Funktion der deskriptiven Zeichen, auf die Welt Bezug zu nehmen oder jedenfalls in Abhängigkeit davon, wie die Welt beschaffen ist, etwas Bestimmtes zu bezeichnen oder auszudrücken oder bewertet zu werden. Dies ist freilich höchst vage, und es ist eine unserer Aufgaben in diesem Buch, Phrasen dieser Art einen exakten Sinn zu geben. Dazu wird es sich als nötig erweisen, diese Zeichen mit einem semantischen "Wert" zu versehen, sie also zu interpretieren, wobei – wie wir noch sehen werden – diese Interpretation bis zu einem gewissen Grad frei gewählt werden kann; die "Bedeutung" der deskriptiven Zeichen ist also nicht fix.

Ganz anders verhält es sich bei den logischen Zeichen. Sie haben sehr wohl eine fixe Bedeutung, die aber nicht dadurch gegeben ist, dass wir ihnen einen festen semantischen Wert zuordnen, sondern vielmehr dadurch, dass logische Regeln – seien sie syntaktischer oder semantischer Natur – ihre Bedeutung eindeutig festlegen. Die Verwendung der logischen Zeichen ermöglicht es uns ja erst, die logische Form sprachlicher Ausdrücke auf eindeutige Weise herauszuarbeiten.

Die Hilfszeichen schließlich dienen alleine dazu, Mehrdeutigkeiten zu vermeiden und die Lesbarkeit der Formeln zu fördern.

Gemäß dieser Einteilung sieht nun das Alphabet unserer aussagenlogischen Sprache wie folgt aus:

1. Aussagenvariablen: p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8,. . .
2. Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
3. Hilfszeichen: (,)

Unsere deskriptiven Zeichen sind also alleine die Aussagenvariablen, was sich später darin zeigen wird, dass wir dieselben als wahr oder falsch bewerten werden. Es gibt übrigens genauso viele Aussagenvariablen wie natürliche Zahlen in unserem Alphabet, also unendlich viele. Junktoren hingegen gibt es nur fünf, und wir haben dieselben ja bereits in den vorigen Kapiteln kennengelernt. Als die einzigen Hilfszeichen werden wir die linke runde Klammer und die rechte runde Klammer verwenden.

Statt 'p_1', 'p_2', 'p_3', 'p_4', 'p_5' werden wir außerdem meist 'p', 'q', 'r', 's', 't' schreiben, um nicht ständig zu Subindizes greifen zu müssen.

Mit diesem Alphabet können wir nun beliebige Zeichenfolgen bilden, und zwar einfach dadurch, dass wir die Elemente des Alphabets "hintereinanderschreiben". Einige Beispiele dafür sind:

- $(p \wedge q)$
- (((
- $\neg r$

- $\vee\wedge)p($
- s
- $(p \wedge p) \rightarrow p)$

Nun ist es in der natürlichen Sprache freilich so, dass wir durch ein beliebiges Aneinanderreihen von Buchstaben nicht notwendigerweise auch grammatikalisch wohlgeformte Ausdrücke erzeugen. Genauso verhält es sich bei den formalen Sprachen. Demgemäß ist auch nicht jede Zeichenfolge aus der obigen Liste grammatikalisch wohlgeformt, und zwar im Sinne der im folgenden zu spezifizierenden Grammatik der aussagenlogischen Sprache.

4.2 Die Grammatik der aussagenlogischen Sprache

In den natürlichen Sprachen gibt es viele verschiedenartige grammatikalische Kategorien, die Grammatik der aussagenlogischen Sprache ist jedoch höchst einfach. Wir werden in wenigen einfachen Schritten angeben können, was eine (wohlgeformte) aussagenlogische Formel ist. Damit wissen wir dann auch, welche Zeichenfolgen, die aus Elementen unseres Alphabets gebildet werden können, grammatikalisch wohlgeformt sind – eben alle und nur die Formeln. Um auf beliebige Formeln Bezug nehmen zu können, werden wir im folgenden die sogenannten Metavariablen 'A', 'B', 'C', 'D',... verwenden. Diese Zeichen benützen wir also insbesondere, wenn wir etwas über *alle* Formeln der aussagenlogischen Sprache aussagen wollen, oder wenn wir ausdrücken wollen, dass eine Formel der aussagenlogischen Sprache *existiert*, die diese oder jene Eigenschaft hat: Wir werden dann z.B. sagen, dass für alle Formeln A der aussagenlogischen Sprache gilt, dass ... der Fall ist, oder dass es eine Formel B der aussagenlogischen Sprache gibt, für die ... der Fall ist. Das 'Meta' in 'Metavariable' rührt daher, dass diese Metavariablen nicht selbst Teil der Sprache sind, über die wir sprechen wollen – der sogenannten Objektsprache, in unserem Fall: die aussagenlogische Sprache – sondern derjenigen Sprache angehören, in der wir über die Objektsprache sprechen – der sogenannten Metasprache (in unserem Falle: Deutsch ergänzt durch diverse formale Ausdrücke).

Die Menge der Formeln der aussagenlogischen Sprache können wir nun wie folgt festlegen:

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
2. Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\neg A$ eine Formel.

3. Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \wedge B)$ eine Formel.

4. Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \vee B)$ eine Formel.

5. Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \rightarrow B)$ eine Formel.

6. Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \leftrightarrow B)$ eine Formel.

7. Nur solche Zeichenfolgen sind Formeln, die sich mit Hilfe der Regeln 1–6 bilden lassen.

Wir nennen die gemäß Regel 1 gebildeten Formeln auch '*atomare Formeln*', die gemäß Regel 2 gebildeten Formeln '*Negationsformeln*', die gemäß Regel 3 gebildeten Formeln '*Konjunktionsformeln*', die gemäß Regel 4 gebildeten Formeln '*Diskunktionsformeln*', die gemäß Regel 5 gebildeten Formeln '*Implikationsformeln*' und die gemäß Regel 6 gebildeten Formeln '*Äquivalenzformeln*'. Alle Formeln, die nicht atomar sind, d.h. deren Bildung wenigstens eine der Regeln 2–6 involviert, werden wir *komplex* nennen. Die gesamte Menge aller Formeln bezeichnen wir auch mit '$\mathcal{F}$'.

Eine Definition der obigen Art nennt man übrigens 'rekursiv' oder auch 'induktiv'. Dabei beginnt man mit einer "Ausgangsmenge": In unserem Falle ist dies die Menge der Aussagenvariablen. Dies findet in unserer Definition in Regel 1 seinen Ausdruck. Sodann gibt man Regeln an, mit deren Hilfe die Ausgangsmenge Schritt für Schritt erweitert wird. In unserer Definition werden dadurch immer "größere" Negationsformeln, Konjunktionsformeln, Disjunktionsformeln, Implikationsformeln und Äquivalenzformeln hinzugefügt, wie man an den Regeln 2–6 sieht. Endlich schließt man diese Erweiterung ab, indem man alle "unerwünschten" Elemente ausschließt, nämlich alle diejenigen, die man mit Hilfe der bisher angegeben Regeln nicht hat erzeugen können. Dies wird in unserem Falle durch Regel 7 deutlich.

Veranschaulichen wir uns dies anhand eines Beispiels: Da p, q und r Aussagenvariablen sind, sind

- p, q, r

gemäß Regel 1 auch Formeln (und zwar derer drei). Daher ist gemäß Regel 2 auch

- $\neg p$

eine Formel (nämlich eine Negationsformel), sowie gemäß Regel 3

- $(q \land r)$

eine Formel (nämlich eine Konjunktionsformel). Somit ergibt sich gemäß Regel 4, dass

- $(\neg p \lor (q \land r))$

ebenfalls eine Formel ist (eine Disjunktionsformel). Indem wir erneut Regel 2 auf diese Formel anwenden, erhalten wir

- $\neg(\neg p \lor (q \land r))$

als Formel (wieder eine Negationsformel). Eine abermalige Anwendung von Regel 2 ergibt, dass auch

- $\neg\neg(\neg p \lor (q \land r))$

eine Formel ist (ebenfalls eine Negationsformel). Da – wie wir schon gesehen haben – aber auch p eine Formel ist, ist gemäß Regel 5

- $(\neg\neg(\neg p \lor (q \land r)) \rightarrow p)$

eine Formel (nämlich eine Implikationsformel). Regel 6 erlaubt es uns nun, auch

- $((\neg\neg(\neg p \lor (q \land r)) \rightarrow p) \leftrightarrow (\neg\neg(\neg p \lor (q \land r)) \rightarrow p))$

als eine Formel (eine Äquivalenzformel) zu betrachten. Usw. Wie wir sehen, enthält unsere aussagenlogische Sprache Formeln beliebiger endlicher Länge, da die obigen Regeln wieder und wieder angewendet werden können, um komplexere und noch komplexere Formeln zu bilden.

Von den obigen Zeichenfolgen in Abschnitt 4.1 sind die erste, dritte und fünfte Zeichenfolge Formeln, die anderen jedoch nicht, denn letztere können nicht durch Anwendungen der Regeln 1–6 gebildet werden und sind somit gemäß Regel 7 keine Formeln.

Unsere Definition erlaubt es uns nun, für jede beliebige Zeichenfolge, die aus Elementen unseres Alphabets gebildet ist, festzustellen, ob diese eine Formel ist oder nicht. Bringen wir einige Beispiele dazu:

(a) $(p \land q)$

(b) p

(c) $(p \rightarrow (q \lor \neg q))$

(d) $(\neg m \land p)$

(e) $p \lor q$

(f) $((p \land q) \leftrightarrow r)$

(g) $\neg(r)$

(h) $(q \rightarrow (p \lor r)$

Zeichenfolge (a) ist aufgrund der Regeln 1 und 3 eine Formel, (b) alleine aufgrund der Regel 1, (c) ist aufgrund der Regeln 1, 2, 4 und 5 eine Formel, (d) stellt sich nicht als Formel heraus, da wir m nicht als Aussagenvariable eingeführt haben (und somit m gar nicht in unserem Alphabet vorkommt); (e) ist keine Formel, da Disjunktionsformeln immer geklammert sein müssen; (f) ist aufgrund der Regeln 1, 3 und 6 eine Formel, (g) ist keine Formel, da Aussagenvariablen nicht geklammert werden dürfen; und (h) ist keine Formel, weil man gemäß unserer Definition beweisen kann, dass es in jeder Formel gleich viele linke Klammern wie rechte Klammern geben muss.

Die Verwendung von Klammern rührt von folgender Beobachtung her: Sagen wir, jemand hätte es mit der Zeichenfolge

- $(p \land q \lor r)$

zu tun. Was genau soll damit dann gemeint sein? Ist es die Disjunktionsformel

- $((p \land q) \lor r)$

oder doch die Konjunktionsformel

- $(p \land (q \lor r))$

Wie immer die Antwort auch ausfällt: Die Auswirkungen auf die Bedingungen, unter denen die nämliche Formel wahr ist, und darauf, welche Schlüsse sich aus der Formel ziehen lassen, könnten gravierend sein. Deshalb ist es sinnvoll, etwaige Unklarheiten gleich von vornherein durch die Verwendung von Klammern zu beseitigen. Gemäß unserer obigen Formationsregeln ist dann

- $(p \land q \lor r)$

gar keine Formel, während es sich bei $((p \land q) \lor r)$ und $(p \land (q \lor r))$ um zwei – voneinander verschiedene – Formeln handelt.

Im Gegensatz zu den zweistelligen logischen Junktoren lässt sich zeigen, dass Anwendungen des einstelligen Negationsoperators $\neg$ nicht zu Mehrdeutigkeiten führen können: Jedes Vorkommnis von $\neg$ bezieht sich immer auf die eindeutig bestimmte darauf folgende Formel. Daher brauchen Anwendungen von $\neg$ auch nicht geklammert zu werden und entsprechend haben wir unsere obige Definition der Menge der aussagenlogischen Formeln auch angelegt.

4.3 Aussagenlogische Argumentformen

Wie wir bereits im letzten Kapitel gesehen haben, lassen sich aussagenlogische Formeln als die aussagenlogischen Formen von Aussagesätzen deuten. Wenn wir unserer aussagenlogischen Sprache nun noch Argumentformen hinzufügen wollen – aussagenlogische Formen von Argumenten – so müssen wir sowohl unser Alphabet als auch unsere Grammatik leicht verändern.

Beginnen wir damit, das aussagenlogische Alphabet um folgende Symbole zu ergänzen:

- Konklusionsindikator: $\therefore$
- Hilfszeichen: ,

Das logische Zeichen $\therefore$ kennen wir ja schon aus Abschnitt 2.5, p.66, in dem wir es als formalen Konklusionsindikator eingeführt haben. Der Beistrich dient nur dazu, die Prämissen einer Argumentform deutlich voneinander zu trennen. So können wir also festsetzen:

> Eine *Argumentform* ist eine Zeichenfolge $A_1, \ldots, A_{n-1} \therefore B$, wobei
>
> 1. alle A_i $(1 \leq i \leq n-1)$ aussagenlogische Formeln sind, welche durch Beistriche voneinander getrennt sind und 'Prämissen' genannt werden, und
> 2. B eine aussagenlogische Formel ist, welche durch $\therefore$ eingeleitet und 'Konklusion' genannt wird.

Wir lassen auch hier wieder den "Grenzfall" $n = 1$ zu, d.h., dass eine Argumentform *gar keine* Prämissen hat. So eine Argumentform hätte also die Form $\therefore B$.

Beispielsweise ist die Zeichenfolge

- $\neg p, (p \wedge q) \therefore r$

eine Argumentform gemäß unserer Formelregeln 1, 2 und 3 sowie der Definition von Argumentformen.

4.4 Klammerersparnisregeln

Komplexe Formeln können rasch recht unübersichtlich werden, was zum Teil auf die Verwendung allzu vieler Klammern zurückzuführen ist, wie man etwa an folgendem Beispiel unschwer erkennen kann:

- $\neg(\neg\neg((\neg((p \vee \neg q) \wedge r) \vee s) \rightarrow t) \leftrightarrow (p_6 \vee \neg\neg p_7))$

Wir können jedoch sogenannte *Klammerersparnisregeln* einführen, mit deren Hilfe unsere Formeln wieder ein wenig besser lesbar werden. Wir dürfen jedoch nur dann Klammern weglassen, wenn es eindeutig festgelegt ist, wie wir die ursprüngliche (und eigentliche) Formel wiederherstellen können. Die Regeln, die wir im folgenden angeben werden, berücksichtigen dies.

Kommen wir also zur *Klammerersparnisregel 1*:

(KE1) Die äußersten Klammern einer Formel dürfen weggelassen werden.

Üblicherweise werden wir also etwa

- $p \wedge q$ statt $(p \wedge q)$,
- $r \vee (s \wedge t)$ statt $(r \vee (s \wedge t))$,
- $\neg p \rightarrow q$ statt $(\neg p \rightarrow q)$ und
- $(p \wedge r) \leftrightarrow q$ statt $((p \wedge r) \leftrightarrow q)$.

schreiben.

Die *Klammerersparnisregel 2* lautet:

(KE2) Die Junktoren $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.

Dies heißt, dass wir Klammern um Konjunktions- und Disjunktionsformeln weglassen dürfen, wenn diese Formeln unmittelbare Teilformeln einer Implikations- oder Äquivalenzformel sind. Wir schreiben also (unter gleichzeitiger Verwendung von (KE1))

- $p \rightarrow q \wedge r$ statt $(p \rightarrow (q \wedge r))$,
- $p \vee q \rightarrow r$ statt $((p \vee q) \rightarrow r)$,
- $q \vee \neg r \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ statt $((q \vee \neg r) \leftrightarrow (q \rightarrow p))$

Die Klammern, die im letzten Beispiel noch übrig sind, dürfen freilich *nicht* weggelassen werden, da sonst die eindeutige Lesbarkeit nicht mehr gewährleistet wäre.

Zum Vergleich: Wir dürfen nicht etwa

- $p \leftrightarrow \neg p \wedge (s \vee r)$ statt $(p \leftrightarrow \neg(p \wedge (s \vee r)))$

schreiben: Das Negationszeichen $\neg$, für das wir keine eigenen Klammern eingeführt haben, wird ja gemäß den syntaktischen Regeln für aussagenlogische Formeln immer so gelesen, dass es sich auf die unmittelbar folgende Formel bezieht; in $\neg p \wedge (s \vee r)$ ist aber die unmittelbar auf $\neg$ folgende Formel die Aussagenvariable p und nicht etwa die Konjunktionsformel $(p \wedge (s \vee r))$. Wollte man $\neg$ auf $(p \wedge (s \vee r))$ beziehen, so müßte man unbedingt die äußeren Klammern in $(p \wedge (s \vee r))$ belassen, was aber in $p \leftrightarrow \neg p \wedge (s \vee r)$ nicht der Fall ist. Demnach kann $p \leftrightarrow \neg p \wedge (s \vee r)$ nicht kurz für $(p \leftrightarrow \neg(p \wedge (s \vee r)))$ stehen, sondern vielmehr für $(p \leftrightarrow (\neg p \wedge (s \vee r)))$.

(KE2) erinnert uns an den Mathematikunterricht, in dem wir gelernt haben: "Punktrechnung geht vor Strichrechung", d.h., das Multiplikationszeichen bindet stärker als das Additionszeichen. Auf diese Weise erhält man dann: $a \cdot b + c$ ist identisch mit $(a \cdot b) + c$ und nicht etwa mit $a \cdot (b + c)$.

4.5 Übungen

Übung 4.1 Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Formeln? Beachten Sie dabei, daß wir in dieser Übung keine Klammerersparnisregeln gelten lassen wollen. Genaue Klammersetzung ist also wichtig.

1. $p \wedge q \vee r$
2. $((p \wedge q) \vee r))$
3. $((p \wedge q) \vee r)$
4. $(\neg (p \vee q) \rightarrow r)$
5. $\neg ((p \vee q) \rightarrow r)$
6. $((p \vee q) \Rightarrow p)$
7. $((\neg p \vee q) \rightarrow r)$
8. $\neg ((P \vee Q) \rightarrow R)$
9. $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$
10. $(\neg\neg\neg\neg\neg\neg r \rightarrow (p \vee q))$
11. $p \leftrightarrow q$
12. $((p \rightarrow q) \wedge \neg (\neg q \rightarrow \neg p))$
13. $((p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow p))$
14. $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))))$
15. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
16. $\neg (\neg\neg ((\neg ((p_{12} \vee \neg p_9) \wedge p_8) \vee p_7) \rightarrow p_6) \leftrightarrow (p_5 \vee \neg\neg p_{13}))$
17. $((p \wedge q) \rightarrow \neg (s))$

Übung 4.2 Welche der folgenden Zeichenfolgen sind aussagenlogische Argumentformen?

1. $p, (p \rightarrow q) \therefore p, q$
2. $\therefore (p \vee \neg p)$

3. $(q \land r \lor s), (r) \therefore \neg(\neg(q)$

4. $(q \to r), \neg r \therefore (\neg q \lor s)$

5. $p, p, p, p, p \therefore p$

6. $(q \land \neg q) \therefore$

7. $p \neg q \therefore r$

Übung 4.3 Wenden Sie die beiden Klammerersparnisregeln auf die Formeln aus der Übung 4.1 an.

Übung 4.4 Setzen Sie in den folgenden Zeichenfolgen die Klammern, die den beiden Klammerersparnisregeln zum Opfer gefallen sind – kehren sie also die Anwendung der Klammerersparnisregeln um.

1. $p \lor q$

2. $p \land q \to r$

3. $p \to q \lor r$

4. $p \lor q \to (p \land r) \lor \neg s$

5. $\neg p \lor (q \land \neg r) \to \neg(p \lor \neg s) \lor \neg(q \to s)$

Übung 4.5 In welchen der folgenden Zeichenreihen wurden die beiden Klammerersparnisregeln korrekt angewendet?

1. $p \to q \to r$

2. $p \lor q \to r \land s$

3. $p \land q \land r \to s$

4. $p \lor q \to r \lor q \land p$

5. $p \to (q \to r) \lor s \to q$

Kapitel 5

Die aussagenlogische Semantik

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir die erste Aufgabe, die wir uns in der Logik stellen, nämlich die logischen Formen natursprachlicher Ausdrücke aufzufinden, im (sehr einfachen) Rahmen der Aussagenlogik zu einem guten Ende gebracht. Wir sind nun in der Lage, die logische Struktur von Aussagesätzen zu klassifizieren, Aussagesätze und Argumente durch Formeln zu repräsentieren, und wir haben völlige Klarheit darüber erlangt, welche aussagenlogischen Formeln uns potentiell für diesen Prozess der Repräsentierung zur Verfügung stehen. Die Angabe der logischen Formen von Aussagesätzen und Argumenten ist deswegen so wichtig, weil wir damit die Mehrdeutigkeiten und Vagheiten der natürlichen Sprachen vermeiden, um sodann später definitiv sagen zu können, ob denn ein Aussagesatz oder ein Argument (bzw. dessen logische Formen) gewisse logisch relevante Eigenschaften hat oder in logisch relevanten Beziehungen zu anderen Aussagesätzen oder Argumenten steht. Wir können dann etwa exakt bestimmen, wie die Wahr- bzw. Falschheit eines komplexen Satzes von der Wahr- bzw. Falschheit seiner Teilsätze abhängt, was es bedeutet, dass ein Satz aus rein logischen Gründen wahr oder falsch ist, was es heißt, dass ein Satz aus einem anderen logisch folgt, was ein logisch gültiges Argument ist, etc. Um all diese logisch relevanten Eigenschaften und Beziehungen soll es nun in diesem Kapitel gehen.

5.1 Wahrheitstafeln

Eine Methode, um solche logischen Eigenschaften und Beziehungen von Formeln und Argumentformen feststellen zu können, ist die sogenannte Wahrheitstafelmethode. In Kapitel 2.2 haben wir bereits die Bedeutung unserer Junktoren anhand von Wahrheitstafeln kennengelernt. Davon ausgehend wollen wir uns nun im Detail der Frage zuwenden, wie die Wahrheitstafeln *beliebig komplexer* Formeln aussehen. Mit Hilfe dieser Wahrheitstafeln werden wir in der Lage sein anzugeben, unter welchen Bedingungen eine komplexe Formel wahr bzw. falsch ist bzw. wann eine Formel logisch wahr oder logisch falsch und wann ein Argument logisch gültig oder ungültig ist.

5.1.1 Wahrheitstafeln für Aussagesätze und Formeln

Wie sieht zum Beispiel die Wahrheitstafel für die komplexe Formel

- $p \vee q \rightarrow p \wedge q$

aus? Zuerst suchen wir sämtliche Aussagenvariablen in der Formel, also in unserem Fall p und q. Dann schreiben wir diese Aussagenvariablen nebeneinander auf und fügen die zu bewertende Formel rechts hinzu. Wenn wir noch die entsprechenden Linien anbringen, dann sieht das Ergebnis dieser noch sehr unvollständigen Wahrheitstafel wie folgt aus:

p	q	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$

Da wir doch feststellen wollen, wie der Wahrheitswert einer komplexen Formel von den Wahrheitswerten der Teilformeln abhängt, müssen wir zuerst die "kleinsten" Teilformeln bewerten, nämlich die Aussagenvariablen. Dabei gibt es jedoch nicht nur eine, sondern mehrere Möglichkeiten der Bewertung, die sich dadurch ergeben, dass man die Wahrheitswerte w und f auf alle möglichen Weisen den in der Formel vorkommenden Aussagenvariablen zuordnet. Diese Wahrheitswertkombinationen kann man mit dem österreichischen Philosophen Ludwig Wittgenstein – der als einer der ersten die Wahrheitstafelmethode zwecks der logischen Analyse einführte – auch 'Wahrheitsmöglichkeiten' nennen.[1] Wenn wir also – wie in unserem Beispiel – zwei Aussagenvariablen p und q gegeben haben, dann haben wir die folgenden vier Möglichkeiten, die zwei Wahrheitswerte w und f auf die beiden Aussagenvariablen zu verteilen:

1. p wird mit w bewertet und q wird mit w bewertet.
2. p wird mit w bewertet und q wird mit f bewertet.

[1] Vgl. [15].

3. p wird mit f bewertet und q wird mit w bewertet.

4. p wird mit f bewertet und q wird mit f bewertet.

Tragen wir nun jede dieser Möglichkeiten in die Zeilen unserer unvollständigen Wahrheitstafel unter p und q ein, dann erhalten wir:

p	q	$p \lor q \to p \land q$
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Nun können wir Schritt für Schritt jede Zeile vervollständigen, und dazu gehen wir wie folgt vor: Wir bewerten die Teilformeln der Gesamtformel "von innen nach außen", d.h. zuerst werden die nach den Aussagenvariablen "nächstgrößeren" bewertet, dann wiederum die "nächstgrößeren", bis wir bei der zu bewertenden Gesamtformel angelangt sind. Die nach den Aussagenvariablen "innersten" Formeln sind in unserem Fall $p \lor q$ sowie $p \land q$, da gemäß unseren Klammerersparnisregeln $p \lor q \to p \land q$ ja nichts anderes ist als $((p \lor q) \to (p \land q))$. Zunächst bewerten wir also die Teilformel $p \lor q$ gemäß der bereits bekannten Wahrheitstafel für die Disjunktionsformeln von S.46 und schreiben das Ergebnis dieser Bewertung unter den Junktor von $p \lor q$, also das $\lor$:

p	q	$p \lor q$	$\to$	$p \land q$
w	w	w		
w	f	w		
f	w	w		
f	f	f		

Auf analoge Weise bewerten wir $p \land q$ unter Zuhilfenahme der Wahrheitstafel für die Konjunktionsformeln von S.44 und schreiben das Ergebnis unter den Junktor $\land$:

p	q	$p \lor q$	$\to$	$p \land q$
w	w	w		w
w	f	w		f
f	w	w		f
f	f	f		f

Schließlich können wir die Wahrheitswerte der ganzen Implikationsformel $p \lor q \to p \land q$ ergänzen, indem wir aus den Wahrheitswerten der beiden Teilformeln mit Hilfe der Wahrheitstafel für Implikationsformeln von S.50 die Wahrheitswerte für die Gesamtformel bestimmen:

p	q	$p \lor q$	$\to$	$p \land q$
w	w	w	w	w
w	f	w	f	f
f	w	w	f	f
f	f	f	w	f

Das Endergebnis dieser Bewertung mittels einer Wahrheitstafel ist nun die Spalte unter dem *Hauptjunktor* der Gesamtformel, im aktuellen Falle also die Spalte unter dem Implikationszeichen $\to$. Diese Spalte wollen wir auch als den 'Wertverlauf' dieser Formel bezeichnen. Der Hauptjunktor einer Formel ist der "äußerste" Junktor der Formel; bei einer Negationsformel ist dies selbstverständlich ein $\neg$, bei einer Konjunktionsformel ein $\land$, bei einer Disjunktionsformel ein $\lor$, bei einer Implikationsformel ein $\to$ und bei einer Äquivalenzformel ein $\leftrightarrow$.

Um ein wenig mehr Übung zu bekommen, sehen wir uns gleich noch ein Beispiel an. Erstellen wir die Wahrheitstafel für die Formel $p \land (q \to \neg p)$:

p	q	$p \land$	$(q \to$	$\neg p)$
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
f	w	f	w	w
f	f	f	w	w

Um diese Wahrheitstafel zu erhalten, bewerten wir zuerst die "innerste" komplexe Formel, nämlich $\neg p$, gemäß unserer Wahrheitstafel für Negationsformeln von S.42. Dann können wir gemäß der Wahrheitstafel für Implikationsformeln die Formel $q \to \neg p$ bewerten, um schließlich die Gesamtformel gemäß der Wahrheitstafel für Konjunktionsformeln zu bewerten. Der Hauptjunktor dieser Formel ist nämlich das Konjunktionszeichen $\land$.

Die Formeln, für die wir bisher Wahrheitstafeln erstellt haben, haben nur zwei Aussagenvariablen enthalten. Wie sieht es jedoch etwa mit der Formel $p \to q \land \neg r$ aus, die drei Aussagenvariablen enthält? Hier gibt es freilich mehr Möglichkeiten, die Aussagenvariablen mit w und f zu bewerten. Denn jede Bewertungsmöglichkeit für p und q läßt sich auf zwei Arten zu einer Bewertungsmöglichkeit für p, q und r erweitern, je nach dem, ob man r mit w oder f bewertet. Wir erhalten insgesamt also doppelt so viele Bewertungsmöglichkeiten für drei Aussagevariablen und somit doppelt so viele Zeilen in der Wahrheitstafel:

p	q	r	$p \to q \wedge \neg r$
w	w	w	f f f
w	w	f	w w w
w	f	w	f f f
w	f	f	f f w
f	w	w	w f f
f	w	f	w w w
f	f	w	w f f
f	f	f	w f w

Eine Wahrheitstafel für eine Formel mit vier Aussagenvariablen hätte demgemäß bereits 16 Zeilen, etc. Achtung: Bevor man eine Wahrheitstafel erstellt, sollte man sich ganz klar sein, für *welche* Formel man dies tut: Im obigen Beispiel erfolgt dies nicht etwa für die Formel $((p \to q) \wedge \neg r)$, sondern vielmehr für die Formel $(p \to (q \wedge \neg r))$. Ansonsten wird man viel Arbeit umsonst leisten.

Noch eine Anmerkung: Die Reihenfolge, in der wir die verschiedenen Vorkommnisse von 'w' und 'f' links von dem senkrechten Strich in Zeilen angeordnet haben, ist keineswegs willkürlich. Man stelle sich vor, 'w' wäre wie 'a' und 'f' wäre wie 'b' im deutschen Alphabet. Dann würde man in einem Lexikon oder einem Telephonbuch 'www' vor 'wwf' einordnen, 'wwf' wiederum vor 'wfw' usw., genauso wie man etwaige Fachausdrücke oder Namen 'aaa' vor 'aab' einordnen würde, 'aab' wiederum vor 'aba' usw. Die obige Anordnung der Wahrheitswertreihen links vom senkrechten Strich nennt man daher auch *lexikographisch*.

Wir wollen nun nochmals zusammenfassen, wie man eine Wahrheitstafel für eine beliebige Formel A erstellt:

1. Man stelle fest, welche verschiedenen Aussagenvariablen in A vorkommen, und schreibe diese Aussagenvariablen in der Reihenfolge ihres Vorkommens im Alphabet in eine Reihe.

2. Daneben schreibe man die zu bewertende Formel an.

3. Handelt es sich um n verschiedene Aussagenvariablen, so gibt es 2^n verschiedene Möglichkeiten die Wahrheitswerte auf die Aussagenvariablen von A zu verteilen. Man schreibe also in 2^n Zeilen die möglichen Wahrheitswerte unter die Aussagevariablen, und zwar so, dass in der Spalte unter der ersten Aussagenvariable Folgen von ws und Folgen von fs alternieren, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2}$ hat, in der Spalte unter der zweiten Aussagenvariable wiederum Folgen von ws und Folgen von fs alternieren, wobei nun jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{4}$ hat, etc.; allgemein stehen in der Spalte unter der k-ten Aussagenvariable alternierend

Folgen von ws und Folgen von fs, wobei jede dieser Folgen die Länge $\frac{2^n}{2^k}$ besitzt.

4. Man berechne “von innen nach außen” die Wahrheitswerte für die Teilformeln von A und schließlich für die gesamte Formel A selbst. Unter dem Hauptjunktor von A läßt sich die Bewertung von A ablesen.

Wir können die Wahrheitstafeln nun auf vielfältige Weise anwenden. Wenn wir z.B. wissen wollen, unter welchen Bedingungen ein Aussagesatz wahr oder falsch ist, d.h., wie “die Welt” beschaffen sein muss, dass er mit ihr übereinstimmt bzw. nicht übereinstimmt, dann bestimmen wir seine logische Form mittels Repräsentierung und erstellen sodann für diese logische Form die Wahrheitstafel. Betrachten wir etwa den folgenden Aussagesatz:

- Wenn Herbert Heidi heiratet oder Heidi Herbert heiratet, dann heiratet Herbert Heidi und Heidi heiratet auch Herbert.

Da wir nun schon geübt im Repräsentieren sind, haben wir seine logische Form schnell herausgefunden und erkennen, dass sie nichts anderes ist als die Formel in unserem ersten Beispiel für Wahrheitstafeln auf S.102:

- $p \vee q \to p \wedge q$

Gemäß der Wahrheitstafel dieser Formel auf S.104 ist diese Formel genau dann wahr, wenn p und q denselben Wahrheitswert haben – entweder beide wahr oder beide falsch. Für unseren Aussagesatz heißt dies nun nichts anderes als, dass er genau dann wahr ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Herbert heiratet Heidi und Heidi heiratet Herbert.
- Herbert heiratet Heidi nicht und Heidi heiratet Herbert nicht.

Dies läßt sich noch einfacher ausdrücken. Wie man nämlich bei einem Vergleich der Wahrheitstafel für unsere Formel mit der Wahrheitstafel für Äquivalenzformeln auf S.56 feststellt, stimmen diese in ihrem Wertverlauf völlig überein. Unsere Formel besagt also – von einem aussagenlogischen Standpunkt betrachtet – nichts anderes als:

- $p \leftrightarrow q$

Diese beiden Formeln haben also dieselbe aussagenlogische Bedeutung, auch wenn es sich dabei um zwei ganz unterschiedliche Formeln handelt – z.B kommt in der einen Formel das Äquivalenzzeichen $\leftrightarrow$ vor, in der anderen hingegen nicht. Unser Beispielsatz von oben sagt also (soweit unsere Zwecke betroffen sind) genau dasselbe aus wie:

- Herbert heiratet Heidi genau dann, wenn Heidi Herbert heiratet.

Die bisher in diesem Kapitel betrachteten Formeln haben allesamt die Eigenschaft, dass ihre Wertverläufe sowohl ws als auch fs enthalten, dass sie also unter gewissen Umständen wahr sind und unter anderen Umständen falsch. Dies stellt in gewissem Sinne den "Normalfall" dar. Denn, wenn wir beispielsweise eine Aussage über die Welt treffen, um Informationen festzuhalten bzw. zu übermitteln, dann hängt die Wahrheit bzw. Falschheit des Aussagesatzes doch von der Beschaffenheit unserer Welt ab. Sähe die Welt anders aus, so könnte der Aussagesatz ja auch einen anderen Wahrheitswert haben, also Sätze, die tatsächlich wahr sind, könnten falsch sein, und Sätze, die tatsächlich falsch sind, könnten wahr sein. Dies gilt sowohl für den Alltag als auch für die Wissenschaften. Selbst Naturgesetze könnten in einer anderen "logisch vorstellbaren" Welt falsch sein. Alle solchen Sätze bzw. deren logische Formen, werden in der Logik als '*kontingent*' bezeichnet. Später, in Abschnitt 5.2, werden wir diesen Begriff der Kontingenz exakt festlegen.

Es gibt aber auch Aussagesätze, die unabhängig davon, wie die Welt beschaffen ist, "immer wahr" oder auch "immer falsch" sind. Solche Sätze sind also aus rein logischen Gründen wahr oder falsch. Sehen wir uns dazu das folgende Beispiel an:

- Heute ist Dienstag oder auch nicht.

Wenn wir diesen Satz in der Sprache der Aussagenlogik repräsentieren, dann erhalten wir:

- $p \vee \neg p$

Die Wahrheitstafel für diese Formel sieht dann wie folgt aus:

p	$p \vee \neg p$
w	w f
f	w w

Wie wir sehen, besteht der Wertverlauf dieser Formel aus lauter ws. Entsprechend ist der obige Aussagesatz unabhängig davon, ob heute Dienstag ist oder nicht, wahr. Sehen wir uns noch ein weiteres Beispiel ähnlicher Art an:

- Wenn es jetzt weder regnet noch schneit, dann ist es nicht so, dass es jetzt regnet oder schneit.

Die logische Form dieses Satzes ist:

- $\neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg(p \vee q)$

Das Antezedens des Implikationssatzes ist ein Satz der Form ‘Weder A noch B’, und solche Sätze haben als logische Form $\neg A \wedge \neg B$, da ja durch das ‘weder … noch’ die beiden Teilsätze A und B verneint werden. Und die entsprechende Wahrheitstafel sieht nun so aus:

$$\begin{array}{cc|cccccc} p & q & \neg p & \wedge & \neg q & \rightarrow & \neg & (p \vee q) \\ \hline w & w & f & f & f & w & f & w \\ w & f & f & f & w & w & f & w \\ f & w & w & f & f & w & f & w \\ f & f & w & w & w & w & w & f \end{array}$$

Solche Sätze und ihre logischen Formen werden wir in Abschnitt 5.2 als *tautologisch* definieren. Tautologien sind in jeder “möglichen Welt” wahr, Tautologien bleiben sogar wahr, wenn man die Bedeutung sämtlicher in ihnen vorkommenden deskriptiven Zeichen variiert. Wenn etwa ‘regnen’ soviel wie ‘hageln’ bedeuten würde, und ‘schneien’ soviel wie ‘stürmen’, dann würde unser letzter Beispielsatz soviel besagen wie

- Wenn es jetzt weder hagelt noch stürmt, dann ist es nicht so, dass es jetzt hagelt oder stürmt

und wäre selbstverständlich wiederum wahr, ja sogar tautologisch. Tautologien sind daher die *logischen Gesetze* der Aussagenlogik, ihre Wahrheit rührt allein daher, wie wir die Bedeutung der logischen Zeichen festgelegt haben. Während beispielsweise Physiker die Gesetze zu entdecken trachten, die in *unserer* (tatsächlichen oder aktualen) Welt wahr sind, beschäftigen sich Logiker mit Gesetzen, die nicht nur in unserer Welt wahr sind, sondern aus rein logischen Gründen wahr sein *müssen* – in allen *logisch möglichen* Welten wahr sind.

Wir haben oben schon erwähnt, dass es auch Sätze gibt, die “immer falsch” sind. Sehen wir uns auch dazu Beispiele an:

- Die Zahl 3 ist weder gerade noch ungerade.

Die aussagenlogische Form dieses Aussagesatzes ist:

- $\neg p \wedge \neg\neg p$

Die Aussagenvariable p steht in diesem Fall für den Teilsatz ‘Die Zahl 3 ist gerade’. Der zweite Teilsatz ‘Die Zahl 3 ist ungerade’ ist nichts anderes als die Negation des ersten Teilsatzes und hat daher die logische Form $\neg p$. Die Wahrheitstafel für diese Formel sieht nun so aus:

p	$\neg p \wedge \neg\neg p$
w	$f \quad f \; w f$
f	$w \quad f \; f w$

Wie wir sehen, enthält der Wertverlauf dieser Formel ausschließlich fs. D.h., unser Ausgangssatz ist falsch, unabhängig davon ob die Zahl drei gerade oder ungerade ist.

Betrachten wir gleich noch ein Beispiel von dieser Art:

- Weder schneit es jetzt, noch regnet es, aber es schneit oder regnet.

Dieser Satz wird nun repräsentiert als:

- $(\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)$

Wenn wir die Wahrheitstafel dafür erstellen, erhalten wir:

p	q	$(\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)$
w	w	$f \; f \; f \quad f \quad w$
w	f	$f \; f \; w \quad f \quad w$
f	w	$w \; f \; f \quad f \quad w$
f	f	$w \; w \; w \quad f \quad f$

Es ist freilich nicht verwunderlich, dass der Wertverlauf unseres Ausgangssatzes lauter fs enthält, da man bei näherer Betrachtung erkennt, dass er nichts anderes ausdrückt als die Verneinung unseres früheren Beispielsatzes

- Wenn es jetzt weder regnet noch schneit, dann ist es nicht so, dass es jetzt regnet oder schneit.

Wenn letzterer "immer wahr" ist, wie wir ja schon festgestellt haben, muss ersterer zwangsläufig "immer falsch" sein.

Sätze und deren logische Formen, die einen Wertverlauf mit lauter fs aufweisen, werden wir in Abschnitt 5.2 als *kontradiktorisch* definieren. Es ist deshalb so wichtig, dass wir wissen, welche Sätze Kontradiktionen sind, da wir es tunlichst vermeiden sollten, in der Wissenschaft und in der Philosophie (aber natürlich auch im Alltag), Kontradiktionen zu behaupten. Wissenschaftliche oder philosophische Theorien, die Kontradiktionen enthalten, sind in jedem Fall zu verwerfen, da sie eben Sätze enthalten, die in jedem Fall falsch sein müssen, ganz unabhängig davon, wie die Welt beschaffen ist. Man sollte deshalb niemals solche Widersprüche behaupten bzw. Theorien aufstellen, die Widersprüche enthalten.

5.1.2 Wahrheitstafeln für Argumente und Argumentformen

Auf Seite 87 haben wir das Argument (Arg.3) repräsentiert und dabei folgende Argumentform erhalten:

$$p \vee q, \neg p \therefore q$$

Von einem Argument bzw. einer Argumentform zu sagen, es bzw. sie wäre wahr oder falsch, ist völlig unsinnig, denn es handelt sich dabei ja nicht um Aussagesätze bzw. mit w oder f bewertbare Formeln. Freilich sind die Prämissen und die Konklusion eines Arguments bzw. einer Argumentform wahr oder falsch in diesem Sinne (gegeben die Aussagenvariablen in einer Argumentform sind bereits bewertet worden). Argumente bzw. Argumentformen hingegen sind *logisch gültig* oder *logisch ungültig*: Gültig sind sie, wenn die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion logisch zwingend nach sich zieht, und ungültig sonst. Für unser Beispiel heißt dies, dass die Argumentform $p \vee q, \neg p \therefore q$ genau dann gültig ist, wenn Folgendes der Fall ist: Wann immer $p \vee q$ und $\neg p$ wahr sind, ist auch q wahr. Mit Hilfe einer Wahrheitstafel können wir nun überprüfen, ob dies in unserem Beispiel der Fall ist. In einer solchen Wahrheitstafel kommt neben den in der Argumentform vorkommenden Aussagenvariablen im allgemeinen nicht nur *eine* weitere Formel vor, sondern sämtliche Prämissen und die Konklusion. Wir schreiben also neben die Aussagenvariablen zuerst alle Prämissen und sodann die Konklusion. Wir haben es demnach mit einer Wahrheitstafel zu tun, die gleich mehrere Formeln auf einmal bewertet:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	q
w	w	w	f	w
w	f	w	f	f
f	w	w	w	w
f	f	f	w	f

Wir sehen, dass es in dieser Wahrheitstafel keine einzige Zeile gibt, in der sämtliche Prämissen mit w bewertet werden, die Konklusion jedoch mit f. Die einzige Zeile, in der beide Prämissen wahr sind, ist nämlich die dritte, und in dieser wird die Konklusion q ebenfalls mit w bewertet. Daher ist unsere Argumentform (sowie auch das durch sie repräsentierte Argument) aussagenlogisch gültig. Wenn ein Argument aussagenlogisch gültig ist, dann bedingt die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion, unabhängig davon, wie die Welt beschaffen ist, und unabhängig davon, wie die deskriptiven Zeichen, die im Argument vorkommen, interpretiert werden. Wenn etwa 'der Papst' soviel wie 'Heidi' bedeuten würde, 'kommen nach' soviel wie 'heiraten', 'Sommer' soviel wie 'Winter', 'Wien' soviel wie 'Hubert' und 'Salzburg' soviel wie 'Herbert', dann würde (Arg. 3) von Seite 65 soviel besagen wie

> Heidi heiratet nächsten Winter Hubert oder Herbert.
>
> Heidi heiratet aber nächsten Winter Hubert nicht.
>
> ---
>
> Daher: Heidi heiratet nächsten Winter Herbert.

Und dieses Argument ist natürlich immer noch logisch gültig. Man erkennt daran, dass für die logische Gültigkeit bzw. Ungültigkeit eines Argumenten ausschließlich die logische *Form* des Argumentes eine Rolle spielt, nicht wie die "Leerstellen" dieser Form – die Aussagenvariablen – "gefüllt" oder interpretiert werden.

Wir können uns aber auch auf eine andere Art und Weise davon überzeugen, dass eine Argumentform gültig ist, indem wir nämlich sämtliche Zeilen betrachten, in denen die Konklusion mit f bewertet wird. Wenn in all diesen Zeilen auch mindestens eine Prämisse mit f bewertet wird, so ist die Argumentform gültig, sonst ungültig. Denn dann ist es wiederum so, dass die gemeinsame Wahrheit der Prämissen nicht mit der Falschheit der Konklusion einhergehen kann.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

> Wenn der Gärtner der Mörder ist, dann liegt Erde am Tatort.
>
> Es liegt Erde am Tatort.
>
> ---
>
> Also ist der Gärtner der Mörder.

Wie leicht ersichtlich ist, ist die logische Form dieses Argumentes:

- $p \rightarrow q, q \therefore p$

Die Wahrheitstafel dieser Argumentform sieht dann wie folgt aus:

p	q	$p \rightarrow q$	q	p
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

In der dritten Zeile dieser Wahrheitstafel wird den Prämissen der Wert w zugeordnet, der Konklusion hingegen der Wert f. Es gibt also mindestens eine Zeile, in der alle Prämissen wahr, die Konklusion jedoch falsch ist. Diese Argumentform und somit auch das obige Argument sind also aussagenlogisch ungültig. Auch wenn das Argument auf den ersten Blick gültig zu sein scheint und dies auch im Alltag oft unterstellt wird, sagt uns nun die aussagenlogische Analyse, dass es doch nicht in jedem Falle von wahren Prämissen zu einer wahren Konklusion führt. Denn es wäre ja durchaus möglich, dass die Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist, d.h. es liegt tatsächlich Erde am Tatort, aber der Gärtner ist doch nicht der Mörder. In diesem Falle ist auch die erste Prämisse wahr, da ja deren Antezedens falsch ist und zudem auch noch deren Konsequens wahr ist. Auch wenn ein Argument dieser Form in vielen Fällen von wahren Prämissen zu einer wahren Konklusion führen mag, so gibt es doch offensichtlich Ausnahmen, und alleine diese reichen hin, um das Argument und dessen logische Form als *logisch* ungültig auszuweisen. Logiker haben daher spaßhalber obiger beliebter ungültiger Argumentform einen eigenen Namen gegeben, nämlich '*Modus moron*'.

Sehen wir uns noch ein Beispiel an:

> Wenn Herbert die Metaphysikprüfung besteht, so veranstaltet er, falls Heidi nicht bei der Ethikprüfung durchfällt, eine Party.
>
> Heidi fällt aber bei der Ethikprüfung keinesfalls durch, und Herbert besteht die Metaphysikprüfung.
>
> ---
>
> Also veranstaltet Herbert eine Party.

Die Form dieses Arguments ist:

- $p \to (\neg q \to r), \neg q \land p \therefore r$

Mittlerweile können wir selbst Wahrheitstafeln für solch etwas komplexere Argumentformen leicht erstellen:

p	q	r	$p \to (\neg q \to r)$			$\neg q \land p$		r
w	w	w	w	f	w	f	f	w
w	w	f	w	f	w	f	f	f
w	f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w	w	f
f	w	w	w	f	w	f	f	w
f	w	f	w	f	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w	f	w
f	f	f	w	w	f	w	f	f

In dieser Wahrheitstafel gibt es genau eine Zeile, nämlich die dritte, in der sämtliche Prämissen wahr sind; in dieser Zeile ist aber auch die Konklusion wahr. Daher ist die Argumentform logisch gültig. Freilich haben nicht alle Wahrheitstafeln von gültigen Argumentformen immer nur *eine* Zeile, in der alle Prämissen wahr sind. Oftmals gibt es auch mehrere, wie man an dem folgenden simplen Beispiel sehen kann: Die Wahrheitstafel für die Argumentform

- $p \therefore p \vee q$

ist nämlich:

p	q	p	$p \vee q$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Und die Argumentform ist daher wiederum gültig, wie man an den ersten beiden Zeilen der Wahrheitstafel unschwer feststellen kann.

Der Begriff der Gültigkeit von Argumenten und deren Formen, den wir in 5.2 genau festlegen werden, ist deshalb so wichtig, weil Wissenschafter im allgemeinen ihre Behauptungen durch Argumente zu stützen versuchen, und dieser Versuch oftmals nur dann erfolgreich ist, wenn diese Argumente auch logisch gültig sind. Übrigens wird dieses Prinzip in der sogenannten "induktiven Logik" insofern "aufgeweicht", als dort eine Argumentation unter Umständen auch dann als erfolgreich angesehen wird, wenn sie zwar nicht logisch gültig ist, aber die Prämissen der Konklusion immerhin eine hohe Wahrscheinlichkeit verleihen. Diese induktive Logik soll uns in diesem Buch aber nicht weiter beschäftigen, da sie nicht zur "klassischen" *deduktiven* Logik gehört. Die klassische Logik, die im Zentrum unserer Betrachtungen steht, stellt aber auch die Grundlage dar, auf der dann in der induktiven Logik weitergerarbeitet wird.[2]

[2] Für eine Einführung in die Induktive Logik siehe [11].

5.2 Eine formale Semantik für die Aussagenlogik

Die Wahrheitstafelmethode liefert uns ein berechenbares Entscheidungsverfahren, das es uns erlaubt, gewisse Eigenschaften von aussagenlogischen Formeln – wie die der Tautologizität – sowie gewisse Eigenschaften von Argumentformen – wie die der logischen Gültigkeit – für vorgegebene Formeln bzw. Argumentformen zu entscheiden. Die zugrundeliegenden semantischen Begriffe des Tautologischseins oder der logischen Gültigkeit sind dabei jedoch noch nicht ausreichend präzise von uns erfasst worden. Wir wollen nun die semantischen Intuitionen, die wir bisher informell durch Bezugnahme auf Spalten oder Zeilen der Wahrheitstafeln ausgedrückt haben, in exakte Definitionen gießen. Dazu ist es nötig, sich formaler Ausdrucksweisen in der *Metasprache* zu bedienen: Wie bereits erklärt, ist die Metasprache in unserem Falle diejenige Sprache, in der wir über die Sprache der Aussagenlogik – unsere Objektsprache – sprechen. Bei dieser Metasprache handelt es sich um die deutsche Sprache, angereichert durch einige Ausdrücke der Mathematik. Zuerst möchten wir metasprachlich präzisieren, was es heißt, einem deskriptiven Zeichen einen semantischen Wert zuzuordnen (weshalb wir es hier auch mit *Semantik* zu tun haben). Für die Aussagenlogik bedeutet dies, jeder Aussagenvariable einen Wahrheitswert zuzuweisen. Anschließend möchten wir zeigen, wie wir aufgrund der von uns festgelegten Bedeutung der logischen Zeichen auf Basis der Bewertungen der Aussagenvariablen *jeder* Formel der aussagenlogischen Sprache ebenfalls einen Wahrheitswert zuordnen können. Schließlich können wir auf dieser Basis die logischen Eigenschaften und Beziehungen der aussagenlogischen Semantik genauso exakt definieren, wie Begriffe in der Mathematik definiert werden.

5.2.1 Aussagenlogische Interpretationen

Wir wollen nun also *jeder* Aussagenvariable *genau einen* Wahrheitswert zuordnen, so wie wir das informell in den Wahrheitstafeln bereits getan haben. Genauer gesagt konnten wir jede Zeile der Wahrheitstafel für eine Formel A nur relativ zu einer Zuordnung der Wahrheitswerte w oder f zu den in A vorkommenden Aussagenvariablen bestimmen. In der Mathematik nennt man eine solche Zuordnung, die *jedem* Element eines gegebenen "Definitionsbereichs" *genau ein* Element eines gegebenen "Wertebereichs" zuweist, eine *Funktion*. Zur vollständigen Angabe einer Funktion gehört also die Festlegung des Definitionsbereichs – das ist die Menge der sogenannten Argumente der Funktion –, des Wertebereichs – das ist die Menge derjenigen Dinge, die der Funktion als Werte dienen können – sowie die Festlegung einer Zuordnungsregel, die uns sagt, welcher Wert welchem Argument zugeordnet wird. Übrigens wird in der sogenannten Mengentheorie dieser Funktionsbegriff noch um einiges exakter und abstrakter entwickelt. Wir werden zwar in Zukunft immer wieder ein wenig Mengentheorie anwenden, doch nur so weit dies für unsere Zwecke erforderlich ist und ohne die Mengentheorie systematisch aufzubauen – dies ist ja ein Skript über die klassische Logik und nicht über die Mengentheorie.[3] Wenn man ausdrücken will, dass f eine Funktion vom Definitionsbereich X in den Wertebereich Y ist, schreibt man das oft wie folgt an:

$$f : X \to Y$$

Eine aussagenlogische Interpretation hat nun als Definitionsbereich die Menge

$$\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

der Aussagenvariablen und als Wertebereich die Menge $\{w, f\}$ der Wahrheitswerte. Wir können also festlegen:

> Eine *aussagenlogische Interpretation* ist eine Funktion $\mathfrak{I}$, sodass:
>
> $$\mathfrak{I} : \{p_1, p_2, p_3, \ldots\} \to \{w, f\}$$

Damit wird lediglich ausgedrückt, dass eine aussagenlogische Interpretation $\mathfrak{I}$ jeder Aussagenvariable einen eindeutig bestimmten Wahrheitswert zuordnet. Zum Beispiel könnte $\mathfrak{I}(p_1) = w$ sein, $\mathfrak{I}(p_2) = f$, $\mathfrak{I}(p_3) = f$, $\mathfrak{I}(p_4) = w$ und so weiter. Eine aussagenlogische Interpretation nimmt in der Tat zugleich *unendlich* viele Zuordnungen vor, da es ja unendlich viele Aussagenvariablen gibt, die durch eine solche Interpretationsfunktion einen Wahrheitswert erhalten. Dass eine aussagenlogische Interpretation $\mathfrak{I}$ eine *Funktion* ist, schließt aus, dass ein und dieselbe Aussagenvariable zugleich mehr als einen Wert unter ein und derselben Interpretation $\mathfrak{I}$ aufweist. Aber selbstverständlich dürfen durch $\mathfrak{I}$ verschiedene Aussagenvariablen zugleich denselben Wert zugewiesen bekommen: Zum Beispiel heißt, dass $\mathfrak{I}(p_1) = w$ und $\mathfrak{I}(p_4) = w$ der Fall sind, dass sowohl p_1 als auch p_4 (wie eventuell auch noch weitere Aussagevariablen) denselben Wahrheitswert w durch $\mathfrak{I}$ zugeordnet bekommen.

Intuitiv entsprechen aussagenlogische Interpretationen den Zeilen einer Wahrheitstafel, wenn man sich in den Wahrheitstafeln nur auf die Zuordnungen von Wahrheitswerten zu den Aussagenvariablen konzentriert, und man außerdem ignoriert, dass in einer Wahrheitstafel immer nur endlich viele Aussagenvariablen bewertet werden, während ja eine aussagenlogische Interpretation zugleich alle (unendlichen vielen) Aussagenvariablen mit einem Wahrheitswert versieht.

[3] Eine gute systematische Einführung in die Mengentheorie bietet etwa [14].

5.2.2 Aussagenlogische Bewertungen

Die Wahrheitstafeln haben uns bereits gezeigt, dass wir beliebige aussagenlogische Formeln auf eine eindeutige Art und Weise bewerten können, wenn wir alle Aussagenvariablen, die in der Formel vorkommen, bereits mit Wahrheitswerten interpretiert haben. Dies spiegelt sich nun in unserer formalen Semantik insofern wider, als wir zu jeder aussagenlogischen Interpretation $\mathfrak{I}$ – die, wie gesagt, die Bewertung der *Aussagenvariablen* in der Wahrheitstafel wiedergibt – auf eindeutige Art und Weise eine aussagenlogische Bewertung $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ angeben können, die wiederum jeder *beliebigen Formel* aus $\mathcal{F}$ genau einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet. Der Definitionsbereich einer Bewertung ist also nun die *gesamte* Formelmenge $\mathcal{F}$, und der Wertebereich ist abermals die Menge $\{w, f\}$. Der Index '$\mathfrak{I}$' in '$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$' wird andeuten, dass die Bewertung $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ nur relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$ gegeben ist, und dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ nach Angabe von $\mathfrak{I}$ eindeutig bestimmt ist (wie sich leicht beweisen lässt). Wir definieren also:

> Eine *aussagenlogische Bewertung* (relativ zur Interpretation $\mathfrak{I}$) ist eine Funktion $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}} : \mathcal{F} \to \{w, f\}$, sodass gilt:
>
> 1. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p_i) = w$ gdw $\mathfrak{I}(p_i) = w$,
> 2. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg A) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = f$,
> 3. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \wedge B)) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = w$ und $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = w$,
> 4. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \vee B)) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = w$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = w$,
> 5. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \to B)) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = f$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = w$,
> 6. $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}((A \leftrightarrow B)) = w$ gdw $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B)$.

Die Klauseln 1–6 werden auch 'semantische Regeln' genannt. Regel 1 besagt, dass die Aussagenvariablen durch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ genauso bewertet werden, wie es durch die Interpretation $\mathfrak{I}$ vorgegeben ist. In den Regeln 2 bis 6 werden die komplexen aussagenlogisch zerlegbaren Formeln auf genau dieselbe Weise bewertet, wie wir dies in den Wahrheitstafeln für die aussagenlogischen Junktoren erklärt haben.

Sehen wir uns dazu gleich ein Beispiel an: Wenn wir den Wahrheitswert von

- $p \to q \wedge \neg r$

feststellen wollen, so müssen wir immer eine bestimmte Interpretation $\mathfrak{I}$ gegeben haben – welche wir freilich willkürlich aussuchen dürfen; hätten wir keine solche Interpretation gegeben, so würde es überhaupt keinen Sinn machen, von *dem* Wahrheitswert der Formel zu sprechen. Sei $\mathfrak{I}$ nun eine Interpretation, für die Folgendes gilt:

- $\mathfrak{I}(p) = w, \mathfrak{I}(q) = w, \mathfrak{I}(r) = f$.

Damit ist aber unsere Interpretation $\mathfrak{I}$ eigentlich noch nicht vollständig festgelegt, denn wir müßten ja auch all die anderen unendlich vielen Aussagenvariablen interpretieren. Für unsere Zwecke reicht diese endliche Festlegung aber völlig aus, da ja die Bewertung von $p \to q \wedge \neg r$ nur von der Interpretation von p, q und r abhängt – der Wahrheitswert der anderen Aussagenvariablen ist für die Bewertung der uns interessierenden Formel irrelevant. Da wir uns nun für *eine* Interpretation entschieden haben, ist auch der Wahrheitswert der Gesamtformel *eindeutig* bestimmt: Da $\mathfrak{I}(r) = f$, ist es natürlich der Fall, dass

- $\mathfrak{I}(r) \neq w$.

Somit gilt gemäß Klausel 1 unserer Bewertungsdefinition, dass

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(r) \neq w$.

Da aber $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ nach Definition eine Funktion ist, die nur die Werte w und f annehmen kann, heißt die letzte Zeile nichts anderes als

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(r) = f$.

Und somit gilt gemäß Klausel 2:

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(\neg r) = w$.

Da außerdem $\mathfrak{I}(q) = w$, ist gemäß Klausel 1 auch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(q) = w$ der Fall, und somit dürfen wir aufgrund von Klausel 3 behaupten:

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(q \wedge \neg r) = w$.

(Wir haben dabei wieder eine Klammerersparnisregel angewandt.)

So wie bei q ergibt sich auch, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p) = w$. Wir haben nun die Wahrheitswerte des Antezedens und des Konsequens unserer Implikationsformel ermittelt, und gemäß Klausel 5 gilt:

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p \to q \wedge \neg r) = w$.

Dies entspricht der zweiten Zeile in der Wahrheitstafel dieser Formel, welche wir auf S.105 erstellt haben.

Hätten wir aber beispielsweise festgelegt, dass

- $\mathfrak{I}(p) = w, \mathfrak{I}(q) = w, \mathfrak{I}(r) = w$,

dann wäre die Bewertung unserer Formel wie folgt ausgefallen:

- $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p \to q \land \neg r) = f$.

Und dies entspräche dann der ersten Zeile unserer damaligen Wahrheitstafel.

Unsere Definition von $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ gibt also in formaler Sprechweise wieder, wie wir intuitiv gelernt haben, unsere Wahrheitstafeln anzufertigen. Streng genommen stellt sich die Situation aber eigentlich umgekehrt dar: Die Wahrheitstafeln stellen eine einfache Methode dar, um die Werte von $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ für beliebige Interpretationen $\mathfrak{I}$ ermitteln zu können; die Wahrheitstafeln geben also wieder, was in der Definition exakt erfasst ist. Didaktisch sind die Wahrheitstafeln der Definition von $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}$ zwar vorrangig, in logischer oder systematischer Hinsicht jedoch ist es gerade umgekehrt.

Noch eine (hoffentlich!) philosophisch interessante Anmerkung zu den obigen semantischen Regeln: Wie man unschwer erkennen kann, verwenden wir z.B. zur Angabe der semantischen Regel 3. für Konjunktionsformeln auf der rechten Seite von 3. den sprachlichen Ausdruck 'und'. Das heißt: Wir verwenden *aussagenlogische Verknüpfungen*, um die semantischen Regeln für *aussagenlogische Verknüpfungen* anzugeben. Ist das nicht zirkulär? Nein: Denn die jeweiligen Verknüpfungen gehören verschiedenen Sprachen an. So verwenden wir das metasprachliche (deutsche) 'und', um die semantische Regel für das objektsprachliche (aussagenlogische) $\land$ festzulegen. Und wenn wir die Semantik eines Zeichen einer künstlich von uns "geschaffenen" Sprache angeben wollen, ist es auch ganz unvermeidlich, dies auf Basis unseres Vorverständnisses der natürlichen Sprache zu tun: Wie sollten wir denn sonst die Bedeutung von $\land$ erklären, als mit Hilfe (in unserem Falle) der deutschen Sprache?

Wie bei allen anderen Büchern in allen anderen Wissenschaftsgebieten sind auch wir gezwungen, beim Leser ein solches Vorverständnis einer natürlichen Sprache vorauszusetzen, bevor wir die von uns angestrebte Theorie (bei uns die Theorie der Logik) entwickeln können. Auf dieses Vorverständnis von 'und' bauen wir, wenn wir eine semantische Regel wie 3. formulieren. Analoges gilt für die anderen semantischen Regeln. Sobald sich beim Leser nach dem genauen Durcharbeiten dieses Buches ein Verständnis für $\land$ und für die anderen Zeichen unserer logischen Kunstsprachen eingestellt hat, dürfen wir dann auch diese "Leiter" des natursprachlichen Vorständnisses – jedenfalls für diesen Zweck – zur Seite stellen (ein Wittgensteinsches Bild). Es ist auch gar nicht problematisch, wenn das Studium z.B. des $\land$ auf des Lesers Verständnis des natursprachlichen 'und' sozusagen "zurückwirkt". Im Gegenteil: Dies ist sogar intendiert. Denn obwohl die Bedeutung von $\land$ zunächst auf Basis eines mehr oder weniger vagen Vorverständnisses von 'und' festgelegt wurde, kann dennoch aus der Einbettung dieses intuitiven Vorverständnisses in eine größere, explizitere und in vielen Teilen mathematisch präzise Theorie auch ein schärferes Verständnis von 'und' resultieren. Dies ist letztlich genau das, was wir durch das logische Repräsentieren von z.B. 'und' durch $\wedge$ erreichen wollen.

5.2.3 Kontingente, tautologische und kontradiktorische Formeln

Entsprechend können wir nun unsere im Kapitel 5.1 informell eingeführten Begriffe 'kontingent', 'tautologisch' und 'kontradiktorisch' mit Hilfe des Begriffs der Bewertung exakt definieren:

- Eine Formel A aus $\mathcal{F}$ ist *kontingent* gdw

  1. es mindestens eine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, so dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = w$, und
  2. es mindestens eine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, so dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = f$.

Eine Formel A ist also kontingent, wenn A bei mindestens einer Verteilung von Wahrheitswerten auf die in A vorkommenden Aussagenvariablen den Wert w erhält und bei mindestens einer Verteilung von Wahrheitswerten auf die in A vorkommenden Aussagenvariablen den Wert f erhält; wenn es also in der zu A gehörigen Wahrheitstafel eine Zeile gibt, in der w unter dem Hauptjunktor von A steht, und es auch eine Zeile gibt, in der f unter dem Hauptjunktor von A steht. Weiters:

- Eine Formel A aus $\mathcal{F}$ ist *tautologisch* gdw

  für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = w$.

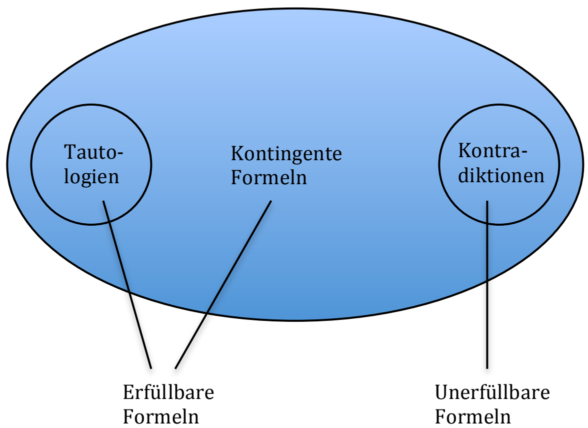
Eine Formel A ist also tautologisch, wenn A bei jeder Verteilung der Wahrheitswerte auf die in A vorkommenden Aussagenvariablen den Wert w erhält, wenn also die Wahrheitstafel von A in der Spalte unter dem Hauptjunktor von A nur ws aufweist. Schließlich:

- Eine Formel A aus $\mathcal{F}$ ist *kontradiktorisch* gdw

  für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = f$.

Eine Formel A ist also kontradiktorisch, wenn A bei jeder Verteilung der Wahrheitswerte auf die in A vorkommenden Aussagenvariablen den Wert f erhält, wenn also die Wahrheitstafel von A in der Spalte unter dem Hauptjunktor von A nur fs aufweist.

Wir wollen diejenigen Formeln, für die überhaupt die "Möglichkeit" existiert, wahr zu sein, d.h. die kontingenten und tautologischen Formeln, '*aussagenlogisch erfüllbar*' nennen; alle anderen Formeln, die aus logischen Gründen falsch sein "müssen", d.h. die kontradiktorischen Formeln, nennen wir '*aussagenlogisch unerfüllbar*'. Wir können uns dies wie folgt veranschaulichen:



Wir haben oben gesagt, dass die Tautologien für den (Aussagen-)Logiker das sind, was die Naturgesetze für den Physiker sind, nämlich die allgemeinen Gesetze seines Wissenschaftsgebiets – Tautologien sind die *(aussagen-)logischen Gesetze*.

Um einen besseren Überblick über die verschiedenen Tautologien zu bekommen, ist es nützlich festzustellen, welche Tautologien syntaktisch gleich aufgebaut sind und welche nicht. Beispielsweise haben ja die folgenden Tautologien dieselbe syntaktische Struktur:

- $p \lor \neg p$
- $q \lor \neg q$
- $(p \to q \land r) \lor \neg(p \to q \land r)$

Anders ausgedrückt: Für jede *beliebige* Formel A ist

- $A \lor \neg A$

eine Tautologie. Das heißt, dass wir für die Metavariable 'A' in diesem *Schema* irgendeine Formel einsetzen können und in jedem Fall werden wir dabei eine Tautologie erhalten. Wir können also durch die Angabe eines Schemas wie $A \lor \neg A$ mit einem Streich unendlich viele Tautologien erfassen.

Wir geben nun eine Liste wichtiger Tautologienschemata der Aussagenlogik an, wobei 'A', 'B', 'C' Metavariablen für aussagenlogische Formeln sind:[4]

[4]Manche dieser Tautologienschemata sind ungültig in sogenannten "nicht-klassischen" Logiken; z.B. sind nicht alle Instanzen von $A \lor \neg A$ logisch wahr in der *intuitionistischen*

T1 $A \vee \neg A$ (*Tertium non datur*, "Satz" vom ausgeschlossenen Dritten)

T2 $\neg(A \wedge \neg A)$ ("Satz" vom ausgeschlossenen Widerspruch)

T3 $A \rightarrow A$ (Reflexivität der materialen Implikation)

T4 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Paradoxie der materialen Implikation)

T5 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (Noch eine Paradoxie der materialen Implikation)

T6 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ (Antezedensvertauschung)

T7 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ (Importation/Exportation)

T8 $A \wedge \neg A \rightarrow B$ (*Ex falso quodlibet*, *Ex contradictione quodlibet*)

T9 $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ (*Reductio ad absurdum*)

T10 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ("Dreierschluß")

T11 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ("Kettenschluß")

T12 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$

T13 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$

T14 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C))$

T15 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C))$

T16 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (Peircesche Gesetz)

T17 $A \wedge (B \vee \neg B) \leftrightarrow A$

T18 $A \vee (B \wedge \neg B) \leftrightarrow A$

T19 $A \leftrightarrow \neg\neg A$ (Doppelte Negation)

T20 $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ (Kommutativität der Konjunktion)

T21 $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ (Kommutativität der Disjunktion)

T22 $A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ (Assoziativität der Konjunktion)

T23 $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ (Assoziativität der Disjunktion)

T24 $A \leftrightarrow A \wedge A$ (Idempotenz der Konjunktion)

T25 $A \leftrightarrow A \vee A$ (Idempotenz der Disjunktion)

T26 $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributivgesetz 1)

T27 $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributivgesetz 2)

T28 $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (Kontrapositionsgesetz)

T29 $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (De Morgansches Gesetz 1)

T30 $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (De Morgansches Gesetz 2)

T31 $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$ ("Definition" der materialen Implikation)

T32 $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (Noch eine "Definition" der materialen Implikation)

T33 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ("Definition" der materialen Äquivalenz)

T34 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Noch eine "Definition" der materialen Äquivalenz)

T35 $\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow B)$

Aussagenlogik. Siehe [8].

5.2.4 Logische Folge und logische Äquivalenz

Wie wir früher schon bemerkt haben, gibt es neben den logischen Eigenschaften von Sätzen und Formeln eine ganz fundamentale logische Beziehung zwischen Sätzen bzw. Formeln, nämlich die der *logischen Folge* bzw. *logischen Implikation*. Wir möchten in unserer aussagenlogischen Semantik nun genau festlegen, was es denn heißt, dass eine Formel B aus einer Formel A *logisch folgt* bzw. (was gleichbedeutend ist), dass die Formel A die Formel B *logisch impliziert*. Wir meinen damit, dass die Wahrheit von B mit der Wahrheit von A nicht "rein zufällig" verknüpft ist, sondern mit logischer Notwendigkeit: Wenn A wahr ist, so *muss* B wahr sein; oder anders ausgedrückt: Wenn A wahr ist, so *kann* B *nicht* falsch sein. Wir können diese Intuition in unserer aussagenlogischen Semantik wie folgt exakt fassen:

- Für alle Formeln A und B aus $\mathcal{F}$ gilt: A *impliziert (aussagen-)logisch* B (bzw. B *folgt logisch aus* A) genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt:

  Wenn $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = w$, dann $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = w$.

Eine dazu äquivalente Formulierung ist die folgende:

- Für alle Formeln A und B aus $\mathcal{F}$ gilt: A impliziert (aussagen-)logisch B (bzw. B folgt logisch aus A) genau dann, wenn es keine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, sodass gilt:

  $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A) = w$ und $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = f$.

Üblicherweise wird 'impliziert logisch' (bzw. 'folgt logisch aus') mit dem Symbol '$\models$' abgekürzt, so dass wir statt 'A impliziert logisch B' (bzw. 'B folgt logisch aus A') in Hinkunft oft einfach '$A \models B$' schreiben werden.

Auf analoge Weise lässt sich definieren, was es heißt, dass eine *Menge* von Formeln $A_1, \ldots, A_n$ der aussagenlogischen Sprache eine Formel B der aussagenlogischen Sprache logisch impliziert:

- Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n$ und B aus $\mathcal{F}$ gilt: $A_1, \ldots, A_n$ *implizieren (aussagen-)logisch* B (bzw. B *folgt logisch aus* $A_1, \ldots, A_n$) genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt:

  Wenn $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A_1) = w, \ldots, \mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A_n) = w$, dann $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(B) = w$.

Eine dazu äquivalente Formulierung ist wieder die folgende:

- Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n$ und B aus $\mathcal{F}$ gilt: $A_1, \ldots, A_n$ implizieren (aussagen-)logisch B (bzw. B folgt logisch aus $A_1, \ldots, A_n$) genau dann, wenn es keine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, sodass gilt:

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_1) = w, \ldots, \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_n) = w \text{ und } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = f.$$

Wieder werden wir oft 'implizieren logisch' (bzw. 'folgt logisch aus') mit dem Symbol '$\models$' abkürzen, sodass wir statt '$A_1, \ldots, A_n$ implizieren logisch B' in Hinkunft oft einfach '$A_1, \ldots, A_n \models B$' schreiben. Obwohl wir keine Mengenklammern um '$A_1, \ldots, A_n$' setzen werden, sollte man sich doch stets vergegenwärtigen, dass hier nur ausgesagt wird, dass die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ *zusammengenommen* – als Menge – die Formel B logisch implizieren. Wann immer *alle* der Formeln $A_1, \ldots, A_n$ *simultan* bei einer aussagenlogischen Bewertung wahr sind, ist auch B wahr. Die Wahrheit bloß einer oder einiger der Formeln $A_1, \ldots, A_n$ muss nicht für die Wahrheit von B hinreichen.

Hier sind zwei einfache Beispiele, die diese Definitionen illustrieren sollen. Stellen wir uns erstens vor, wir interessieren uns für die Frage, ob z.B. die Formel p die Formel q logisch impliziert: Ist es also der Fall, dass $p \models q$? Die obige Definition – egal in welcher der beiden zueinander äquivalenten Varianten – sagt uns zunächst nur, was der Fall sein muss, damit $p \models q$ der Fall ist. Dies ist so ähnlich wie in der Mathematik, wenn der Begriff Primzahl definiert wird: Dies legt nur fest, was der Fall sein muss, damit eine bestimmte Zahl als Primzahl gilt; die Definition selbst jedoch beantwortet die Frage nicht, ob eine bestimmte Zahl nun tatsächlich eine Primzahl ist oder nicht. Ähnlich hier: Die Definition legt nur fest, dass $p \models q$ der Fall ist genau dann, wenn Folgendes der Fall ist: für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass

$$\text{wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p) = w, \text{ dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(q) = w.$$

Ist dies nun für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ der Fall? Antwort: *Nein.* Denn es ist leicht dazu ein (Gegen-)Beispiel anzugeben: Sei beispielsweise $\mathfrak{I}'$ eine Interpretation der Art, dass $\mathfrak{I}'(p) = w$, $\mathfrak{I}'(q) = f$, und $\mathfrak{I}'$ allen anderen Aussagenvariablen irgendeinen anderen Wahrheitswert zuordnet (z.B. allen w). Diese so von uns gewählte Interpretationsfunktion erfüllt nun in der Tat $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(p) = w$, denn nach der früheren Definition von $\mathfrak{W}$ in Sektion 5.2.2 gilt ja, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(p) = \mathfrak{I}'(p)$, und nach unserer Wahl von $\mathfrak{I}$ ist $\mathfrak{I}'(p) = w$. Sie erfüllt jedoch *nicht* $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(q) = w$, da aus denselben Gründen gilt, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(q) = \mathfrak{I}'(q) = f$. Es ist daher *nicht* so, dass für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p) = w$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(q) = w$. Nach unserer obigen Definition der logischen Folge heisst das nun aber: Es ist *nicht* so, dass $p \models q$; kurz: es gilt, dass $p \not\models q$. Die Formel p impliziert die Formel q nicht. Dies sollte auch intuitiv einigermaßen klar sein:

Wie sollte denn die Wahrheit der Aussagenvariable p mit logischer Notwendigkeit die Wahrheit der Aussagenvariable q nach sich ziehen, wo doch die eine mit der anderen logisch gesehen nichts zu tun hat?

Wir sehen also, dass sich das *Nicht*bestehen einer logischen Folgebeziehung zwischen zwei Formeln A und B durch Angabe eines Gegenbeispiels (wie $\mathfrak{I}'$) bewerkstelligen lässt: durch Angabe einer Interpretation, unter der sich A als wahr, B jedoch als falsch erweist. Auf analoge Weise lässt sich das Nichtbestehen einer Folgebeziehung zwischen $A_1, \ldots, A_n$ und B durch Angabe einer Interpretation nachweisen, die $A_1, \ldots, A_n$ allesamt wahr, B aber falsch macht.

Ein zweites Beispiel: Ist es der Fall, dass $p \models p \vee q$? Hier sagt uns unsere Intuition, dass die Folgebeziehung *besteht*: Die Wahrheit von p sollte doch zwangsläufig die Wahrheit von $p \vee q$ (d.h., p-oder-q) nach sich ziehen. Unsere obige Definition teilt uns zunächst wieder einfach mit, was der Fall sein muss, damit $p \models p \vee q$ der Fall ist: Es muss der Fall sein, dass für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass

$$\text{wenn } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p) = w, \text{ dann } \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p \vee q) = w.$$

Ist dem so? *Ja*. Dies lässt sich auf verschiedene Arten nachweisen: z.B. durch Anwendung der Wahrheitstafelmethode, die wir bereits kennengelernt haben, und die sofort zeigt, dass es keine Zeile in der nämlichen Wahrheitstafel geben kann, in der zwar p wahr ist, $p \vee q$ jedoch falsch. (Genau dieses Beispiel hatten wir schon am Ende von Sektion 5.1.2 behandelt.) Oder aber man führt einen kleinen, informell gehalten "Beweis" in der Metasprache. Etwa: Sei $\mathfrak{I}'$ eine beliebige Interpretation. Angenommen p ist wahr unter $\mathfrak{I}'$, d.h.: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(p) = w$. Nach unserer semantischen Regel 4 unserer Definition der aussagenlogischen Bewertungen (relativ zu vorgegebenen Interpretationen) in Sektion 5.2.2 gilt dann aber auch: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(p \vee q) = w$. Denn Letzteres ist der Fall genau dann, wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(p) = w$ oder $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(q) = w$ der Fall ist, und in der Tat ist $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(p) = w$ der Fall (per Annahme). D.h., es gilt: Wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(p) = w$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}'}(p \vee q) = w$. Die Interpretationsfunktion $\mathfrak{I}'$ war aber ganz *beliebig* gewählt, d.h., es gilt in Wahrheit sogar: *für alle* Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt, dass wenn $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p) = w$, dann auch $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(p \vee q) = w$. Nach unsere obigen Definition der logischen Folge heisst das aber nichts anderes als: $p \models p \vee q$. Aus der Formel p folgt logisch die Formel $p \vee q$.

Das Bestehen einer logischen Folgebeziehung zwischen A und B lässt sich also nicht einfach durch Angabe einer bestimmten Interpretation nachweisen; ein Beispiel würde hier nicht reichen, weil man ja etwas *für alle* Interpretationen nachweisen muss. Stattdessen wendet man die Wahrheitstafelmethode an, oder man führt einen kleinen metasprachlich formulierten Beweis, oder aber – im Anschluss an das nächste Kapitel - man leitet B aus A mittels Herleitungsregeln her. Analog verhält es such auch wieder, wenn gezeigt werden soll, dass aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ zusammengenommen die Formel B logisch folgt.

Betrachten wir nun ein paar weitere Zusammenhänge zwischen einigen der semantischen Begriffe, die wir bereits eingeführt haben. Es ist z.B. leicht einzusehen, dass Folgendes der Fall ist:

- A impliziert B logisch genau dann, wenn die materiale Implikation $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist.

Zum Beispiel ist es offensichtlich der Fall, dass $p \models p \vee q$ gilt, und entsprechend ist die Formel $p \rightarrow p \vee q$ auch eine Tautologie. Beides lässt sich leicht mittels Wahrheitstafeln für diesen konkreten Fall nachweisen, dahinter steht aber die obige allgemeine Beziehung zwischen logischer Folge und Tautologizität.

Darüberhinaus folgt eine Formel aus der leeren Prämissenmenge genau dann, wenn die Formel eine Tautologie ist: Denn $\varnothing \models A$ (wobei '$\varnothing$' die leere Menge benennt) ist genau dann der Fall, wenn es keine aussagenlogische Bewertung gibt, die alle Prämissen wahr und die Konklusion falsch macht bzw. – da es hier gar keine Prämissen gibt – genau dann, wenn es keine aussagenlogische Bewertung gibt, die die Konklusion falsch macht, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn A eine Tautologie ist. Dies rechtfertigt auch die übliche Schreibweise

- $\models A$

für den Sachverhalt, dass A tautologisch ist; links vom Folgezeichen steht keine Prämisse.

Weiters können wir nun eine Unterscheidung zwischen materialer und logischer *Äquivalenz* treffen: Wenn wir behaupten, dass zwei Formeln A und B äquivalent sind, so können wir damit meinen, dass die Formel

- $A \leftrightarrow B$

wahr ist; in diesem Falle sind A und B *material* äquivalent. Sie sind sozusagen äquivalent in der tatsächlichen oder aktualen Welt – in der "wirklichen Zeile" der Wahrheitstafel (die wir uns als vorgegeben vorstellen können).

Oder aber wir meinen damit, dass

- $A \leftrightarrow B$

tautologisch ist; dann sind A und B *logisch* äquivalent. Sie sind äquivalent in allen Zeilen der Wahrheitstafel. Wir halten also fest:

- Für alle Formeln A, B aus $\mathcal{F}$ und Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: A ist *material äquivalent* mit B (relativ zur vorgegebenen Bewertung $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}$) genau dann, wenn $\mathfrak{W}_\mathfrak{I}(A \leftrightarrow B) = w$.

- Für alle Formeln A, B aus $\mathcal{F}$ gilt: A ist *(aussagen-)logisch äquivalent* mit B genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A) = \mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B)$.

Wenn A logisch äquivalent mit B ist, so ist $A \to B$ natürlich ebenfalls eine Tautologie.

Wenn p für 'Richard gehört der römisch-katholischen Kirche an.' und $(q \wedge \neg r)$ für 'Richard ist katholisch getauft und nicht ausgetreten.' steht, so sind p und $(q \wedge \neg r)$ *material* äquivalent, die Formel

- $p \leftrightarrow q \wedge \neg r$

ist wahr. Hingegen sind etwa die Formeln $(p \wedge q)$ und $(q \wedge p)$ *logisch* äquivalent, ganz egal für welche Sätze p und q stehen; $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ ist eine Tautologie. Auch hier gilt, dass die logische Äquivalenz stärker als die materiale ist:

- Wenn eine Formel A mit einer Formel B logisch äquivalent ist, so ist A auch mit B material äquivalent (relativ zu egal welcher aussagenlogischen Bewertung).

5.2.5 Gültige und ungültige Argumentformen

Nun können wir auch festlegen, wann eine Argumentform (aussagen-)logisch gültig ist:

- Eine Argumentform Γ der aussagenlogischen Sprache ist *(aussagen-)logisch gültig* gdw es unmöglich ist, den in den Formeln von Γ vorkommenden Aussagenvariablen derart Wahrheitswerte zuzuordnen, dass die Berechnung der Wahrheitswerte der in Γ vorkommenden Formeln jeder Prämisse ein w zuordnet und der Konklusion ein f zuordnet.

Oder äquivalent, aber etwas präziser formuliert unter Zuhilfenahme unserer bereits erfolgten präzisen Definition der logischen Folge:

- Eine Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ der aussagenlogischen Sprache ist *(aussagen-)logisch gültig* genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Man beachte dabei, dass $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ eine Argumentform der aussagenlogischen Sprache ist und somit in die uns interessierende Objektsprache gehört, während '$A_1, \ldots, A_n \therefore B$ ist logisch gültig' ein Ausdruck der Metasprache ist, in dem dieser Argumentform eine semantische Eigenschaft zugeschrieben wird. Genauso ist auch '$A_1, \ldots, A_n \models B$' ein metasprachlicher Ausdruck, in welchem das Bestehen einer semantischen Beziehung zwischen den objektsprachlichen Formeln $A_1, \ldots, A_n$ einerseits und der objektsprachlichen Formel B andererseits konstatiert wird.

Wir wollen schließlich noch einige Beziehungen zwischen Argumentformen und Formeln zeigen. Dazu muss es uns möglich sein, jeder Argumentform "ihre" Formel zuzuordnen. Dies ist einfach:

- Die der Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ *entsprechende Formel* ist

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$$

(Strikte genommen müsste man hier innerhalb des Antezedens $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ diverse Klammern setzen, aber es sollte klar sein, dass die Art und Weise der Klammerung hier semantisch gesehen irrelevant ist, weil die A_i durch Konjunktionszeichen verknüft sind, bei denen die Reihenfolge ihrer Auswertung unwichtig ist.)

Nun läßt sich offensichtlich folgendes Verhältnis feststellen:

- Eine Argumentform Γ der aussagenlogischen Sprache ist logisch gültig gdw die Γ entsprechende Formel aus $\mathcal{F}$ eine Tautologie ist.

(Wir verwenden dabei 'Γ' als Metavariable für Argumentformen.)

Zum Beispiel ist es offensichtlich der Fall, dass $p, p \to q \therefore q$ logisch gültig ist, und entsprechend ist die dieser Argumentform entsprechende Formel

$$p \wedge (p \to q) \to q$$

eine Tautologie.

Weiters gilt folgender Merksatz:

- Wenn die Konklusionsformel B einer Argumentform Γ eine Tautologie ist, so ist Γ logisch gültig.

Denn in diesem Fall erhält die Konklusionsformel der Argumentform in jeder Zeile der Wahrheitstafel der Argumentform den Wert w. Somit gibt es keine Zeile, in der sämtliche Prämissen den Wert w erhalten und die Konklusion den Wert f.

Ein weiterer Merksatz ist dieser:

- Wenn mindestens eine Prämissensformel A_i einer Argumentform Γ eine Kontradiktion ist, so ist Γ logisch gültig.

Denn in diesem Fall erhält die fragliche Prämissenformel in jeder Zeile der Wahrheitstafel der Argumentform den Wert f, und somit gibt es keine Zeile in der Wahrheitstafel, in der sämtliche Prämissen der Wert w erhalten und die Konklusion den Wert f.

5.2.6 Übertragung der Definitionen auf Aussagesätze und Argumente

Bislang haben wir alle unsere zentralen semantischen Begriffe – *kontingent*, *tautologisch*, *kontradiktorisch*, *folgt logisch*, *logisch äquivalent*, *logisch gültig* – nur für Formeln bzw. Aussageformen (jeweils der aussagenlogischen Sprache) formuliert. Doch lassen sich diese Begriffe auf Basis der Mittel, die wir bereits eingeführt und diskutiert haben, nunmehr leicht auf Aussagesätze und Argumente erweitern. Alle daraus resultierenden Begriffe sind wiederum Begriffe der *aussagen*logischen Semantik, weil sie direkt oder indirekt auf das Repräsentierungsniveau der aussagenlogischen Sprache bezogen sind:

- Ein Aussagesatz ist *tautologisch* gdw seine (aussagen-)logische Form tautologisch ist.
- Ein Aussagesatz ist *kontradiktorisch* gdw seine (aussagen-)logische Form kontradiktorisch ist.
- Ein Aussagesatz ist *kontingent* gdw seine (aussagen-)logische Form kontingent ist.
- Für alle Aussagesätze $S_1, \ldots, S_n$ und T gilt: $S_1, \ldots, S_n$ *implizieren (aussagen-)logisch* T (bzw. T *folgt (aussagen-)logisch aus* $S_1, \ldots, S_n$) genau dann, wenn für die (aussagen-)logischen Formen $A_1, \ldots, A_n, B$ von, respektive, $S_1, \ldots, S_n, T$ gilt: $A_1, \ldots, A_n$ implizieren (aussagen-)logisch B.
- Zwei Aussagesätze sind *(aussagen-)logisch äquivalent* gdw ihre (aussagen-)logischen Formen zueinander logisch äquivalent sind.
- Ein Argument ist *(aussagen-)logisch gültig* gdw seine (aussagen-)logische Form (aussagen-)logisch gültig ist.

Für die Anwendung aller dieser Begriffe auf Aussagesätze und Argumente der natürlichen Sprache haben wir ja bereits eine Vielzahl von Beispielen kennengelernt; nun haben wir "nur mehr" die präzisen Definitionen der zugrundliegenden Begrifflichkeiten nachgeliefert.

5.3 Übungen

Übung 5.1

- Was ist eine Wahrheitstafel für eine aussagenlogische Formel? Wie erstellt man eine Wahrheitstafel?
- Erstellen Sie die Wahrheitstafeln zu allen aussagenlogischen Formeln in Übung 4.5 (4.1–4.5) mit weniger als 3 oder genau 3 Aussagenvariablen.

Übung 5.2 Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, welche der folgenden Formeln tautologisch, kontradiktorisch bzw. kontingent sind:

1. $(p \to q) \lor (q \to p)$
2. $\neg(p \to q) \lor (q \land \neg p)$
3. $\neg((p \to q) \land p) \to q$
4. $((p \to q) \lor (q \to r)) \lor (r \to p)$
5. $(p \to q) \lor (\neg p \to q)$
6. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (q \to r))$
7. $p \lor (\neg q \to r) \to q \lor (\neg p \to r)$
8. $\neg(p \land (q \to \neg r)) \to (p \to q) \land (p \to r)$
9. $\neg(\neg p \to q \lor r) \to \neg(p \lor q) \land r$
10. $(p \land q \to (r \land s) \lor t) \land (\neg(\neg p \lor \neg q) \land (\neg r \lor \neg s))$
11. $\neg((p \land q) \lor ((r \land s) \land t) \to q \lor t)$
12. $p \land (q \leftrightarrow r) \to (p \land q \leftrightarrow p \land r)$
13. $p \lor (\neg q \to r) \leftrightarrow q \lor (\neg p \to r)$
14. $\neg(p \land (q \to \neg r)) \leftrightarrow (p \to q) \land (p \to r)$

Übung 5.3

- Was ist eine aussagenlogische Interpretation? Was ist eine aussagenlogische Bewertung? Was ist eine Tautologie, was ist eine Kontradiktion, was ist eine kontingente Formel (gemäß exakter Definition über Interpretationen und aussagenlogische Bewertungen)?

- Was kann gemeint sein, wenn man sagt 'A impliziert B'?
- Was ist die logische Implikation (Äquivalenz): Ein zweistelliger Junktor oder eine zweistellige Relation? Wie ist die logische Implikation (Äquivalenz) definiert?
- Beweisen sie:

  A impliziert logisch B genau dann, wenn $A \to B$ eine Tautologie ist.

  (Das ist übrigens ein *meta*logischer Satz, also ein Satz der über Formeln "spricht" und diesen Formeln gewisse logische Eigenschaften zuschreibt; ein Beweis dieses metalogischen Satz ist demnach ein *meta*logischer Beweis.)

Übung 5.4

- Was ist eine gültige Argumentform? Was ist ein gültiges Argument?
- Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche sind falsch?

  1. Ein Argument, das eine falsche Konklusion hat, ist ungültig.
  2. Ein Argument, das falsche Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist ungültig.
  3. Ein Argument, das wahre Prämissen und eine falsche Konklusion hat, ist ungültig.
  4. Ein Argument, das lauter wahre Prämissen und eine wahre Konklusion hat, ist gültig.
  5. Jemand, der behauptet, daß ein bestimmter Schluß korrekt ist, kann durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegt werden.
  6. Wenn ein gültiges Argument eine falsche Konklusion hat, dann sind alle seine Prämissen auch falsch.

- Was ist die der Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ entsprechende Formel?

Übung 5.5

- Überprüfen Sie die folgenden Argumentformen auf ihre Gültigkeit unter Verwendung der Wahrheitstafelmethode:

  1. $p \land q \to r \land \neg s, r \to t, \neg t \land p \therefore \neg p$
  2. $p \land q \to r \land \neg s, r \to t, \neg t \land q \therefore p \to r \land \neg r$

3. $p \to (q \to r), r \to \neg s \land \neg t, \neg t \to \neg s \therefore p \to t$
4. $\neg(q \lor (p \to r)), \neg r \to p \land \neg q \therefore \neg q \lor r \to s$
5. $\neg(\neg p \lor (q \to \neg r)), r \to s \land t \therefore t \lor \neg q$
6. $p \land q \to r, q \lor \neg r \therefore p \to (q \to r) \land (r \to q)$
7. $\neg(\neg p \lor \neg q) \to r, r \land (p \land q) \to p \land s \therefore \neg(p \land q) \lor s$
8. $p \lor \neg p \to q, \neg(\neg r \lor \neg s), t \to p \land \neg p \therefore (q \land s) \land \neg t$
9. $p \lor q \therefore ((p \to q) \to q) \land (\neg q \to p)$

- Das folgende Argument war in Übung 3 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren. (i) Überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist; (ii) entspricht das Ergebnis aus (i) Ihrer Intuition?

  Der Papst ist Deutscher. Daher tritt Österreich am 1. Januar 2013 genau dann aus der EU aus, wenn Österreich dies tut.

- Das folgende Argument war in Übung 3 bereits durch eine Argumentform zu repräsentieren. (i) überprüfen Sie, ob die nämliche Argumentform gültig ist; (ii) ist dieses Argument ein Beweis für die Existenz Gottes?

  Bad Goisern ist die Hauptstadt von Oberösterreich und Bad Goisern ist nicht die Hauptstadt von Oberösterreich. Daher existiert Gott.

Kapitel 6

Aussagenlogisches Herleiten

6.1 Logische Systeme

Sprache lässt sich in mehrerlei Hinsichten studieren, die verschiedenen Teildisziplinen des Sprachstudiums (in der Philosophie, aber auch in der Linguistik) korrespondieren:

- *Syntaktik* ist die Disziplin, welche die Beziehungen der Zeichen untereinander behandelt, wobei diese Beziehungen so ausgedrückt sind, dass dabei wiederum nur auf Zeichen Bezug genommen wird. (Z.B.: Zeichenfolge so-und-so ist länger, d.h., enthält mehr Zeichen, als Zeichenfolge so-und-so.)

- *Semantik* ist die Disziplin, welche die Beziehungen der Zeichen zu ihren Bedeutungen behandelt. Diese Beziehungen können daher normalerweise nicht so ausgedrückt werden, dass dabei ausschließlich auf Zeichen Bezug genommen wird. (Z.B.: Zeichenfolge so-und-so benennt eine Insel im Mittelmeer.)

Darüber hinaus gibt es noch die *Pragmatik*, welche die Beziehungen von Zeichen zu ihren Benützern behandelt, insbesondere die Bedeutung von sprachlichen Ausdrücken in der zwischenmenschlichen Kommunikation. (Z.B.: Zeichenfolge so-und-so wird dazu verwendet, andere zum Lachen zu bringen.)

Wenn wir uns auch bereits mit einigen pragmatischen Facetten der Bedeutung von aussagenlogischen Verknüpfungen beschäftigt haben, so betreiben wir in der Logik doch primär Syntaktik und Semantik. Wenn wir unser *Alphabet* (Vokabular) angegeben haben, und wenn wir festgelegt haben, was eine *Formel* und was eine *Argumentform* ist, so haben wir uns im Bereich der Syntaktik bewegt. Wenn wir hingegen *Wahrheitstafeln* für bestimmte Formeln angegeben haben, wenn wir die *Wahrheitstafelmethode* beschrieben haben, wenn wir festgelegt haben, was eine *aussagenlogische Bewertung* ist, wenn wir die Eigenschaften des *Tautologisch-Seins*, des *Kontradiktorisch-Seins* oder der *Kontingenz* bzw. die Beziehungen der *logischen Implikation* und *Äquivalenz* definiert haben, so haben wir uns im Bereich der Semantik bewegt. Denn hier geht es um die Bedeutungen von Ausdrücken, d.h., in der Aussagenlogik, um Wahrheitswerte bzw. Wahrheitswertverläufe.

In diesem Kapitel werden wir die sogenannte *deduktive Methode* behandeln. Diese entstammt dem Bereich der Syntaktik und wird uns letztlich die Möglichkeit eröffnen, uns dem eigentlich semantischen Begriff der logischen Folge auch auf eine rein syntaktische Weise nähern zu können.

Bevor wir dies jedoch tun, möchten wir noch etwas allgemeiner festlegen, was überhaupt eine Logik ist. Eine voll ausgebaute Logik besteht aus drei Komponenten:

1. einer Sprache (syntaktisch),

2. einer semantischen Festlegung von Interpretationen/Bewertungen und damit verbunden eine Festlegung von wichtigen Begriffen wie denen der logischen Wahrheit (Tautologizität in der Aussagenlogik), logischen Implikation und Gültigkeit,

3. einer syntaktischen Festlegung von weiteren wichtigen Begriffen wie denen der Beweisbarkeit, Herleitbarkeit und deduktiven Gültigkeit.

Die Begriffe, die unter Punkt 2 und 3 genannt wurden, müssen dabei auf eine bestimmte Weise miteinander "harmonieren" – wir werden darauf unten zurückkommen ("Herleitbarkeit soll logischer Folge entsprechen"), und dasselbe Thema wird dann auch später noch ausführlich unter den Stichworten 'Korrektheit' und 'Vollständigkeit' abgehandelt werden.

Die ersten beiden Punkte haben wir für den Fall der Aussagenlogik bereits abgehakt: Wir haben unsere Sprache angegeben, indem wir unser Alphabet festgesetzt und sodann definiert haben, was Formeln und Argumentformen sind. Die Regeln, die dabei eine wesentliche Rolle spielten, waren die (syntaktischen) *Formationsregeln*: die Regeln der aussagenlogischen Grammatik. Damit war der erste Punkt vollständig behandelt.

Anschließend haben wir festgesetzt, wann eine Formel tautologisch ist, wann Formeln eine weitere Formel logisch implizieren, und wann eine Argumentform gültig ist. Diese Definitionen basierten auf weiteren Regeln, nämlich in diesem Fall den *semantischen Regeln*, die die Wahrheitsbedingungen für komplexe aussagenlogische Formeln festlegten. Damit war auch der zweite Punkt abgehakt.

Dem dritten Punkt wenden wir uns, soweit die Aussagenlogik betroffen ist, jetzt zu. Wiederum werden wir dabei Regeln kennenlernen: die (abermals syntaktischen) *Herleitungsregeln*. Diese Regeln werden es uns erlauben, logische Folgerungen auf "quasi-mechanische" Weise zu ziehen bzw. nachzuweisen. Es handelt bei diesen Regeln weder um grammatikalische noch um semantische Regeln, sondern um Beweisregeln.

Wir haben bereits im letzten Kapitel den Begriff der logischen Implikation definiert, der eine semantische Beziehung zwischen Formeln festlegt. Wir formulierten dabei für die Formeln der aussagenlogischen Sprache:

- Für alle $A_1, \ldots, A_n$ und B gilt: $A_1, \ldots, A_n$ *implizieren logisch* B ($A_1, \ldots, A_n \models B$) genau dann, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt:

  Wenn für alle $A_i \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ der Fall ist, dass $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(A_i) = w$, dann $\mathfrak{W}_{\mathfrak{I}}(B) = w$.

(Wir schreiben '$\in$', um die Elementbeziehung auszudrücken, die zwischen einem Element einer Menge und der Menge selbst besteht: Z.B. heißt '$A_i \in \{A_1, \ldots, A_n\}$' nichts anderes als: A_i ist ein Element der Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$.)

Folgende logische Implikationen bestehen dann etwa:

- $p \wedge q,\ q \rightarrow r \models r$
- $p \vee q,\ \neg q \models p \vee r$

Wie wir auch schon gesehen haben, kann man eine beliebige aussagenlogisch gültige Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ hernehmen und zeigen, dass dann auch immer die Konklusion logisch aus den Prämissen folgt:

- $A_1, \ldots, A_n \models B$

Man beachte dabei wiederum, dass ein Ausdruck wie

- $p, q \models p \wedge q$

kein Ausdruck der Objektsprache, sondern rein metasprachlich ist. Er besagt, dass eine Relation zwischen Formeln bzw. zwischen einer gewissen Formelmenge, nämlich $\{p, q\}$, und einer Formel, nämlich $p \wedge q$, besteht. Eine Argumentform

- $p, q \therefore p \wedge q$

hingegen *ist* ein Ausdruck der Objektsprache, von dem wir etwa die metasprachliche Aussage treffen können, dass er logisch gültig ist.

Wir wollen uns nun der deduktiven Methode zuwenden, und die erste Aufgabe, die wir uns dabei stellen, ist es, einen rein syntaktischen Begriff zu finden, der dem semantischen Begriff der logischen Implikation (logischen Folge) entsprechen soll. Dies wird der Begriff der (aussagenlogischen) *Herleitbarkeit* sein, und für

- B ist herleitbar aus $A_1, \ldots, A_n$

werden wir kurz schreiben:

- $A_1, \ldots, A_n \vdash B.$

'Entspricht' wird dabei heißen: Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n, B$ der aussagenlogischen Sprache verhält es sich so, dass

$$A_1, \ldots, A_n \models B \text{ gdw } A_1, \ldots, A_n \vdash B.$$

In der traditionellen philosophischen Terminologie ausgedrückt: Die Beziehungen $\models$ und $\vdash$ stimmen *extensional* überein, wenn auch nicht *intensional* – dieselben Formeln stehen (angeordnet) in den Beziehungen $\models$ und $\vdash$, ohne dass die Bedeutungen von '$\models$' und '$\vdash$' dieselben wären. Dass Letzteres nicht der Fall ist, wird man daran erkennen, dass sich die Definitionen von '$\models$' und '$\vdash$' sehr stark voneinander unterscheiden werden.

Doch wenn immerhin die Extensionen von '$\models$' und '$\vdash$' übereinstimmen werden, warum dann überhaupt ein syntaktisches Gegenstück zum semantischen Begriff der logischen Folge einführen? Es gibt mehr als eine Antwort auf diese Frage, aber eine gewichtige Antwort ist: Wenn man eine Folgebeziehung für Formeln mit n Aussagevariablen mittels einer Wahrheitstafel überprüfen will, dann sind wenigstens im Prinzip 2^n Zeilen mit Wahrheitswertverteilungen zu untersuchen, d.h. die Mühsal der Überprüfung steigt exponentiell mit der Anzahl der Aussagevariablen, die involviert sind. Der Nachweis der deduktiven Beziehung der Herleitbarkeit von Formeln aus Formeln, also der Relation $\vdash$, wird sich in vielen Fällen als bedeutend effektiver erweisen. Allerdings wird dieser Nachweis auch ein gewisses Maß an Kunstfertigkeit verlangen, wohingegen das Aufstellen einer Wahrheitstafel und das Überprüfen der Wahrheitstafel auf eine logische Folgebeziehung hin rein automatisch oder mechanisch erfolgen kann. Später in der Prädikatenlogik werden solche "mechanischen" Überprüfungsmethoden mittels Wahrheitstafeln gar nicht mehr zur Verfügung stehen, weshalb das Herleiten in der Prädikatenlogik dann eine noch größere Rolle spielen wird als in der Aussagenlogik.

6.2 Ein System des natürlichen Schließens

Die Herleitbarkeit einer Formel B aus Formeln $A_1, \ldots, A_n$ weist man dadurch nach, dass man eine Herleitung von B aus $A_1, \ldots, A_n$ angibt. Und Herleitungen erstellt man mittels Anwendungen einfacher syntaktischer Schlussregeln. Wir beginnen mit der Angabe einer Reihe von Schlussregeln, die die Basis unseres Herleitbarkeitsbegriff darstellen werden. Alle Instanzen dieser Schlussregeln werden dann als sogenannte *deduktiv gültige* Schlüsse betrachtet. Die ersten sechs Regeln sind die folgenden:

(MP) $A, A \to B \vdash B$ (Modus Ponens)

(MT) $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ (Modus Tollens)

(DS1) $A \lor B, \neg A \vdash B$ (Disjunktiver Syllogismus 1)

(DS2) $A \lor B, \neg B \vdash A$ (Disjunktiver Syllogismus 2)

(SIMP1) $A \land B \vdash A$ (Simplifikation 1)

(SIMP2) $A \land B \vdash B$ (Simplifikation 2)

Die folgenden Schlüsse sind also deduktiv gültig:

- $p \land q, p \land q \to r \vdash r$
- $p \to q \lor r, \neg(q \lor r) \vdash \neg p$
- $(p \to q) \lor (q \to r), \neg(p \to q) \vdash (q \to r)$
- $(p \lor r) \lor (q \land s), \neg(q \land s) \vdash p \lor r$
- $p \land (q \lor r) \vdash p$
- $p \land (q \land r) \vdash q \land r$

Wie steht es nun mit dem folgenden Schluss?

- $q, \neg p \lor (q \to r), \neg\neg p \vdash r$

Dieser Schluss hat nicht die Form einer Schlussregel, aber er ist nichtsdestotrotz deduktiv gültig. Wir können dies wie folgt zeigen:

1. q (P1)
2. $\neg p \lor (q \to r)$ (P2)

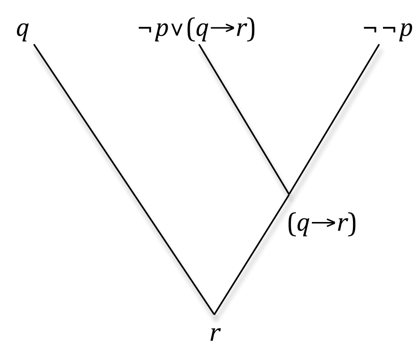
$\underline{3.\ \neg\neg p}$ (P3)

4. $q \to r$ 2., 3., (DS1)

5. r 1., 4., (MP)

Dabei benennen 'P1', 'P2' und 'P3' die Prämissen, 'DS1' die erste Regel des disjunktiven Syllogismus – die dabei auf die Zeilen 2. und 3. in *dieser Reihenfolge* angewandt wird – und 'MP' die Regel des Modus Ponens, welche auf die Zeilen 1. und 4. der Herleitung wiederum in genau *dieser Reihenfolge* angewandt wird. Die Reihenfolge muss mit der Reihenfolge der Prämissen in unserer ursprünglichen Angabe der Schlussregeln übereinstimmen: Z.B. ist das A in der Anwendung des Modus Ponens hier die Formel q in Zeile 1., während das $A \to B$ hier die Formel $q \to r$ in Zeile 4. ist, wobei A vor $A \to B$ zu nennen ist, weil dies nunmal die Reihenfolge der Prämissen bei der obigen Einführung der Modus Ponens Regel war. Selbstverständlich muss die Metavariable 'A' auch in beiden Prämissen für ein und dieselbe Formel stehen (hier: q). Der horizontale Strich trennt die Prämissen von denjenigen Formeln, die aus diesen hergeleitet werden. Der Zweck der Angaben auf der rechten Seite ist jeweils die logische Rechtfertigung oder Begründung der Formeln, die links davon stehen.

Eine Herleitung wie diese lässt sich auch durch einen Baum darstellen:



Alle an den Astenden dieses sogenannten *Herleitungsbaumes* stehenden Formeln sind die Prämissen der Herleitung, und die an der Wurzel des Herleitungsbaumes stehende Formel ist die Konklusion der Herleitung. Man könnte außerdem noch die Kanten des Baumes mit Angaben der jeweiligen Schlussregeln versehen.

Betrachten wir weitere Beispiele:

- $p, p \to (q \to \neg r), \neg\neg r, q \vee (t \wedge s) \vdash t$

1. p (P1)

2. $p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$ (P2)

3. $\neg\neg r$ (P3)

4. $\underline{q \lor (t \land s)}$ (P4)

5. $q \rightarrow \neg r$ 1., 2., (MP)

6. $\neg q$ 5., 3., (MT)

7. $t \land s$ 4., 6., (DS1)

8. t 7., (SIMP1)

- $\neg p, \neg p \rightarrow (q \rightarrow p) \vdash \neg q$

1. $\neg p$ (P1)

2. $\underline{\neg p \rightarrow (q \rightarrow p)}$ (P2)

3. $q \rightarrow p$ 1., 2., (MP)

4. $\neg q$ 3., 1., (MT)

An dem letzten Beispiel erkennt man, dass man manchmal Prämissen öfter als nur einmal verwenden muss, um zur Konklusion zu gelangen. Wir bringen noch ein Beispiel, bevor wir die deduktive Methode weiter spezifizieren:

- $\neg\neg t, p \rightarrow \neg t, \neg\neg t \rightarrow \neg q, p \lor (q \lor r) \vdash r$

1. $\neg\neg t$ (P1)

2. $p \rightarrow \neg t$ (P2)

3. $\neg\neg t \rightarrow \neg q$ (P3)

4. $\underline{p \lor (q \lor r)}$ (P4)

5. $\neg p$ 2., 1., (MT)

6. $q \lor r$ 4., 5., (DS1)

7. $\neg q$ 1., 3., (MP)

8. r 6., 7., (DS1)

Wir benötigen auch noch andere Schlussregeln:

(ADD1) $A \vdash A \lor B$ (Addition 1)

(ADD2) $B \vdash A \lor B$ (Addition 2)

(KON) $A, B \vdash A \land B$ (Konjunktion)

(DN1) $A \vdash \neg\neg A$ (Doppelte Negation 1)

(DN2) $\neg\neg A \vdash A$ (Doppelte Negation 2)

(DIS) $A \to C, B \to C \vdash A \lor B \to C$ (Disjunktion)

(TS) $A \vdash A$ (Triviale Schlussform)

(ECQ) $A, \neg A \vdash B$ (Ex Contradictione Quodlibet)

Hier sind einige Beispiele für Herleitungen auf Basis der bislang eingeführten Regeln:

- $p \to q, q \to r, p \vdash \neg\neg(r \lor s)$

  1. $p \to q$ (P1)
  2. $q \to r$ (P2)
  3. $\underline{p}$ (P3)
  4. q 3., 1., (MP)
  5. r 4., 2., (MP)
  6. $r \lor s$ 5., (ADD1)
  7. $\neg\neg(r \lor s)$ 6., (DN1)

- $p \vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$

  1. $\underline{p}$ (P1)
  2. $p \lor q$ 1., (ADD1)
  3. $p \lor r$ 1., (ADD1)
  4. $(p \lor q) \land (p \lor r)$ 2., 3., (KON)

- $p, q, r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

  1. p (P1)

  2. q (P2)

  3. r (P3)

  4. $p \wedge q$ 1., 2., (KON)

  5. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 4., (ADD1)

Im letzteren Beispiel sieht man jedoch leicht, dass auch folgende Herleitung möglich gewesen wäre:

1. p (P1)

2. q (P2)

3. r (P3)

4. $p \wedge r$ 1., 3., (KON)

5. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 4., (ADD2)

Allgemein: Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ der Fall ist, dann heißt dies nur, dass *wenigstens* eine Herleitung von B aus $A_1, \ldots, A_n$ existiert; selbst wenn man sich nur für kürzest mögliche Herleitungen interessieren würde, könnte es deren viele geben.

Alle bisherigen Regeln waren von folgender einfachen Form: Wenn dieses und jenes eine Prämisse ist oder aber bereits hergeleitet wurde, dann darf man im nächsten Schritt auch dieses und jenes herleiten. Die Regeln dieser Art, die wir uns im Rahmen unseres Systems des natürlichen Schließens vorgeben, nennen wir ‘Grundschlussregeln’. Wir kommen nun jedoch zu drei wichtigen Regeln, die eine etwas komplexere Form aufweisen, und die wir ‘Metaregeln’ nennen wollen: Gegeben seien die Prämissen und alles, was bereits hergeleitet wurde; nun wird eine Zusatzannahme getroffen; aus all diesen Formeln werden dann weitere Formeln hergeleitet; je nachdem, was dabei hergeleitet wird, darf die Zusatzannahme wieder beseitigt werden und stattdessen ein Schluss ohne Zusatzannahme gezogen werden. Man spricht dabei von Metaregeln, weil es sich insgesamt sozusagen um einen *metasprachlich* formulierten Schluss von solchen Schlüssen auf solche Schlüsse hin handelt, die direkt von objektsprachlichen Formeln zu weiteren objektsprachlichen Formeln führen.

Die erste solche Metaregel ist der *Indirekte Beweis* (auch *Reductio ad absurdum* genannt). Folgende Idee steht hinter dieser Regel: Wir wollen zeigen, dass unter der Annahme der Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ die Konklusion B hergeleitet werden kann, dass also gilt: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$. Dazu nehmen wir zusätzlich zu den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ zunächst einmal auch noch die Negation $\neg B$ der gewünschten Konklusion an und versuchen eine Kontradiktion der Form $C \wedge \neg C$ daraus herzuleiten. Gelingt uns dies, so darf der ursprünglich intendierte Schluss von $A_1, \ldots, A_n$ auf B ohne Zusatzannahme durchgeführt werden. Die semantische Idee dahinter ist diese: Da die Konklusion, die sich unter der Zusatzannahme von $\neg B$ ergibt, eine kontradiktorische Formel ist, erhält sie in jedem Falle den Wert f. Somit kann es nicht der Fall sein, dass sämtliche Prämissen den Wert w erhalten, da das Argument selbst ja logisch gültig ist. Dies heißt, dass unter der Annahme, dass alle A_i den Wert w erhalten – die Formeln A_i sind ja die Prämissen, deren Wahrheit von vornherein vorausgesetzt wurde – die Formel $\neg B$ den Wert f und somit die Formel B den Wert w erhalten muss. Es folgt also B aus den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$.

Formal präzise ausformuliert lautet die Regel:

(IB) Wenn $\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B}$$

Hier sind zwei Anwendungsbeispiele dieser Regel:

- $\neg p \to \neg q, q \vdash p$

  1. $\neg p \to \neg q$ (P1)

  2. $\underline{q}$ (P2)

  3. $\|$ $\neg p$ (IB-Annahme)

  4. $\|$ $\neg q$ 3., 1. (MP)

  5. $\|$ $q \wedge \neg q$ 2., 4. (KON)

  6. p 3.–5. (IB)

Wir signalisieren dabei durch die Verwendung der zwei vertikalen Striche ('$\|$') denjenigen Teil der Herleitung, welcher unter der Annahme $\neg p$ des indirekten Beweises erfolgt. Zeile 6 steht dann wieder außerhalb dieses Annahmenteils, denn auf p kann nun ja *ohne irgendwelche Zusatzannahmen* (abgesehen von den ursprünglichen Prämissen P1 und P2) geschlossen werden. '$\|$' hat dabei aber eine rein "visuelle" Funktion: Es handelt sich dabei nicht etwa um ein logisches oder inhaltlich sonst irgendwie relevantes Zeichen.

Achtung: Diese letzte Herleitung hätte nicht einfach mittels Modus Tollens erfolgen können: MT erfordert, dass die zweite Prämisse, auf die er angewandt wird, eine Negationsformel ist; q oben ist aber keine Negationsformel. Was man jedoch sehr wohl hätte machen können: q zunächst doppelt zu verneinen; *dann* Modus Tollens anzuwenden, um $\neg\neg p$ zugewinnen; und schließlich die doppelte Negation in $\neg\neg p$ wieder zu eliminieren. Man hätte p in diesem Fall also auch ohne die Anwendung der IB-Regel aus den Prämissen herleiten können.

Hier ist noch ein anderes Beispiel:

- $(p \wedge r) \vee q, \neg p \vdash q$

  1. $(p \wedge r) \vee q$ (P1)
  2. $\underline{\neg p}$ (P2)
  3. $\| \ \neg q$ (IB-Annahme)
  4. $\| \ p \wedge r$ 1., 3. (DS2)
  5. $\| \ p$ 4. (SIMP1)
  6. $\| \ p \wedge \neg p$ 5., 2. (KON)
  7. q 3.–6. (IB)

Bei allen solchen Metaregeln gilt: Wenn die Anwendung der Metaregel beendet ist – z.B. endet die Anwendung von IB im letzten Beispiel in Zeile 7 – dann gilt ab dort auch die ursprüngliche Annahme für die nämliche Metaregel – hier in Zeile 3 – genauso als entfernt oder gelöscht wie die ganze Sub-Herleitung, welche sich von der Annahme bis zu der Zeile unmittelbar vor der Konklusion der Metaregel erstreckt. Im vorigen Beispiel dürfte also nach der Zeile 7 auf keine der Zeilen 3–6 mehr verwiesen werden. Natürlich dürfte man aber auf die Konklusion der Metaregel – im vorigen Beispiel die Formel q in Zeile 7 – weitere Herleitungsregeln anwenden, da diese Konklusion ja nunmehr *ohne* Zusatzannahmen erschlossen wurde. Man beachte, dass die Konklusion der Anwendung eines IB (im letzten Beispiel: q) *nicht notwendigerweise* mit der "Gesamtkonklusion" der gesamten Herleitung übereinstimmen muss. In den letzten beiden Beispielen war dies zwar der Fall, wir werden aber auch Herleitungen kennenlernen, in denen die Konklusion des IB bloß einen Zwischenschritt auf dem

Weg zur Herleitung der gewünschten endgültigen Konklusion in der letzten Zeile der nämlichen Herleitung darstellt. Analoges gilt auch für die beiden anderen Metaregeln, die wir in der Aussagenlogik kennenlernen werden.

Die zweite Metaregel ist der *Konditionale Beweis*: Angenommen wir wollen unter der Annahme der Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ die Implikationsformel $B \to C$ herleiten. Wir nehmen dann B zunächst als Zusatzannahme zu den Prämissen hinzu und leiten C her. Wenn dies gelingt, dürfen wir ganz ohne Zusatznahme auf $B \to C$ schließen. Semantisch können wir dafür wie folgt argumentieren: Wenn die Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B \to C$ ungültig ist, dann muss unter der Annahme der Wahrheit der Prämissen A_i die Formel $B \to C$ den Wert f erhalten können. In dem Falle muss dann aber B den Wert w und C den Wert f erhalten. Dies zieht nach sich, dass in diesem Falle sämtliche Prämissen der Argumentform $A_1, \ldots, A_n, B \therefore C$ wahr sind, die Konklusion jedoch falsch. Somit ist auch diese Argumentform dann logisch ungültig. Anders ausgedrückt: Wenn $A_1, \ldots, A_n, B \therefore C$ gültig ist, so auch $A_1, \ldots, A_n \therefore B \to C$.

Als Herleitungsregel formuliert:

(KB) Wenn $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$ eine Schlussregel ist, so ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, B \vdash C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C}$$

Wir bringen gleich ein paar Beispiele dazu:

- $\neg p \vee r \vdash p \to r$

  1. $\underline{\neg p \vee r}$ (P1)
  2. $\| \; p$ (KB-Annahme)
  3. $\| \; \neg\neg p$ 2. (DN1)
  4. $\| \; r$ 1., 3. (DS1)
  5. $p \to r$ 2.–4. (KB)

- $p \to q, q \to r \vdash p \to q \wedge r$

  1. $p \to q$ (P1)
  2. $\underline{q \to r}$ (P2)

3. $\| \; p$ (KB-Annahme)

4. $\| \; q$ 3., 1. (MP)

5. $\| \; r$ 4., 2. (MP)

6. $\| \; q \wedge r$ 4., 5. (KON)

7. $p \to q \wedge r$ 3.–6. (KB)

- $\neg(q \vee r) \vdash q \vee p \to p$

$\underline{1.\ \neg(q \vee r)}$ (P1)

2. $\| \; \neg\neg q$ (IB-Annahme)

3. $\| \; q$ 2. (DN2)

4. $\| \; q \vee r$ 3. (ADD1)

5. $\| \; (q \vee r) \wedge \neg(q \vee r)$ 4., 1. (KON)

6. $\neg q$ 2.–5. (IB)

7. $\| \; q \vee p$ (KB-Annahme)

8. $\| \; p$ 7., 6. (DS1)

9. $q \vee p \to p$ 7.–8. (KB)

An dem letzten Beispiel sieht man, dass man selbstverständlich auch mehr als eine Metaregel in einer Herleitung zur Anwendung bringen kann.

Schließlich kommen wir zur dritten Metaregel, dem *Beweis durch vollständige Fallunterscheidung*: Wenn wir zeigen wollen, dass die Formel C unter der Annahme der Prämissen $B_1, \ldots, B_n$ herleitbar ist, dann kann man dies auch dadurch bewerkstelligen, dass man sowohl zeigt, dass unter der Zuhilfenahme der Prämisse A die Formel C herleitbar ist, als auch unter Zuhilfenahme der Prämisse $\neg A$. Dies ist vielleicht auf den ersten Blick nicht so leicht einzusehen. Es lässt sich jedoch wieder eine semantische Argumentation dafür vorbringen, erklärt anhand eines einfachen Beispiels: Angenommen, die Argumentform $A \therefore B$ ist gültig und ebenfalls die Argumentform $\neg A \therefore B$. Nun muß in unserer Logik, in der das sogenannte *Bivalenzprinzip* gilt, entweder A oder aber $\neg A$ wahr sein und die jeweils andere Formel falsch. Aus demselben Grunde ist ja auch die Formel $A \vee \neg A$ immer wahr, also eine Tautologie. Wenn nun B

sowohl aus A als auch aus $\neg A$ folgt, dann folgt B doch auch aus $A \vee \neg A$. Das Überprüfen der Gültigkeit der Argumentform $A \vee \neg A \therefore B$ unterscheidet sich aber in nichts vom Überprüfen der Argumentform $\therefore B$ auf deren Gültigkeit hin: In beiden Fällen heißt Gültigkeit, dass B in allen Zeilen der Wahrheitstafel ein w aufweisen muss. $A \vee \neg A$ fügt also nichts Wesentliches hinzu und ist somit vernachlässigbar. Kurz: Wenn sowohl $A \therefore B$ als auch $\neg A \therefore B$ logisch gültig sind, so auch $\therefore B$. Dies ist nur ein Beispiel für die Gültigkeit der allgemeiner formulierten Schlussregel der Fallunterscheidung.

Diese lautet nun so:

(FU) Wenn $A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ und $\neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ Schlussregeln sind, dann ist auch $B_1, \ldots, B_n \vdash C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A, B_1, \ldots, B_n \vdash C \quad \neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C}{B_1, \ldots, B_n \vdash C}$$

Wäre die resultierende Argumentform ungültig, so wäre es möglich, dass alle B_i den Wert w erhielten und C den Wert f. Dann wäre aber auch mindestens eine der vorausgesetzen Argumentformen ungültig, da in dem Falle entweder A oder aber $\neg A$ den Wert w erhielte.

Hierzu wieder einige Beispiele:

- $p \to r, \neg p \to s \vdash r \vee s$

  1. $p \to r$ (P1)
  2. $\underline{\neg p \to s}$ (P2)
  3. $\| \; p$ (FU-Annahme 1)
  4. $\| \; r$ 3., 1. (MP)
  5. $\| \; r \vee s$ 4. (ADD1)
  6. $\| \; \neg p$ (FU-Annahme 2)
  7. $\| \; s$ 6., 2. (MP)
  8. $\| \; r \vee s$ 7. (ADD2)
  9. $r \vee s$ 3.–8. (FU)

Man beachte dabei, dass gefordert ist, dass die Konklusion aus der FU-Annahme 1 – diese Konklusion steht hier in Zeile 5 – und die Konklusion aus der FU-Annahme 2 – die Konklusion findet sich hier in Zeile 8 – genau dieselben sind, und dass die FU-Annahme 2 unmittelbar nach der Konklusion aus der FU-Annahme 1 getroffen wird.

- $p \to q \vdash \neg p \vee q$

  $\underline{1.\ p \to q}$ (P1)

  2. $\|\ p$ (FU-Annahme 1)

  3. $\|\ q$ 2., 1. (MP)

  4. $\|\ \neg p \vee q$ 3. (ADD2)

  5. $\|\ \neg p$ (FU-Annahme 2)

  6. $\|\ \neg p \vee q$ 5. (ADD1)

  7. $\neg p \vee q$ 2.–6. (FU)

- $\neg(\neg p \vee \neg q) \to r,\ r \wedge (p \wedge q) \to p \wedge s \vdash \neg(p \wedge q) \vee s$

  1. $\neg(\neg p \vee \neg q) \to r$ (P1)

  $\underline{2.\ r \wedge (p \wedge q) \to p \wedge s}$ (P2)

  3. $\|\ p \wedge q$ (FU-Annahme 1)

  4. $\|\ \|\ \neg r$ (IB-Annahme)

  5. $\|\ \|\ \neg\neg(\neg p \vee \neg q)$ 1., 4. (MT)

  6. $\|\ \|\ \neg p \vee \neg q$ 5. (DN2)

  7. $\|\ \|\ q$ 3. (SIMP2)

  8. $\|\ \|\ \neg\neg q$ 7. (DN1)

  9. $\|\ \|\ \neg p$ 8., 6. (DS2)

  10. $\|\ \|\ p$ 3. (SIMP1)

  11. $\|\ \|\ p \wedge \neg p$ 10., 9. (KON)

  12. $\|\ r$ 4.–11. (IB)

  13. $\|\ r \wedge (p \wedge q)$ 12., 3. (KON)

  14. $\|\ p \wedge s$ 13., 2. (MP)

  15. $\|\ s$ 14. (SIMP2)

16. $\| \neg(p \wedge q) \vee s$ 15. (ADD2)

17. $\| \neg(p \wedge q)$ (FU-Annahme 2)

18. $\| \neg(p \wedge q) \vee s$ 17. (ADD1)

19. $\neg(p \wedge q) \vee s$ 3.–18. (FU)

Wie schon einmal zuvor werden hier in einer Herleitung zwei Metaregeln verwendet. Anders als zuvor sind diese hier jedoch ineinander *verschachtelt*: Die Anwendung des IB findet *innerhalb* der Anwendung der FU statt! Darin ist nichts problematisch, außer dass man gewährleisten muss, dass immer die zuletzt begonnene Anwendung einer Metaregel wiederum als erste beendet wird. Es darf nicht sein, dass die Annahme einer ersten Anwendung einer Metaregel getroffen wird, dann die Annahme einer zweiten Anwendung einer Metaregel, dann aber die erste Anwendung der nämlichen Metaregel *vor* der zweiten Anwendung geschlossen wird. Anwendungen von Metaregeln dürfen also zwar ineinander geschachtelt sein, sie dürfen sich jedoch nicht "überkreuzen".

In dem Bereich der Herleitung, der unter *zwei* ineinander verschachtelten Annahmen vor sich geht, haben wir entsprechend '$\|$' *zweimal* angeschrieben, um die Verschachtelungstiefe entsprechend zu verdeutlichen. Bei drei ineinander verschachtelten Annahmen würden wir '$\|$' dreimal angeben, usw.

Die letzte Herleitung demonstriert auch (wie bereits angekündigt), dass die Konklusion einer Metaregel wie des IB nicht mit der Endkonklusion einer Herleitung übereinstimmen muss: r in Zeile 12 stellt bloß einen Zwischenschritt auf dem Weg zur Herleitung von $\neg(p \wedge q) \vee s$ in Zeile 19 dar.

Was uns noch fehlt, sind Herleitungsregeln für die materiale Äquivalenz $\leftrightarrow$. Dazu geben wir uns die folgenden Grundschlussregeln vor:

(ÄQ-EIN) $A \rightarrow B, B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$ (Einführung der Äquivalenz)

(ÄQ-ELIM1) $A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B$ (Elimination der Äquivalenz 1)

(ÄQ-ELIM2) $A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$ (Elimination der Äquivalenz 2)

Damit ist das Schlussregelwerk unseres Systems des natürlichen Schließens abgeschlossen. Es ist nun möglich, auf Basis dieser Regeln den Begriff der *Herleitbarkeit* einer Formel B aus Formeln $A_1, \ldots, A_n$ exakt zu definieren. Hätten wir es dabei ausschließlich mit Grundschlussregeln zu tun, wäre diese Definition auch ganz leicht anzugeben:

- Eine *Herleitung* einer Formel B der aussagenlogischen Sprache $\mathcal{F}$ aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathcal{F}$ *rein auf Basis der Grundschlussregeln* ist eine

Folge von Formeln in $\mathcal{F}$ derart, dass deren erste n Formeln die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ (in dieser Reihenfolge) sind, dass deren letzte Formel die Formel B ist, und dass jede Formel dazwischen (sagen wir: mit Nummer k) das Resultat der Anwendung einer unserer Grundschlussregeln auf Formeln ist, welche bereits zuvor (also vor Nummer k) in der Folge vorkommen.

- Eine Formel B der aussagenlogischen Sprache $\mathcal{F}$ ist *rein auf Basis der Grundschlussregeln* aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathcal{F}$ *herleitbar* genau dann, wenn es eine Herleitung von B aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ rein auf Basis der Grundschlussregeln gibt.

Die Präsenz unserer drei Metaregeln verkompliziert die allgemeine Definition von

- eine Formel B der aussagenlogischen Sprache $\mathcal{F}$ ist aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathcal{F}$ *herleitbar* (kurz: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$)

jedoch, weil die drei Metaregeln im Vergleich zu den Grundschlussregeln – aber auch untereinander – syntaktisch unterschiedlich gebaut sind, weil man in der Definition festlegen muss, dass alle Anwendungen von Metaregeln innerhalb einer Herleitung abgeschlossen sein müssen, weil man angeben muss, dass sich die Anwendungen von Metaregeln innerhalb einer Herleitung nicht überkreuzen dürfen, und weil man schließlich auch noch verlangen muss, dass in keiner Zeile einer Herleitung auf eine frühere Zeile Bezug genommen wird, die sich innerhalb einer bereits abgeschlossenen Anwendung einer Metaregel befindet. Aus diesen Gründen verzichten wir darauf, die exakte Definition von $\vdash$ anzugeben und vertrauen stattdessen darauf, dass diese aus den Erläuterungen in dieser Sektion hinreichend klar geworden ist, und dass es ebenso klar ist, dass die Definition vollständig präzise und rein unter Zuhilfenahme von syntaktischen Begriffen angegeben werden könnte.

Zum Abschluss stellen wir alle Regeln unseres Systems des natürlichen Schließens in der Aussagenlogik noch einmal bündig zusammen.

6.3 Zusammenfassung der Regeln unseres aussagenlogischen Systems des natürlichen Schließens

(MP) $A, A \to B \vdash B$ (Modus Ponens)

(MT) $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ (Modus Tollens)

(DS1) $A \lor B, \neg A \vdash B$ (Disjunktiver Syllogismus 1)

(DS2) $A \lor B, \neg B \vdash A$ (Disjunktiver Syllogismus 2)

(SIMP1) $A \land B \vdash A$ (Simplifikation 1)

(SIMP2) $A \land B \vdash B$ (Simplifikation 2)

(ADD1) $A \vdash A \lor B$ (Addition 1)

(ADD2) $B \vdash A \lor B$ (Addition 2)

(KON) $A, B \vdash A \land B$ (Konjunktion)

(DN1) $A \vdash \neg\neg A$ (Doppelte Negation 1)

(DN2) $\neg\neg A \vdash A$ (Doppelte Negation 2)

(DIS) $A \to C, B \to C \vdash A \lor B \to C$ (Disjunktion)

(TS) $A \vdash A$ (Triviale Schlussform)

(ECQ) $A, \neg A \vdash B$ (Ex Contradictione Quodlibet)

(ÄQ-EIN) $A \to B, B \to A \vdash A \leftrightarrow B$ (Einführung der Äquivalenz)

(ÄQ-ELIM1) $A \leftrightarrow B \vdash A \to B$ (Elimination der Äquivalenz 1)

(ÄQ-ELIM2) $A \leftrightarrow B \vdash B \to A$ (Elimination der Äquivalenz 2)

(IB) Wenn $\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \land \neg C$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \land \neg C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B}$$

(KB) Wenn $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$ eine Schlussregel ist, so ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, B \vdash C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C}$$

(FU) Wenn $A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ und $\neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ Schlussregeln sind, dann ist auch $B_1, \ldots, B_n \vdash C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A, B_1, \ldots, B_n \vdash C \quad \neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C}{B_1, \ldots, B_n \vdash C}$$

Wie wir bald sehen werden, könnten wir auf einige dieser Regeln verzichten, ohne dass die Extension, also der Begriffsumfang, des Herleitbarkeitszeichens '$\vdash$' davon beeinträchtigt wäre. In anderen Worten: Einige der obigen Regeln sind redundant. Solche redundanten Regeln können das Herleiten aber immerhin abkürzen oder übersichtlicher gestalten, weshalb die Nicht-Redundanz der logischen Herleitungsregeln in einem System solcher Regeln nicht unbedingt ein Ziel sein muss.

6.4 Faustregeln für das aussagenlogische Herleiten

Eine Formel aus Prämissen herzuleiten, ist nicht immer einfach, und es existiert dabei kein "Kochrezept", welches immer zum gewünschten Ergebnis führen würde. Letztlich macht nur Übung den Meister! Die folgenden Faustregeln mögen aber immerhin als kleine Hilfestellung beim Herleiten dienen:

Ist eine *Prämissenformel* eine "gerade" *Negationsformel* $\neg\neg A$, so versuche man eine **Doppelte Negation** anzuwenden.

Ist eine *Prämissenformel* eine "ungerade" *Negationsformel* $\neg C$, so versuche man einen **Indirekten Beweis**, und zwar so, dass man die fragliche Prämissenformel $\neg C$ als das zweite Konjunkt des für die Durchführung des Indirekten Beweises notwendigen Widerspruchs $(C \wedge \neg C)$ verwendet.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Konjunktionsformel* $(A \wedge B)$, so versuche man eine **Simplifikation** anzuwenden.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Disjunktionsformel* $(A \vee B)$, so versuche man einen **Disjunktiven Syllogismus** anzuwenden.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Implikationsformel* $(A \rightarrow B)$, so versuche man einen **Modus Ponens** oder einen **Modus Tollens** anzuwenden.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Äquivalenzformel* $(A \leftrightarrow B)$, so versuche man eine **Äquivalenzelimination** anzuwenden.

Ist die *Konklusionsformel* eine "gerade" *Negationsformel* $\neg\neg A$, so versuche man, A herzuleiten, um sodann eine **Doppelte Negation** anzuwenden.

Ist die *Konklusionsformel* eine "ungerade" *Negationsformel* $\neg B$, so versuche man einen **Indirekten Beweis**, und zwar so, dass man die Negation $\neg\neg B$ der Konklusionsformel als Prämisse annimmt und versucht, mit deren Hilfe einen Widerspruch der Form $(C \wedge \neg C)$ herzuleiten.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Konjunktionsformel* $(A \wedge B)$, so versuche man einerseits A und andererseits B herzuleiten, um sodann eine **Konjunktion** anzuwenden.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Disjunktionsformel* $(D \vee E)$, so versuche man D oder E herzuleiten, um sodann eine **Addition** anzuwenden; in manchen Fällen muss ein **Beweis durch vollständige Fallunterscheidung** angewandt werden, und zwar so, dass man in einem Fall die Konklusionsformel durch Addition aus der Formel D gewinnt und im anderen Fall die Konklusionsformel durch Addition aus der Formel E gewinnt.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Implikationsformel* $(B \rightarrow C)$, so versuche man einen **Konditionalen Beweis**, und zwar so, dass man das Antezedens B der Konklusionsformel als Prämisse annimmt und versucht, mit deren Hilfe das Konsequens C der Konklusionsformel herzuleiten.

Ist eine *Konklusionsformel* eine *Äquivalenzformel* $(A \leftrightarrow B)$, so versuche man, $(A \rightarrow B)$ und $(B \rightarrow A)$ herzuleiten, um sodann eine **Äquivalenzeinführung** anzuwenden.

6.5 Deduktive Gültigkeit, Beweisbarkeit und abgeleitete Schlussregeln

Auf der Basis der Herleitbarkeitsbegriffes können wir nun die folgenden weiteren syntaktischen Begriffe definieren:

- Eine Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ der aussagenlogischen Sprache ist *deduktiv gültig* gdw $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.
- Eine Formel A in $\mathcal{F}$ ist *beweisbar* (*prämissenfrei herleitbar*, $\vdash A$) gdw A aus der leeren Prämissenmenge herleitbar ist.

So wie logische Gültigkeit von Argumentformen früher einmal auf den Begriff der logischen Folge zurückgeführt wurde, wird also die deduktive Gültigkeit von Argumentformen auf den Begriff der Herleitbarkeit zurückgeführt.

Beweisbare Formeln sind solche, die ohne jegliche Annahmen herleitbar sind, so wie früher die unbedingte Wahrheit von Tautologien keinerlei Annahmen bedurften. Hier sind ein paar typische Beispiele für beweisbare Formeln:

- $\vdash p \vee \neg p$

  1. $\parallel p$ (FU-Annahme 1)

2. $\parallel p \lor \neg p$ 1. (ADD1)

3. $\parallel \neg p$ (FU-Annahme 2)

4. $\parallel p \lor \neg p$ 3. (ADD2)

5. $p \lor \neg p$ 1.–4. (FU)

- $\vdash \neg(p \land \neg p)$

1. $\parallel \neg\neg(p \land \neg p)$ (IB-Annahme)

2. $\parallel p \land \neg p$ 1. (DN2)

3. $\neg(p \land \neg p)$ 1.–2. (IB)

- $\vdash p \to p$

1. $\parallel p$ (KB-Annahme)

2. $\parallel p$ 1. (TS)

3. $p \to p$ 1.–2. (KB)

- $\vdash (p \land q \to r) \to (p \to (q \to r))$

1. $\parallel (p \land q \to r)$ (KB-Annahme)

2. $\parallel \parallel p$ (KB-Annahme)

3. $\parallel \parallel \parallel q$ (KB-Annahme)

4. $\parallel \parallel \parallel p \land q$ 2., 3. (KON)

5. $\parallel \parallel \parallel r$ 4., 1. (MP)

6. $\parallel \parallel q \to r$ 3.–5. (KB)

7. $\parallel p \to (q \to r)$ 2.–6. (KB)

8. $(p \land q \to r) \to (p \to (q \to r))$ 1.–7. (KB)

So wie wir die semantischen Begriffe der Tautologizität von Formeln, der logischen Folgebeziehung zwischen Formeln und der logischen Gültigkeit von Argumentformen letztlich auf Aussagesätze und Argumente der *natürlichen Sprache* erweitert haben, lassen sich auch die syntaktischen Begriffe der Beweisbarkeit von Formeln, der Herleitbarkeitsbeziehung zwischen Formeln und der deduktiven Gültigkeit von Argumentformen auf Aussagesätze und Argumente der *natürlichen Sprache* erweitern. Wir werden darauf weiter unten zurückkommen.

Schließlich lassen sich neben den Grundschlussregeln und den drei Metaregeln – welche zusammengenommen das von uns vorgegebene System des natürlichen Schließens *festlegen* – auch noch sogenannte *abgeleitete* Schlussregeln anwenden, wir müssen jedoch zuerst noch zeigen, dass diese auch zulässig sind.

Eine sehr praktische solche abgeleitete Schlussregel ist:

(HS) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ (Hypothetischer Syllogismus)

Wie diese Schlussregel aus den vorgegebenen Regeln abzuleiten ist, sollte mittlerweile klar sein: Ein konditionaler Beweis mit zwei Anwendungen des Modus Ponens reicht dafür hin. Wie immer dürfen dann für die Metavariaben 'A', 'B', 'C' beliebige aussagenlogische Formeln eingesetzt werden.

Weitere gebräuchliche abgeleitete Schlussregeln sind:

(KOMM-$\wedge$) $A \wedge B \vdash B \wedge A$ (Kommutativität der Konjunktion)

(KOMM-$\vee$) $A \vee B \vdash B \vee A$ (Kommutativität der Disjunktion)

(ASSOC1-$\wedge$) $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$ (Assoziativität der Konjunktion)

(ASSOC1-$\vee$) $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$ (Assoziativität der Disjunktion)

(IDEMP1-$\wedge$) $A \vdash A \wedge A$ (Idempotenz der Konjunktion 1)

(IDEMP2-$\wedge$) $A \wedge A \vdash A$ (Idempotenz der Konjunktion 2)

(IDEMP1-$\vee$) $A \vdash A \vee A$ (Idempotenz der Disjunktion 1)

(IDEMP2-$\vee$) $A \vee A \vdash A$ (Idempotenz der Disjunktion 2)

(DIST1) $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributivgesetz 1)

(DIST2) $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributivgesetz 2)

(DM1) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ (DeMorgansches Gesetz 1)

(DM2) $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$ (DeMorgansches Gesetz 2)

Alle diese Hilfsregeln lassen sich auf Basis unserer eigentlich vorgegebenen Regeln herleiten. Die abgeleiteten Schlussregeln sind also eigentlich nicht mehr als "mnemotechnisch" nützliche Kurzschreibweisen für Herleitungen, die sich rein durch Anwendungen unserer eigentlichen Regeln durchführen lassen.

Auf ähnliche Weise könnten wir übrigens auch so manche Grundschlussregel als redundant, d.h. als nicht unabhängig von den anderen vorgegebenen Regeln nachweisen. Z.B.:

(DIS) $A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C$

1. $A \to C$ (P1)

2. $\underline{B \to C}$ (P2)

3. $\|\ A \vee B$ (KB-Annahme)

4. $\|\ \|\ A$ (FU-Annahme 1)

5. $\|\ \|\ C$ 4., 1. (MP)

6. $\|\ \|\ \neg A$ (FU-Annahme 2)

7. $\|\ \|\ B$ 3., 6. (DS1)

8. $\|\ \|\ C$ 7., 2. (MP)

9. $\|\ C$ 4.–8. (FU)

10. $A \vee B \to C$ 3.–9. (KB)

(TS) $A \vdash A$

1. $\underline{A}$ (P1)

2. $A \wedge A$ 1., 1. (KON)

3. A 2. (SIMP1)

(MT) $A \to B, \neg B \vdash \neg A$

1. $A \to B$ (P1)

2. $\underline{\neg B}$ (P2)

3. $\| \neg\neg A$ (IB-Annahme)

4. $\| A$ 3. (DN2)

5. $\| B$ 4., 1. (MP)

6. $\| B \wedge \neg B$ 5., 2. (KON)

7. $\neg A$ 3.–6. (IB)

Wir hätten demnach darauf verzichten können, DIS, TS und MT als Grundschlussregeln vorauszusetzen, solange nur alle Regeln vorgesetzt werden könnten, die wir gerade eben bei der Herleitung von DIS, TS und MT verwendet haben.

Auch wenn dies interessant sein mag: Im Rahmen unseres System müssen wir diese Regeln freilich gar nicht ableiten, da wir sie uns zur freien Verwendung schlichtweg vorgegeben haben.

6.6 Korrektheit und Vollständigkeit von $\vdash$

Aus den Beispielen sollte schon offensichtlich geworden sein, welche syntaktischen Begriffe nun welchen semantischen Begriffen korrespondieren:

- Herleitbarkeit entspricht der logischen Folge,
- Beweisbarkeit entspricht der Tautologizität,
- deduktive Gültigkeit entspricht der logischen Gültigkeit.

Es lässt sich auf der Grundlage unserer exakten quasi-mathematischen Begriffsbildung sogar *beweisen*, dass diese Begriffe jeweils zueinander in folgenden *extensionalen* Zusammenhängen stehen (wobei wir kurz '$\models A$' für 'A ist tautologisch' schreiben):

- Korrektheit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$:
    Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $A_1, \ldots, A_n \models B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: Wenn $\vdash A$, dann $\models A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: Wenn $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ deduktiv gültig ist, dann ist $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig.

Sowie:

- Vollständigkeit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$:
    Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, dann $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: Wenn $\models A$, dann $\vdash A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: Wenn $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig ist, dann ist $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ deduktiv gültig.

Während die Korrektheit sicherstellt, dass "nicht zu viel" in unserem System des natürlichen Schließens hergeleitet werden kann, sorgt die Vollständigkeit dafür, dass "nicht zu wenig" hergeleitet werden kann, dass also die Herleitbarkeit nicht gegenüber der logischen Folge zurückfällt. Korrektheit und Vollständigkeit zusammengenommen ergeben schließlich die extensionale Übereinstimmung der zueinander korrespondierenden syntaktischen bzw. semantischen Begriffe:

- Korrektheit und Vollständigkeit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ gdw $A_1, \ldots, A_n \models B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: $\vdash A$ gdw $\models A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ ist deduktiv gültig gdw $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig ist.

Den Beweis für diese Behauptungen werden wir an dieser Stelle nicht erbringen. Aber ein solcher lässt sich genauso präzise führen wie Beweise über Zahlen, Funktionen und Mengen in der Mathematik.

6.7 Übertragung der Definitionen auf Aussagesätze und Argumente

Wie schon zuvor im Kapitel 5 zur aussagenlogischen Semantik lassen sich auch in diesem Kapitel alle Definitionen von Begriffen für aussagenlogische Formeln und Argumentformen auf Aussagesätze und Argumente in der natürlichen Sprache erweitern. Insbesondere nennt man einen Aussagesatz aus weiteren Aussagesätzen herleitbar gdw dies für die jeweiligen logischen Formen dieser Sätze der Fall ist; einen Aussagesatz nennt man beweisbar gdw seine logische Form beweisbar ist; und ein Argument wird deduktiv gültig genannt gdw die zugehörige Argumentform des Argumentes deduktiv gültig ist.

6.8 Weitere Arten von Systemen des Schließens

Das System logischer Schlussregeln, das wir in diesem Kapitel eingeführt haben, ist nur eines unter vielen, welche im Laufe der Jahrzehnte für die Aussagenlogik entwickelt wurden. Alle diese Systeme bedienen sich der deduktiven Methode – der Methode des Herleitens – und alle von ihnen gehen rein syntaktisch vor; die Weise, in der diese Methode angewandt wird – die Form der sogenannten Herleitungsordnung – unterscheidet sich jedoch von einem System zum anderen:

- *Axiomatische Systeme (Hilbert-Kalküle)* legen vornehmlich Axiome fest – Einsetzungsmöglichkeiten in Schemata wie $A \vee \neg A$, $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ und dergleichen mehr – und dann typischerweise nur sehr wenige Regeln, manchmal auch nur eine einzige Regel (typischerweise der Modus Ponens). David Hilbert, einer der größten Mathematiker des endenden 19. Jahrhunderts und des beginnenden 20. Jahrhunderts, förderte die Verbreitung dieser Art von deduktiven Systemen.

- *Systeme des natürlichen Schließens*, die u.a. auf den deutschen Logiker Gerhard Gentzen zurückgehen, bevorzugen Regeln gegenüber Axiomen, lassen annahmenbasierte Regeln zu (anders als in den axiomatischen Systemen) und versuchen, den intuitiven Beweisschritten in der Mathematik durch solche Regeln möglichst nahe zu kommen. Das von uns vorgestellte logische System ist eine Variante eines solchen Systems des natürlichen Schließens.

- *Sequenzenkalküle*, die ebenfalls von Gerhard Gentzen entwickelt wurden, bauen Herleitungen auf der Basis von Regeln auf, die unseren Metaregeln von oben ähneln: Die Regeln im Sequenzenkalkül sind also typischerweise "Schlüssen von Schlüssen auf Schlüsse".

- *Semantische Tableaux-Systeme* (Beth-Kalküle, Baumkalküle), welche von dem niederländischen Logiker Evert Willem Beth eingeführt wurden, sind logische Regelsysteme, die danach trachten, die Herleitungsregeln möglichst den Wahrheitstafeln für die aussagenlogischen Junktoren nachzubilden, sodass sich eine Art syntaktisch-semantische Mischform des regelgeleiteten Schließens ergibt.

Diese verschiedenen Weisen, eine Herleitungsordnung festzulegen, haben alle ihre spezifischen Vor- und Nachteile: Manche sind sehr bequem, was das tatsächliche Herleiten betrifft (z.B. die Systeme des natürlichen Schließens), andere sind sehr leicht auf der Metaebene überschaubar und analysierbar (z.B.

die axiomatischen Systeme), wieder andere erlauben auf der Metaebene den Beweis tiefliegender mathematischer Sätze über das Herleiten (z.B. die Sequenzenkalküle). Aber alle sind so aufgebaut, dass sie zu einem Herleitbarkeitsbegriff für die Aussagenlogik führen, der sich gemessen an dem semantischen Begriff der logischen Folge als korrekt und vollständig erweist.

Damit wäre die Aussagenlogik in allen ihren zentralen Teilen – der Definition der aussagenlogischen Sprache, der Definition der wesentlichen semantischen Begriffe (speziell der logischen Folge) und der Definition der wesentlichen syntaktischen Begriffe (speziell der Herleitbarkeit) – abgeschlossen. Darüber hinaus haben wir ausführlich behandelt, wie sich die Aussagenlogik zur logischen Repräsentierung und zur logischen Analyse von Aussagesätzen und Argumenten der natürlichen Sprache einsetzen lässt. Schließlich haben wir damit auch unseren nächsten Schritt vorbereitet: Die aussagenlogische Sprache und alle wichtigen semantischen und syntaktischen Begriffe der Aussagenlogik zur sogenannten *Prädikatenlogik* zu erweitern. Dies wird das Thema des zweiten Teiles dieses Buches sein.

6.9 Übungen

Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $p \to q \vee (r \wedge s), t \to q \vee (r \wedge s) \vdash p \vee t \to q \vee (r \wedge s)$
2. $(p \wedge q) \wedge r \vdash r \vee s$
3. $p \wedge q \wedge r \vdash r \vee s$
4. $p \vee q, p \to r, \neg r \vdash q \vee s$
5. $(p \wedge q) \vee r, r \to \neg q, \neg\neg(q \wedge r) \vdash p$
6. $(p \wedge q) \wedge r, p \to \neg s, q \to \neg t \vdash \neg s \wedge \neg t$
7. $\neg p \wedge q, p \vee (r \to \neg q), \neg r \to \neg\neg(s \wedge t), \neg\neg t \vee r \vdash s \wedge t$
8. $p \vee (q \wedge \neg q) \vdash p$
9. $p \vee q, p \vee \neg q \vdash p$
10. $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$
11. $p \to q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$
12. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$
13. $p \to (q \to r) \vdash p \wedge q \to r$
14. $p \to q \vdash p \wedge r \to q \wedge r$
15. $p \to q, p \vee r \vdash q \vee r$
16. $p \to \neg p \vdash \neg p$
17. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
18. $\neg(p \vee q) \vee (s \to t), p \wedge s, t \to r \vdash r$

Kapitel 7

Appendix: Nochmals die materiale Implikation

Wir hatten in Kapitel 5 die etwas gewöhnungsbedürftige Wahrheitstafel der materialen Implikation kennengelernt. Wie wir schnell feststellen konnten, war diese die einzige Wahrheitstafel, die überhaupt für eine semantische Charakterisierung der natursprachlichen 'wenn... dann...' Verknüpfung (im Indikativ) mittels einer Wahrheitstafel mit klassischen Wahrheitswerten in Frage kam. Was zu jenem Zeitpunkt aber offengeblieben war: Wieso sollte es überhaupt möglich sein, das 'wenn... dann...' auf Basis einer solchen Wahrheitstafel zu interpretieren? *Welche positiven Gründe könnte man wohl dafür angeben, dass diese Wahrheitstafel das natursprachliche 'wenn... dann...' hinreichend gut einfängt?*

Ohne dies an den nämlichen Stellen weiter zu vertiefen, haben wir im letzten Kapitel ein ebensolches Argument zugunsten der Wahrheitstafel der materialen Implikation angegeben. Wir haben nämlich – neben vielen anderen Herleitungen – auch folgende Herleitungen durchgeführt:

- $\neg p \lor r \vdash p \to r$

  $\underline{1.\ \neg p \lor r}$ (P1)

  2. $\| \; p$ (KB-Annahme)

  3. $\| \; \neg\neg p$ 2. (DN1)

  4. $\| \; r$ 1., 3. (DS1)

  5. $p \to r$ 2.–4. (KB)

- $p \to q \vdash \neg p \vee q$

  $\underline{1.\ p \to q}$ (P1)

  2. $\|\ p$ (FU-Annahme 1)

  3. $\|\ q$ 2., 1. (MP)

  4. $\|\ \neg p \vee q$ 3. (ADD2)

  5. $\|\ \neg p$ (FU-Annahme 2)

  6. $\|\ \neg p \vee q$ 5. (ADD1)

  7. $\neg p \vee q$ 2.–6. (FU)

Anders ausgedrückt: $\neg p \vee r$ (bzw. $\neg p \vee q$) und $p \to r$ (bzw. $p \to q$) haben sich als deduktiv ununterscheidbar herausgestellt! Die eine Formel ist jeweils aus der anderen ableitbar. Dieselben Herleitungen ließen sich übrigens selbstverständlich auch durchführen, wenn man 'p' durch 'A' und 'q' durch 'B' ersetzen würde. Das heißt aber auch: Wer immer alle der folgenden Herleitungsregeln für akzeptabel hält, der muss dann auch $\neg A \vee B$ und $A \to B$ als für alle logischen Zwecke "gleichwertig" erachten:

(MP) $A, A \to B \vdash B$ (Modus Ponens)

(DS1) $A \vee B, \neg A \vdash B$ (Disjunktiver Syllogismus 1)

(ADD1) $A \vdash A \vee B$ (Addition 1)

(ADD2) $B \vdash A \vee B$ (Addition 2)

(DN1) $A \vdash \neg\neg A$ (Doppelte Negation 1)

(KB) Wenn $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$ eine Schlussregel ist, so ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, B \vdash C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C}$$

(FU) Wenn $A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ und $\neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ Schlussregeln sind, dann ist auch $B_1, \ldots, B_n \vdash C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A, B_1, \ldots, B_n \vdash C \quad \neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C}{B_1, \ldots, B_n \vdash C}$$

Denn nur auf diesen Regeln fußt die wechselseitige Ableitbarkeit von $\neg A \vee B$ und $A \to B$. Die Wahrheitstafel von $\neg A \vee B$ ist aber gerade die der materialen Implikation. Und dass diese Wahrheitstafel für die semantische Analyse von $\neg A \vee B$ gut geeignet ist, ist kaum zu bestreiten. Dann sollte dieselbe Wahrheitstafel aber auch ebensogut für die semantische Analyse der Formel $A \to B$ geeignet sein, denn diese ist – siehe oben – deduktiv "gleichwertig". Was auch heißt: Wenn unsere Herleitungsregeln semantisch korrekt sind, sollten $\neg A \vee B$ und $A \to B$ auch semantisch "gleichwertig", also logisch äquivalent sein; d.h.: dieselbe Wahrheitstafel besitzen. Die oben ausgedrückten Herleitbarkeitsbeziehungen, die zumindest für das 'wenn-dann' im Indikativ sehr plausibel scheinen, stellen also einen sehr guten Grund dar zu glauben, dass das natursprachliche 'wenn-dann' im Indikativ der Wahrheitstafel der materialen Implikation genügt.

Oder aber man bestreitet wenigstens eine der Herleitungsregeln, die oben angeführt sind: Wenn Sie an der Repräsentierbarkeit des 'wenn… dann…' mittels der materialen Implikation zweifeln, welche der obigen Herleitungsregeln würden Sie denn aufgeben wollen?

(Wir werden im zweiten Teil dieses Buches, welcher der Prädikatenlogik gewidmet sein wird, auch noch ein weiteres Argument zugunsten der Wahrheitstafel der materialen Implikation kennenlernen.)

Teil II

Prädikatenlogik

Kapitel 8

Prädikatenlogische Repräsentierung

In Kapitel 2 haben wir als eine Kategorie komplexer aber aussagenlogisch unzerlegbarer Aussagesätze die der *generellen Sätze* genannt, insbesondere derjenigen Sätze, die dieselbe logische Form aufweisen wie die Sätze

- Alle Österreicher sind strebsam und fleißig.
- Es gibt Österreicher, die strebsam und fleißig sind.

Solche Sätze nennt man Allsätze und Existenzsätze. Im Rahmen der prädikatenlogischen Sprache werden Sätze dieser Art nunmehr *zerlegbar* sein.

In gewissem Sinne ist die Prädikatenlogik eine Erweiterung der Aussagenlogik. In den folgenden Kapiteln möchten wir präzisieren, in *welchem* Sinne die Prädikatenlogik die Aussagenlogik erweitert. Wir haben bereits behandelt, was ein logisches System ist. Ein solches besteht aus drei Komponenten: Einer Sprache, einer Semantik und einer Herleitungsordnung. Wir wollen dementsprechend in Folge genau diese drei Themen behandeln und wenden uns zuerst der prädikatenlogischen Sprache zu. Dann werden wir eine formale Semantik für die Prädikatenlogik kennenlernen, in der wir die Begriffe der prädikatenlogischen Interpretation sowie der prädikatenlogischen Wahrheit, logischen Folge, logischen Gültigkeit und Erfüllbarkeit definieren werden. Schließlich werden wir unseren aussagenlogischen Kalkül des natürlichen Schließens um prädikatenlogische Schlussregeln erweitern. Das Ziel wird letztendlich dasselbe sein wie in der Aussagenlogik, nämlich natursprachliche Aussagesätze und Argumente in einer formalen Sprache zu repräsentieren, um auf diese Weise die präzisen Definitionen diverser wichtigen semantischen und deduktiven Begriffe, welche die formale Zielsprache zulässt, auch auf die na-

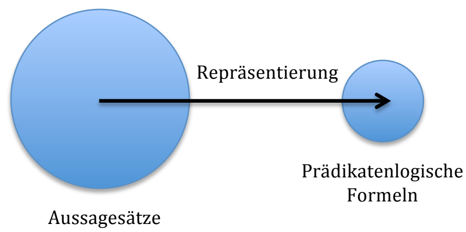


Abbildung 8.1: Prädikatenlogische Repräsentierung

türliche Sprache übertragen zu können. Nur wird sich die formale Sprache der Prädikatenlogik als bei weitem ausdrucksstärker und gehaltvoller als die einfache Sprache der Aussagenlogik herausstellen.

Wir beginnen zunächst mit einer mehr oder weniger "intuitiven" Erläuterung der prädikatenlogischen Sprache, und zwar zunächst soweit, als diese zum – verglichen mit dem aussagenlogischen Niveau – "feingliedrigeren" Repräsentieren von natursprachlichen Sätzen und Argumenten eingesetzt werden kann.

Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zur aussagenlogischen Sprache:

(i) Die *atomaren Formeln* verhalten sich anders – sie sind zerlegbar, wenn auch nicht in weitere Formeln, sondern in Zeichen anderer Art.

(ii) Es werden zusätzliche logische Zeichen – die *Quantoren* – eingeführt, um damit eine neue Kategorie komplexer Formeln bilden zu können, nämlich die der All- und Existenzformeln.

Beginnen wir mit dem ersten Punkt: In der aussagenlogischen Sprache repräsentierten wir den Satz

- Herbert ist Oberösterreicher.

als:

- p

Die Menge der Aussagevariablen nannten wir auch: die Menge der atomaren Formeln unserer aussagenlogischen Sprache. In der Prädikatenlogik bleiben wir nun nicht bei solch einfachen Repräsentierungen einfacher Aussagesätze stehen, sondern wir betrachten einen einfachen Aussagesatz wie den obigen als zerlegbar in weitere logisch sinnvolle (wenn auch nicht satzartige) Teile. In dem obigen deutschen Aussagesatz wird dem Namen (singulären Term) 'Herbert' ein einstelliges Prädikat (einstelliger genereller Term) 'Oberösterreicher' beigelegt, und wir erhalten dadurch einen einfachen Aussagesatz. Diese

Struktur spiegelt sich in der prädikatenlogischen Sprache wider, indem wir den umgangssprachlichen Satz etwa wie folgt repräsentieren:

- $O(h)$

Dabei soll O eine Abkürzung für 'Oberösterreicher' und h eine Abkürzung für 'Herbert' sein. Wir schreiben also immer zuerst den (n-stelligen) generellen Term an, sodann eine linke Klammer, dann n singuläre Terme (getrennt durch Beistriche) und schließlich eine rechte Klammer. Dass wir 'Herbert' dabei durch ein formales Zeichen repräsentieren, das wir mit 'h' bezeichnen, ist natürlich recht willkürlich gewählt – wir hätten genauso gut die Bezeichnung 'a' oder 'b' wählen können – nur erinnert 'h' eben mehr an 'Herbert'. Eine wichtigere Konvention besteht darin, singuläre Terme durch Kleinbuchstaben abzukürzen und generelle Terme durch Großbuchstaben, und an diese Konvention werden wir uns im Folgenden auch halten.

Ein Aussagesatz der obigen Form ist von der allereinfachsten Art – *ein* genereller Term und *ein* singulärer Term. Wir wollen bereits hier ein wenig die semantische Intuition, die hinter solchen Sätzen steckt, kennenlernen, damit wir atomare Aussagesätze später besser erkennen können.

Ein singulärer Term von der Art eines Eigennamens bzw. – wie wir später in unserer formalen Sprache sagen werden – eine *Individuenkonstante* bezeichnet immer genau ein Ding in der "Welt". Unser h bezeichnet die Person Herbert; stellen wir uns vor, es wäre eine ganz bestimmte Person damit gemeint. Diese Person Herbert ist also das *Referenzobjekt* des Terms h; der Term h bezieht sich auf (referiert auf) Herbert.

Von generellen Termen sagt man üblicherweise, dass sie Eigenschaften oder Relationen – zusammengenommen: Attribute – ausdrücken. Wir haben aber bereits in der Aussagenlogik angedeutet, dass die klassische Aussagen- und Prädikatenlogik eine *rein extensionale* Logik ist. Eigenschaften gehören jedoch in den Bereich der *Intensionen*. Daher wendet man sich in der Prädikatenlogik einem "extensionalen Korrelat" von Attributen zu, also einer Extension oder was man in der (etwas verstaubten) Tradition 'Begriffsumfang' zu nennen pflegt. Im Falle eines einstelligen Prädikats umfaßt dieser Begriffsumfang genau diejenigen Dinge, die die durch den generellen Term ausgedrückte Eigenschaft besitzen. Unser Term O drückt die Eigenschaft, Oberösterreicher zu sein, aus. Also ist die Extension dieses Terms die Menge aller Dinge, die die Eigenschaft, Oberösterreicher zu sein, besitzen – also die Menge aller Oberösterreicher. Nun ist es einfach festzulegen, in welchem Fall ein solcher einstelliger atomarer Satz wahr bzw. falsch ist. Er ist nämlich genau dann wahr, wenn das Ding, welches von dem in ihm vorkommenden singulären Term bezeichnet wird, Element der Menge ist, die die Extension des in ihm vorkommenden generellen Terms ist. Sonst ist er falsch. $O(h)$ ist also wahr genau dann, wenn das von h bezeichnete Ding – Herbert – ein Element der Extension von O ist – der Menge der Oberösterreicher.

Generelle Terme können aber natürlich auch mehr als nur einstellig sein; in diesem Falle gehen sie auch mit mehr als nur einem singulären Term einher. Beispiele für solche natursprachlichen Aussagesätze wären:

- Die Erde kreist um die Sonne.
- Heinz Fischer ist Bundespräsident von Deutschland.
- Herbert fährt von Linz nach Wien.

Entsprechende Repräsentierungen dafür sind:

- $K(e, s)$
- $B(f, d)$
- $F(h, l, w)$

Hier haben wir zwei- und dreistellige generelle Terme bzw. Prädikate verwendet.

Die Semantik für atomare Sätze mit mehr als nur einem singulären Term ist ganz ähnlich der Semantik der Sätze mit einstelligen generellen Termen. Allein die Wahrheitsbedingungen sind etwas komplizierter. Wir werden diese bald – bei der Festlegung der formalen Semantik für die Prädikatenlogik – genauer kennenlernen.

Formeln der bislang behandelten Art nennen wir 'atomare Formeln' der prädikatenlogischen Sprache; die atomaren Formeln in der Prädikatenlogik sind also ganz anders beschaffen als die atomaren Formeln in der Aussagenlogik – die prädikatenlogischen atomaren Formeln sind sozusagen der "prädikatenlogische Ersatz" für die aussagenlogischen Aussagenvariablen. Wir legen also fest:

- *Atomare Formeln* sind Folgen von $n + 1$ sprachlichen Ausdrücken, deren erstes Glied ein n-stelligen Prädikatzeichen ist, und deren zweites bis $n + 1$-tes Glied n singuläre Terme sind (die wir als von Klammern umschlossen kennzeichnen und durch Kommata voneinander trennen); sie haben also die allgemeine Form

$$P^n(t_1, \ldots, t_n)$$

Atomare Formeln werden zur prädikatenlogischen Repräsentierung von einfachen Aussagesätzen in der natürlichen Sprache dienen. Dies sollte nun auch nicht mehr überraschend sein: Haben wir doch im Kapitel zur aussagenlogischen Analyse *einfache* Aussagesätze der *natürlichen* Sprache auf ganz ähnliche Art und Weise wie oben die *atomaren* Formeln der *prädikatenlogischen* Sprache charakterisiert.

Wir haben oben bereits erwähnt, dass die Analyse der atomaren Formeln nicht der einzige Unterschied zur aussagenlogischen Sprache ist, den wir in der prädikatenlogischen Sprache finden. Nehmen wir beispielsweise an, dass wir Folgendes behaupten:

- Die Erde ist ein Planet.

Dann dürfen wir doch daraus logisch folgern:

- Es gibt (mindestens einen) Planeten.

Denn wenn es wahr ist, dass die Erde ein Planet ist, dann ist es nicht möglich, dass es keine Planeten gibt – es existiert ja zumindest ein Beispiel, welches wir prinzipiell angeben könnten, wenn wir die Existenzbehauptung als wahr nachweisen wollten. In der Aussagenlogik könnten wir einen solchen Schluss jedoch gar nicht rekonstruieren: Aussagenlogisch betrachtet führt der obige Schluss nämlich von einer Aussagenvariablen p zu einer weiteren Aussagenvariablen q, und der Schluss von p auf q ist selbstverständlich nicht (aussagen-)logisch gültig. Dass der obige Schluss dennoch in einem Sinn logisch gültig ist, der über die Aussagenlogik hinausgeht, muss daran liegen, dass logische Zeichen in ihm vorkommen, denen wir im Rahmen der Aussagenlogik keine Bedeutung hätten zuweisen können. In der Tat kommt in dem letzteren Aussagesatz von oben ein neuer logischer Ausdruck vor, nämlich 'Es gibt' bzw. 'Es gibt mindestens einen' ('es gibt wenigstens einen', 'es existiert'). Dieser Ausdruck wird in der prädikatenlogischen Sprache durch ein über die vertikale Achse gespiegeltes 'E' wiedergegeben,

$$\exists$$

und er geht immer mit einer sogenannten Individuenvariable – etwa x – einher. Dieser Ausdruck $\exists$ heißt *Existenzquantor*. Wir schreiben also statt:

- Es gibt mindestens einen/eine/ein x

in unserer formalen prädikatenlogischen Sprache:

- $\exists x$

Wenn wir nun 'Die Erde ist ein Planet' in der prädikatenlogischen Sprache wie folgt repräsentieren

- $P(e)$,

dann repräsentieren wir den Aussagesatz ‘Es gibt Planeten’ entsprechend so:

- $\exists x P(x)$.

Wir lesen diese Formel in “reglementiertem Logiker-Deutsch”:

- Es gibt mindestens ein x, sodass x ein P (ein Planet) ist.

oder auch

- Es gibt mindestens ein x, sodass gilt: x ist ein P (ein Planet).

Formeln der obigen Art nennen wir *Existenzformeln* oder *existentiell quantifizierte Formeln*. Wir sehen, dass die Variable x in der vorigen Formel *zweimal* vorkommt. Einmal steht sie hinter dem Quantor, und ein anderes Mal ist sie Bestandteil der atomaren Formel $P(x)$. In dem Existenzsatz ist von der Erde nicht mehr die Rede – ein Name für einen konkreten Gegenstand kommt in der Tat gar nicht mehr vor, sondern nur mehr eine Individuenvariable, die sozusagen “für einen beliebigen Gegenstand steht”. Es wird nur mehr die Existenz von Planeten behauptet, nicht aber die Existenz des konkreten Planeten Erde. Die Existenz *irgendeines* Planeten reicht ja auch hin, um den Existenzsatz als wahr nachzuweisen. Die atomare Formel $P(x)$, welche Bestandteil der Existenzformel $\exists x P(x)$ ist, sagt für sich genommen *nichts* aus – sie ist eigentlich *nicht wahrheitswertfähig*, d.h., sie hat keinen wohlbestimmten Wahrheitswert, jedenfalls solange nicht, bis der Variable x ein spezifischer Wert gegeben wurde. Dies ist so ähnlich, wie wenn wir sagen:

- Das ist ein Planet,

wobei durch den Kontext nicht erkennbar ist, auf welches Ding sich ‘das’ bezieht. Auch dann ist eigentlich noch nicht festgelegt worden, ob dieser umgangssprachliche Satz wahr oder falsch ist. Wir müssen entweder den Kontext verdeutlichen oder aber ‘das’ durch einen Eigennamen – z.B. ‘die Erde’ – ersetzen, um einen wahrheitswertfähigen Satz zu erhalten. Zum Beispiel könnten wir die Variable ‘x’ durch eine *Individuenkonstante* – etwa ‘e’ – ersetzen. Die daraus resultierenden Formel $P(e)$ (von welcher wir ursprünglich ja ausgegangen sind) ist nun sehr wohl wahrheitswertfähig, denn die Konstante e bezeichnet ein bestimmtes Ding, nämlich die Erde, welche ja ein Planet ist. Diese atomare Formel ist also wahr und mithin wahrheitswertfähig.

Die andere “Methode”, aus der Formel $P(x)$ eine wahrheitswertfähige Formel zu “machen”, besteht darin, einen Quantor mit der entsprechenden Individuenvariable davor zu setzen – wie oben bereits gezeigt. Die durch diese

Existenzformel ausgedrückte Behauptung, dass es mindestens einen Planeten gibt, ist dann ebenfalls wahrheitswertfähig und hier sogar wahr.

Wir sehen also, dass wir in der Prädikatenlogik zwischen zwei Arten von Formeln unterscheiden können und müssen – denen, die ohne weitere Angaben wahr oder falsch sein können und denen, die dies nicht sein können (ohne Zuweisung eines Wertes zu einer Variablen oder dergleichen). Erstere Formeln werden wir später als *geschlossen* bezeichnen, zweitere Formeln als *offen*.

Wenden wir uns noch einem weiteren Beispiel zu: Der natursprachliche Satz

- Es gibt weibliche Universitätsprofessoren.

wird wie folgt repräsentiert:

- $\exists x(W(x) \land U(x))$

Denn der vorige Satz heißt doch nichts anderes als: Es gibt Universitätsprofessoren, die auch weiblich sind. Bzw.: Es gibt jemanden, der weiblich *und* Universitätsprofessor ist. (Die Reihenfolge von 'weiblich' und 'Universitätsprofessor' ist dabei nicht wirklich wichtig.)

Und der Satz

- Es gibt Universitätsprofessoren, die nicht weiblich sind.

wird repräsentiert mittels:

- $\exists x(U(x) \land \neg W(x))$

Hier wollen wir uns gleich die entsprechende Faustregel des Repräsentierens von Existenzsätzen merken:

(E) Natursprachliche *Existenzsätze*, in denen im Bereich des Quantors mehr als ein genereller Term vorkommt, werden meist durch eine Existenzformel repräsentiert, welche eine Konjunktionsformel enthält.

Denn wenn man sagt, dass es P-Dinge gibt, die auch Q-Dinge sind, dann sagt man doch nicht anderes als: Es gibt etwas, das ein P-Ding *und* ein Q-Ding ist.

In der Prädikatenlogik (wie z.B. auch in der Mathematik) werden in der Tat alle Sätze der folgenden Arten auf ein und dieselbe Weise mit Hilfe des Existenzquantors repräsentiert, nämlich mittels

$$\exists x(P(x) \land Q(x)):$$

- Es gibt etwas, das P und Q ist.
  (Z.B.: Es gibt etwas, das ein Mensch und sterblich ist.)

- Es gibt einige Dinge, die P und Q sind.
  (Z.B.: Es gibt einige Dinge, die Mensch und sterblich sind.)

- Es gibt einige P, die Q sind.
  (Z.B.: Es gibt einige Menschen, die sterblich sind.)

- Einige P sind Q.
  (Z.B.: Einige Menschen sind sterblich.)

- Manche P sind Q.
  (Z.B.: Manche Menschen sind sterblich.)

- Es gibt mindestens ein x, sodass x P ist und x Q ist.
  (Z.B.: Es gibt mindestens ein x, sodass x ein Mensch ist und x sterblich ist.)

D.h.: 'Einige' wird so verstanden, dass 'Einige sind so-und-so' auch wahr ist, wenn *genau ein* Ding so-und-so ist, so wie 'Einige sind so-und-so' auch wahr ist, wenn *alle* Dinge so-und-so sind (solange überhaupt nämliche Dinge existieren). 'Einige' meint also einfach nur *Existenz*, egal ob von genau einem Ding oder von vielen oder sogar von allen: $\exists x$ lässt schlichtweg offen, wie viele der nämlichen Dinge existieren. Die Unterschiede, die in der täglichen Kommunikation manchmal zwischen 'es gibt' und 'einige' gemacht werden, werden als zur Pragmatik natursprachlicher Äußerungen gehörig betrachtet und scheinen im logischen Existenzquantor nicht mehr auf. (Analoges gilt für 'manche'.) Ähnliches gilt auch für Äußerungen wie von 'Einige der Fußballspieler sind schon am Feld', die manchmal auch so verstanden werden, dass noch nicht alle Fußballspieler am Feld sind; dies ist bei existentiell quantifizierten Formeln *nicht* der Fall. Auf der anderen Seite lässt sich auch in der natürlichen Sprache durchaus sagen: 'Einige Fußballspieler sind schon am Feld, *ja sogar alle*.' Was so interpretiert werden kann, dass 'Einige der Fußballspieler sind schon am Feld' zumindest semantisch doch offen lässt, ob vielleicht doch auch alle der Fußballspieler schon am Feld sind. Es hängt dann vom Äußerungskontext ab, ob man zusätzlich zu der in der Äußerung semantisch enthaltenen Information weitere bloß pragmatische Informationskomponenten in die Äußerung "hineininterpretiert" oder auch nicht.

In der Prädikatenlogik darf man daher eine existentiell quantifizierte Formel wie

- $\exists x(U(x) \land \neg W(x))$

die

- Es gibt Universitätsprofessoren, die nicht weiblich sind.

repräsentiert, auch so lesen:

- Einige Universitätsprofessoren sind nicht weiblich.

bzw.

- Manche Universitätsprofessoren sind nicht weiblich.

Diese behaupten prädikatenlogisch auch nichts anderes als die Existenz von Universitätsprofessoren, die keine Frauen sind.

Neben dem Existenzquantor kommt in der prädikatenlogischen Sprache noch ein weiterer "ähnlich gearteter" Ausdruck vor, nämlich der *Allquantor*. Dieser Ausdruck wird durch ein über die horizontale Achse gespiegeltes 'A' wiedergegeben,

$$\forall$$

und er geht ebenfalls immer mit einer Individuenvariable einher:

- $\forall x$

Der natursprachliche Satz

- Alles ist materiell.

wird dann wie folgt repräsentiert:

- $\forall x M(x)$.

Formeln dieser Art nennen wir *Allformeln* oder *universell quantifizierte Formeln*. Und wir lesen die obige Formel etwas genauer als

- Für alle Dinge x gilt, dass x M (materiell) ist.

oder auch als

- Für alle Dinge x gilt: x ist M (materiell).

Wir können natürlich daraus, dass irgendein konkretes Ding, etwa der Salzburger Dom materiell ist, *nicht* auf den obigen Allsatz schließen. Umgekehrt läßt sich aber *aus* dem Allsatz, dass alle Dinge materiell sind, schließen, dass der Salzburger Dom materiell ist:

- $M(s)$

Dies könnten wir nun unter Voraussetzung des Allsatzes sogar für jedes beliebige Ding behaupten, also etwa auch für die Ludwig-Maximilians-Universität, Bertrand Russell und ebenso für die Zahl 2. Denn angenommen wirklich alles wäre materiell, dann müsste doch auch logisch folgen, dass u.a. auch die Ludwig-Maximilians-Universität, Bertrand Russell und die Zahl 2 materiell wären. 'Ding' in den Sätzen oben meint also etwas ganz und gar Allgemeines: Stattdessen könnte man auch 'Objekt' oder 'Gegenstand' sagen, aber in einem Sinne, in dem *alles* ein Objekt oder ein Gegenstand ist: Universitäten, Menschen, Zahlen,...

Oder man lässt 'Ding' überhaupt gleich weg:

- Für alle x gilt, dass x M (materiell) ist.

bedeutet nämlich genau dasselbe wie die nämlichen obigen Sätze.

Der Satz

- Alle Salzburger sind Österreicher.

wird entsprechend so repräsentiert,

- $\forall x(S(x) \to \ddot{O}(x))$.

Denn der Satz behauptet doch so viel wie: Für alle Dinge x gilt, wenn x ein Salzburger ist, dann ist x auch ein Österreicher.

Analog wird

- Alle Salzburger sind keine Deutsche.

mittels

- $\forall x(S(x) \to \neg D(x))$.

Genau dieselbe logische Form weist übrigens auch der Aussagesatz

- Kein Salzburger ist ein Deutscher.

auf: Denn dieser Satz besagt ja auch nur wieder, dass alle Salzburger Nicht-Deutsche sind.

Hier wollen wir uns die entsprechende Faustregel für das Repräsentieren von Allsätzen mit mehreren generellen Termen merken:

(A) Natursprachliche *Allsätze*, in denen im Bereich des Quantors mehr als ein genereller Term vorkommt, werden meist durch eine Allformel repräsentiert, welche eine Implikationsformel enthält.

Denn wenn man sagt, dass alle P-Dinge auch Q-Dinge sind, dann sagt man doch nicht anderes als: Für jedes Ding gilt, dass *wenn* es ein P-Ding ist, es auch ein Q-Ding ist.

Wenden wir uns nun einem philosophisch etwas interessanterem Beispiel zu:

- Alles hat eine Ursache.

Überlegen wir uns zuerst die logische Form dieses Satzes, indem wir diesen ein wenig reglementiert umformulieren, um seine logische Tiefstruktur mit Hilfe prädikatenlogischer Mittel sichtbar machen:

- Für alle x gilt: Es gibt ein y, sodass y die Ursache von x ist.

Damit ist es nun ein Leichtes, die prädikatenlogische Form des Satzes anzugeben:

- $\forall x \exists y U(y, x)$.

Wir sehen also, dass All- und Existenzquantoren auch gemischt vorkommen können. Wie sieht nun die prädikatenlogische Form von

- Es gibt etwas, das für alles eine Ursache ist.

aus? Offensichtlich muss das die Formel

- $\exists x \forall y U(x, y)$

sein. Diese beiden Sätze – und ihre Repräsentierungen – behaupten selbstverständlich etwas völlig Unterschiedliches, was an der Stellung der Quantoren deutlich wird. Im erstem Fall gibt es zwar eine Ursache für jedes Ding, es könnte aber sein, dass all diese Ursachen oder zumindest manche davon verschieden voneinander sind. Im zweiten Fall behaupten wir, dass es zumindest ein Ding gibt, welches für jedes Ding eine Ursache ist – damit hat aber jedes Ding dann ein und dieselbe Ursache bzw. ein und dieselben Ursachen, wenn es mehrere davon geben sollte.

Bringen wir noch ein weiteres Beispiel, einmal natursprachlich formuliert, dann etwas reglementiert wiedergegeben, schließlich prädikatenlogisch repräsentiert:

- Jeder Mensch hat einen Vater.
- Für alle x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann gibt es ein y, so dass y der Vater von x ist.
- $\forall x (M(x) \rightarrow \exists y V(y, x))$

Wenn wir beim Repräsentieren mehrere Quantoren in einer Formel verwenden, so müssen wir darauf achten, dass wir die Individuenvariablen, welche durch die Quantoren *gebunden* werden, richtig wählen. Hätten wir dies in letzterem Beispiel nicht beachtet, so hätten wir beispielsweise Folgendes erhalten können:

- $\forall x(M(x) \rightarrow \exists x V(x, x))$

Und dies besagt nicht das, was wir behaupten wollten, sondern vielmehr so etwas wie:

- Für alle Menschen gibt es etwas, das Vater von sich selbst ist.

Es stellt sich die Frage, ob wir ein formales Konstrukt wie $\forall x(M(x) \rightarrow \exists x V(x, x))$ überhaupt als Formel zulassen wollen oder nicht. In manchen prädikatenlogischen Sprachen wird verlangt, dass wir bei der Einführung eines neuen Quantors immer beachten, dass die Individuenvariable des Quantors nicht bereits in der zu quantifizierenden Formel durch einen anderen Quantor gebunden vorkommt. Wir wollen dies zwar toleranter handhaben, sodass sich $\forall x(M(x) \rightarrow \exists x V(x, x))$ später sehr wohl als korrekt gebildete prädikatenlogische Formel erweisen wird, beim Repräsentieren sollten wir jedoch immer die folgende dritte Faustregel des prädikatenlogischen Repräsentierens beachten:

(V) Kommen in einem natursprachlichen Satz *mehrere Quantoren* ineinander verschachtelt vor vor, so weise man den Quantoren in der Repräsentierung verschiedene Variablen zu.

'Ineinander verschachtelt' soll dabei heißen: Ein Quantor befindet sich in einem Teil eines Satzes, der in der Reichweite eines weiteren Quantors liegt, so wie etwa 'gibt es etwas, das ...' in obigem Beispielsatz im Bereich des Quantors 'Für alle (Menschen)' liegt.

Es ist auch möglich, zwei Existenzquantoren ineinander zu verschachteln: Zum Beispiel wird

- Es gibt eine Zahl, die kleiner als eine weitere Zahl ist.

durch

- $\exists x(Z(x) \wedge \exists y(Z(y) \wedge K(x, y)))$

repräsentiert.

Und ebenso lassen sich zwei Allquantoren ineinander verschachteln:

- Alle physikalischen Gegenstände sind mit allen physikalischen Gegenständen identisch.

wird zum Beispiel durch

- $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(P(y) \rightarrow x = y))$

wiedergegeben. (Der Aussagesatz ist selbstverständlich falsch, aber auch falsche Sätze sollen ja logisch repräsentiert werden können.)

Damit haben wir bereits alle sprachlichen Neuheiten der Prädikatenlogik kennengelernt: Atomare Formeln sind nunmehr strukturiert, wobei in ihnen singuläre und generelle Terme in einer bestimmten Reihenfolge vorkommen, und es gibt generelle Formeln mit Existenz- und Allquantoren, die sich beliebig ineinander verschachteln lassen. Daneben verwenden wir wieder die sprachlichen Ausdrücke, die uns bereits aus der aussagenlogischen Sprache bekannt sind – wie Junktoren und Hilfszeichen.

8.1 Prädikatenlogische Argumente und Argumentformen

Zur Repräsentierung von Argumenten haben wir natürlich auch in der Prädikatenlogik entsprechende Argumentformen zur Verfügung. Betrachten wir dazu das folgende einfache Argument:

> Österreich ist ein Staat.
>
> ―――――――――――――
>
> Daher gibt es Staaten.

Um ein Argument zu repräsentieren, repräsentieren wir – wie wir bereits aus der Aussagenlogik wissen – zuerst sämtliche Prämissen und dann die Konklusion. Die Prämisse des obigen Arguments wird wie folgt repräsentiert:

- $S(ö)$

Die Konklusion wird dann so repräsentiert:

- $\exists x S(x)$

Damit ergibt sich als prädikatenlogische Repräsentierung dieses Argumentes:

- $S(ö) \therefore \exists x S(x)$

Etwas allgemeiner formuliert, ist diese Argumentform von der folgenden Form:

(EE) $A[t/v] \therefore \exists v A[v]$

Wir müssen hierbei noch erklären, was die Zeichenkette '$A[t/v]$' zu bedeuten hat. Es handelt sich dabei um eine sogenannte *Substitution* oder Ersetzung (Einsetzung): $A[t/v]$ ist diejenige Formel, die aus der Formel $A[v]$ dadurch entsteht, dass überall dort, wo die Variable v *frei*, d.h. nicht in der Reichweite eines Quantorausdrucks der Form $\exists v$ oder $\forall v$ vorkommt, diese Variable v durch den singulären Term t ersetzt wird. Angewandt auf das vorige Beispiel: Die Formel $A[v]$ war dort die atomare Formel $S(x)$, die Variable v somit die Variable x, der singuläre Term t war dort $ö$, die Formel $A[t/v]$ war die Formel $S(ö)$ – das Resultat des Einsetzens von $ö$ für die freie Variable x in $S(x)$ – und die Formel $\exists v A[v]$ war natürlich nichts anderes als $\exists x S(x)$. Der Grund, warum wir eckige Klammern in '$A[v]$' benutzen, ist der, dass wir mit Ausdrücken wie '$A[v]$' nur signalisieren wollen, dass wir letztlich alle freien Vorkommnisse der Variable v in der Formel $A[v]$ ersetzen wollen; $A[v]$ kann dabei eine atomare oder eine komplexe Formel sein. Verwenden wir jedoch runde Klammern, wie in '$S(x)$', so halten wir damit fest, dass es sich jedenfalls um eine atomare Formel handeln soll. Man beachte auch, dass (EE) so gemeint ist, dass 'v' für eine beliebige Individuenvariable steht; 'v' könnte auch für 'y' oder 'z' stehen, wenn wir wollten. Ebenso steht 't' für einen beliebigen singulären Term.

Wir werden die Feinheiten sowie weitere Anwendungen dieser Substitutionsfunktion in späteren Kapiteln genauer behandeln. Hier sind einige zusätzliche Beispiele fuer Anwendungen von (EE):

- $P(a) \therefore \exists x P(x)$
- $R(x,b) \therefore \exists y R(y,b)$
- $R(x,b) \therefore \exists y R(x,y)$
- $Q(a) \therefore \exists x Q(a)$
- $P(x) \therefore \exists x P(x)$

Argumentformen der Form (EE) werden in der klassischen Prädikatenlogik als logisch gültig anerkannt. Man beachte, dass sich solche Schlüsse im Rahmen der Aussagenlogik niemals als logisch gültig erwiesen hätten, ja nicht einmal formal angeschrieben hätten werden können. Im prädikatenlogischen System des natürlichen Schliessens werden wir jedoch auf logische Schlussregeln zurückkommen, die (EE) ähneln werden.

Es gibt aber auch Prädikatenlogiken der sogenannten *freien Logik*[1], die solchen Regeln nicht uneingeschränkte Gültigkeit zusprechen, und zwar aufgrund von Argumenten der folgenden Art:

[1]Siehe [6].

Pegasus ist ein fliegendes Pferd.

Daher gibt es fliegende Pferde.

Die Repräsentierung dieses Argumentes ist

- $F(p) \therefore \exists x F(x)$

oder, etwas feingliedriger repräsentiert, was gemäß unserer alten Repräsentierungsregel (K) aus der Aussagenlogik vorzuziehen ist:

- $F(p) \wedge P(p) \therefore \exists x(F(x) \wedge P(x))$

Manche behaupten nun, dass es zwar wahr ist, dass Pegasus ein fliegendes Pferd ist, dass es jedoch nichtsdestotrotz keine fliegende Pferde gibt. Also sei das obige Argument ein Gegenbeispiel gegen (EE). Die Antwort der klassischen Prädikatenlogik darauf ist: Entweder ist die Prämisse des Argumentes ist *nicht* wahr, denn sie ist gar kein wahrheitswertfähiger Ausdruck – entsprechend ist ‘Pegasus ist ein fliegendes Pferd’ kein Aussagesatz – und zwar deshalb weil singuläre Terme wie das obige p bzw. ‘Pegasus’ kein Referenzobjekt besitzen. Oder aber sowohl die Prämisse als auch die Konklusion sind wahr, weil ‘Pegasus’ ein mythologisches (und somit eventuell ein bestimmtest abstraktes) Objekt bezeichnet und ‘fliegende Pferde’ sich sowohl auf biologische als auch auf mythologische fliegende Pferde beziehen kann. Diese Repliken aus Sicht der klassischen Logik sind freilich umstritten. Im Rahmen unserer Vorlesung werden wir Fragen dieser Art einfach dadurch vermeiden, dass wir von vornherein voraussetzen werden, dass wir es nur mit Individuenkonstanten bzw. Eigennamen zu tun haben werden, die auch ein Referenzobjekt besitzen.

Hier ist ein weiteres natursprachliches Argument:

Alle Wiener sind Säugetiere.

Sokrates ist ein Wiener.

Also ist Sokrates ein Säugetier.

Die prädikatenlogische Form dieses Argumentes ist:

- $\forall x(W(x) \rightarrow S(x)), W(s) \therefore S(s)$

Dieses wird sich als (prädikaten-)logisch gültig herausstellen. Wenn wir beim prädikatenlogischen Herleiten dann entsprechend die Regel des konditionalen Beweises anwenden, so werden wir damit auch

- $\forall x(W(x) \to S(x)) \therefore (W(s) \to S(s))$

als deduktiv gültig nachweisen können. Und diese Argumentform ist eine Instanz von:

(UB) $\forall v A[v] \therefore A[t/v]$

Wieder wird dabei ein beliebiger singulärer Term t – im obigen Beispiel: s – für die Variable v (oben: x) eingesetzt. Einige weitere Beispiele für (UB) wären:

- $\forall x P(x) \therefore P(b)$
- $\forall y R(y, a) \therefore R(a, a)$
- $\forall x Q(x) \therefore Q(z)$

Wieder werden wir später auf logische Regeln, die obigem (UB) ähneln, zurückkommen, und wie vorher sollte man sich vor Augen halten, dass Regeln solcher Art in der Aussagenlogik nicht als logisch gültig gegolten haben, ja noch nicht einmal formulierbar gewesen wären.

In der Sprache der Prädikatenlogik können auch alle der viel bemühten Aristotelischen *Syllogismen* dargestellt werden. Ein typischer Syllogismus ist zum Beispiel:

Alle Halleiner sind Kärntner.

Alle Kärtner sind Österreicher.

Daher sind alle Halleiner Österreicher.

Dieser Syllogismus hat die folgende prädikatenlogische Form:

- $\forall x(H(x) \to K(x)), \forall x(K(x) \to O(x)) \therefore \forall x(H(x) \to O(x))$

Umgekehrt können jedoch viele der oben vorgestellten Repräsentierungen *nicht* in der traditionellen Sprache der Aristotelischen Syllogismen durchgeführt werden. Und was das logische Schließen betrifft, wäre der logisch gültige Schluss von

- $\exists x \forall y R(x, y)$ ("Es gibt etwas, das zu allem in der R-Beziehung steht")

auf

- $\forall y \exists x R(x, y)$ ("Für jedes Ding gibt es etwas, das zu ihm in der R-Beziehung steht") in der Syllogistik weder formulierbar noch als logisch gültig nachweisbar gewesen. Der entscheidende Schritt in der Entwicklung der modernen Logik durch Gottlob Frege und andere bestand gerade darin, über die sprachlichen und logischen Beschränkungen der traditionellen Aristotelischen Syllogistik hinauszugehen. Dies gelang durch die Entdeckung der modernen Prädikatenlogik, deren Sprache wir nun im nächsten Kapitel präzise entwickeln werden.

8.2 Übungen

Übung 8.1 Erklären Sie, was eine atomare Formel der prädikatenlogischen Sprache ist!

Repräsentieren Sie die folgenden natursprachlichen Aussagesätze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Anatol ist Gerber.
2. Anatol liebt Barbara.
3. Anatol geht mit Barbara von Drösselkirchen nach Cronberg.
4. Anatol und Barbara gehen von Cronberg nach Drösselkirchen.
5. Anatol arbeitet mit Barbara in Cronberg.

Übung 8.2 Welche Quantoren gibt es in der prädikatenlogischen Sprache, und was bedeuten sie?

Wie werden im allgemeinen Existenzsätze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Wie werden im allgemeinen Allsätze, welche mehr als einen generellen Term enthalten, repräsentiert?

Repräsentieren Sie die folgenden natursprachlichen Aussagesätze in der prädikatenlogischen Sprache:

1. Es gibt keinen Gerber in Cronberg.
2. Alle Bürger in Drösselkirchen sind unzufrieden.
3. Alle Bürger in Drösselkirchen jubeln, aber manche Bürger in Cronberg sind verärgert.
4. Alle Österreicher sind keine Philosophen.
5. Alle Österreicher sind nicht keine Philosophen.
6. Nicht alle Österreicher sind keine Philosophen.
7. Es gibt Österreicher, die Philosophen sind.
8. Es gibt Österreicher, die keine Philosophen sind.
9. Es ist nicht der Fall, daß es Österreicher gibt, die Philosophen sind.

10. Es ist keineswegs so, daß manche Österreicher keine Philosophen sind.

11. Alle Salzburger sind Österreicher und Europäer.

12. So mancher Oberösterreicher lebt in Salzburg.

13. Jeder Mensch hat eine Mutter und einen Vater, aber nicht jeder Mensch hat Kinder.

14. Es gibt ein Wesen, welches alle Dinge erschaffen hat.

15. Manche Menschen besitzen ein Auto.

16. Alle Deutschen beneiden sämtliche Bundestagsabgeordnete.

Kapitel 9

Die prädikatenlogische Sprache

Wie bereits für die aussagenlogische Sprache geschehen, werden wir nun auch die prädikatenlogische Sprache präzise festlegen, und analog zur Vorgangsweise in der Aussagenlogik beginnen wir auch hier mit dem Alphabet (Vokabular).

9.1 Das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache

Das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache setzt sich wiederum aus deskriptiven Zeichen, logischen Zeichen und Hilfszeichen zusammen:

1. Deskriptive Zeichen:
   (a) Abzählbar viele Individuenkonstanten: $a_1, a_2, a_3, \ldots$
   (b) Abzählbar viele Prädikate:
   $P_1^n, P_2^n, P_3^n, \ldots$ (für jede Stellenanzahl $n \geq 1$)
2. Logische Zeichen:
   (a) Junktoren: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
   (b) Quantoren: $\exists, \forall$
   (c) Abzählbar unendlich viele Individuenvariablen:
   $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$
3. Hilfszeichen:
   (a) (,)

(b) ,

Man beachte dabei: Die deskriptiven Zeichen dürfen von uns – passend je nach Anwendung und Zweck – frei gewählt werden. Jede solche Wahl führt dann zu genau einer prädikatenlogischen Sprache; es gibt demnach auch mehr als eine prädikatenlogische Sprache.

Die logischen Zeichen und die Hilfszeichen hingegen sind fix und für alle prädikatenlogischen Sprachen verbindlich.

Wenn wir oben 'abzählbar viele' schreiben, meinen wir: endlich viele oder abzählbar unendlich viele, je nachdem, wieviele Individuenkonstanten oder Prädikate wir zum Repräsentieren natursprachlicher Sätze annehmen wollen. 'endlich viele' schließt dabei auch den Fall 0 ein, d.h. wir könnten auf Individuenkonstanten oder Prädikate bestimmer Stelligkeit auch völlig verzichten, wobei wir jedoch annehmen wollen, dass zumindest irgendein Prädikat in unserem Alphabet vorhanden ist. Wie früher bei den Aussagenvariablen setzen wir außerdem jedenfalls abzählbar *unendlich* viele Individuenvariablen als gegeben voraus. Statt 'x_1', 'x_2', 'x_3' werden wir meistens einfach 'x', 'y', 'z' schreiben, um wo immer möglich die Verwendung von Subindizes zu vermeiden. Ähnlich werden wir auch 'a' und 'b' für, respektive, 'a_1' und 'a_2' schreiben, sowie 'P' für 'P_1^1' und 'R' für 'P_1^2'.

Obwohl sich semantisch gesehen die Individuenvariablen – wie die Individuenkonstanten – auf Einzeldinge (*Individuen*) in der Welt beziehen werden, wollen wir sie – anders als die Individuenkonstanten – als *logische* Zeichen auffassen, und zwar deshalb weil die Individuenvariablen gemeinsam mit den Quantoren eine Einheit bilden: Die Individuenvariablen sollen ja letztlich nur die Stellen in einer Formel festlegen, auf die sich Vorkommnisse von Existenz- oder Allquantoren beziehen. Wie die Quantoren selbst zählen daher auch die Individuenvariablen zu den logischen Zeichen.

Wir setzen dazu noch fest:

- Für alle t gilt: t ist ein *singulärer Term* gdw t ist eine Individuenkonstante oder t ist eine Individuenvariable.

Allgemein werden wir Kleinbuchstaben wie 't' (mit oder ohne Index) als Metavariablen für singuläre Terme der prädikatenlogischen Sprache verwenden. Wann immer wir also

t

schreiben, meinen wir eine beliebige Individuenkonstante oder Individuenvariable. Ab und zu werden wir auch 'c' als Metavariable für Individuenkonstanten und 'v' als Metavariable für Individuenvariablen verwenden.

Für die Bildung prädikatenlogischer Argumentformen fügen wir schließlich wie schon in der Aussagenlogik unserem Alphabet noch das Zeichen für den formalen Konklusionsindikator hinzu:

- Daher-Zeichen: $\therefore$

Prädikatenlogische Argumentformen werden dann genau wie in der Aussagenlogik als Folgen der Form $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ definiert, mit dem einzigen Unterschied, dass die zugrundeliegende Definition dessen, was eine Formel ist – um welche Art von Objekten es sich also bei $A_1, \ldots, A_n, B$ handelt – in der Prädikatenlogik eine andere ist. Dieser Definition werden wir uns in der nächsten Sektion zuwenden.

9.2 Die Grammatik der prädikatenlogischen Sprache

Wir legen nun auf die bereits aus der Aussagenlogik bekannte Art und Weise rekursiv (oder induktiv) fest, was eine prädikatenlogische Formel ist. 'Rekursiv' heißt wieder schlicht: Ob eine komplexe Zeichenfolge eine Formel ist, hängt per definitionem davon ab, ob gewisse ihrer Teile Formeln sind und wie diese zusammengesetzt wurden; ob diese Teile Formeln sind, hängt wiederum davon ab, ob deren Teile Formeln sind und wie diese zusammengesetzt wurden; usw. Bei den einfachsten Formeln, den atomaren Formeln, legt man schließlich direkt fest, wann man es mit einer Formel zu tun hat und wann nicht (der sogenannte Rekursionsanfang).

Die Definition besteht wieder aus syntaktischen Regeln (Formationsregeln), für deren Formulierung wir erneut unsere Metavariablen 'A', 'B', 'C', 'D',... verwenden, welche nunmehr für beliebige prädikatenlogische Formeln stehen. Syntaktische Definitionen wie diese sind in der Prädikatenlogik stillschweigend auf das gewählte Alphabet relativiert, welches festlegt, welche Prädikate und Individuenkonstanten bei der Bildung atomarer Formeln zur Verfügung stehen.

(1) Wenn P^n ein n-stelliges Prädikat ist und $t_1, \ldots, t_n$ n singuläre Terme sind, so ist $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.

(2) Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\neg A$ eine Formel.

(3) Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \wedge B)$ eine Formel.

(4) Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \vee B)$ eine Formel.

(5) Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \rightarrow B)$ eine Formel.

(6) Wenn sowohl A als auch B Formeln sind, dann ist auch $(A \leftrightarrow B)$ eine Formel.

(7) Wenn A eine Formel ist und v eine Individuenvariable ist, dann ist auch $\forall vA$ eine Formel.

(8) Wenn A eine Formel ist und v eine Individuenvariable ist, dann ist auch $\exists vA$ eine Formel.

(9) Nur solche Zeichenreihen sind Formeln, die sich mit Hilfe der Klauseln (1)–(8) bilden lassen.

Wir nennen die gemäß Regel 1 gebildeten Formeln auch '*atomare Formeln*', die gemäß Regel 2 gebildeten Formeln '*Negationsformeln*', die gemäß Regel 3 gebildeten Formeln '*Konjunktionsformeln*', die gemäß Regel 4 gebildeten Formeln '*Diskunktionsformeln*', die gemäß Regel 5 gebildeten Formeln '*Implikationsformeln*', die gemäß Regel 6 gebildeten Formeln '*Äquivalenzformeln*', die gemäß Regel 7 gebildeten Formeln '*Allformeln*' und schließlich die gemäß Regel 8 gebildeten Formeln '*Existenzformeln*'. Die nicht-atomaren Formeln werde ich auch '*komplexe Formeln*' nennen. Die gesamte Menge der prädikatenlogischen Formeln bezeichnen wir wieder mit '$\mathcal{F}$'.

Man beachte, dass in (7) und (8) beim Einführen der beiden Quantoren keine Extra-Klammern für dieselben eingefügt werden. Etwaige Klammern in $\forall vA$ und $\exists vA$ rühren rein von A her.

Hier einige Beispiele für den Formelaufbau: Nehmen wir an, unser Alphabet enthält das einstellige Prädikat P, das zweistellige Prädikat R und die Individuenkonstante a. Dann sind

- $P(x)$

und

- $R(x, y)$

gemäß Regel 1 atomare Formeln. Daher ist gemäß Regel 8, angewandt auf die letztere Formel, auch

- $\exists yR(x, y)$

eine Formel, und zwar eine existentiell quantifizierte, sowie gemäß Regel 5

- $(P(x) \rightarrow \exists yR(x, y))$

eine Implikationsformel. Somit ergibt sich gemäß Regel 7, dass

- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$

ebenfalls eine Formel ist. Letztere könnte zum Beispiel zur Repräsentierung des Aussagesatzes

- Jeder Vater hat ein Kind

wobei P für 'ist Vater' und $R(x, y)$ für 'y ist Kind von x' stehen würde. Man beachte, dass hier in der natursprüchlichen Übersetzung die singulären Terme in $R(x, y)$ umgekehrt zu lesen sind, dass also mit $R(x, y)$ gemeint ist, dass y ein Kind von x ist und nicht etwa, dass x ein Kind von y ist. Würden wir $R(x, y)$ als 'x ist ein Kind von y' lesen, dann wäre die obige Formel vielmehr eine Repräsentierung des Aussagesatzes 'Jeder Vater ist ein Kind (von jemandem)'.

Doch bleiben wir bei unsere ursprünglich intendiertes Leseart von $R(x, y)$: Entsprechend wäre dann

- Wenn Hannes Leitgeb ein Vater ist, dann hat er ein Kind

zu repräsentieren durch die Formel

- $(P(a) \rightarrow \exists y R(a, y))$

die analog zu vorher durch Anwendung unserer syntaktischen Regeln gebildet werden kann, allerdings indem man mittels Regel 1 bei den atomaren Formeln

- $P(a)$

und

- $R(a, y)$

beginnt. Genauso gilt: Da wie gesagt

- $R(x, y)$

wegen Regel 1 eine Formel ist, ist auch gemäß Regel 8

- $\exists x R(x, y)$

eine Formel und somit auch – wiederum auf Basis von Regel 8 –

- $\exists y \exists x R(x, y)$

Daraus ergibt sich mittels Regel 2, dass auch

- $\neg\exists y \exists x R(x, y)$

eine prädikatenlogische Formel ist usw. Alle diese Formeln sind also Elemente der oben von uns definierten Menge $\mathcal{F}$ der prädikatenlogischen Formeln.

Gemäß der Klauseln für die Quantoren-Formeln haben wir aber auch etwas auf den ersten Blick "Unsinniges" wie

- $\forall x P(a)$
- $\exists x (P(x) \land \forall x R(x, a))$

unter unseren Formeln. Mit ein bisschen gutem Willen können wir sogar diesen Formeln einen gewissen Sinn entlocken und sie natursprachlich wie folgt umformulieren:

- Alles ist so, daß a die Eigenschaft P hat.
- Es gibt etwas, das P ist, sodass alles in der Beziehung R zu a steht.

Normalerweise würden wir Aussagesätze dieser Art allerdings gar nicht äußern, sondern von vornherein das, was wir damit sagen wollen, anders formulieren, etwa mittels:

- a hat die Eigenschaft P.
- Es gibt etwas, das P ist, und außerdem steht alles in der Beziehung R zu a.

Und diese würde wir dann eher so repräsentieren:

- $P(a)$
- $(\exists x P(x) \land \forall x R(x, a))$

oder auch, was die zweite Formel betrifft, als

- $(\exists x P(x) \land \forall y R(y, a))$

Bei allen diesen Zeichenreihen handelt es sich auch wieder um Formeln gemäß der obigen Formationsregeln.

Auch wenn wir daher Formeln wie die vorigen von oben kaum in Repräsentierungen benötigen werden, so sollen sie uns doch nicht weiter stören. Sie als prädikatenlogische Formeln zuzulassen, gestattet es uns nämlich, die Definition unserer prädikatenlogischen Formelmenge so einfach wie nur möglich zu halten. (Und die "weniger hübschen" Formeln werden sich später als logisch äquivalent zu den gerade eben formulierten "hübscheren" Formeln herausstellen.)

Wir haben bereits im letzten Kapitel gesehen, dass nicht alle der so bestimmten Formeln ohne Zusatz weiterer Informationen "wahrheitswertfähig" sind, denn eine Formel der Form

- $P(x)$

sagt ja für sich genommen noch nichts aus, auch wenn wir uns unter P eine konkrete Eigenschaft wie etwa *Vater-Sein* vorstellen. Der Ausdruck

- x ist ein Vater

kann nicht für sich als wahr oder falsch betrachtet werden, denn es ist ja nicht bestimmt, von welchem x wir sprechen. Auch ist nicht gesagt, dass es um mindestens ein x oder eventuell um alle x gehen soll. Wie wir wissen, müssten wir entweder der Individuenvariable x kontextuell einen gewissen Wert zu kommen lassen ("vereinbaren wir, dass x hier für Kant stehen soll") oder x durch eine Individuenkonstante ersetzen, wie in

- $P(a)$,

oder wir müssten die Variable x durch einen Quantor "binden", wie in

- $\exists x P(x)$
- $\forall x P(x)$

um eine wahrheitswertfähige Formel zu erhalten. Während x in $P(x)$ frei ist, tritt dieselbe Variable in $\exists x P(x)$ und $\forall x P(x)$ gebunden auf. Solche Einteilungen von Variablenvorkommnissen innerhalb von Formeln werden wir in der nächsten Sektion genauer betrachten.

Wir können nun auch wie versprochen problemlos festlegen, was Argumentformen unserer prädikatenlogischen Sprache sind:

- Eine prädikatenlogische *Argumentform* ist eine Zeichenreihe von der Form $A_1, \ldots, A_n \therefore B$, wobei $A_1, \ldots, A_n, B$ prädikatenlogische Formeln sind; $A_1, \ldots, A_n$ sind dabei die Prämissen und B ist die Konklusion der Argumentform.

Hier sind noch einige weitere konkrete Beispiele für Formeln der prädikatenlogischen Sprache (immer gegeben das entsprechende Vokabular):

- $P_1^1(a_2)$
- $P_3^1(a_5)$
- $P_1^2(a_2, a_{17})$

- $(P_1^1(a_2) \vee P_3^1(a_5))$
- $\neg P_1^2(a_2, a_{17})$
- $\exists x_1(P_1^1(a_2) \vee P_3^1(x_1))$
- $\forall x_1 \neg P_1^2(a_2, x_1)$
- $(\neg\exists x_1(P_1^1(a_2) \vee P_3^1(x_1)) \to \forall x_1 \neg P_1^2(a_2, x_1))$
- $\forall x_5(\neg\exists x_1(P_1^1(x_5) \vee P_3^1(x_1)) \to \forall x_1 \neg P_1^2(x_5, x_1))$

Wie in der aussagenlogischen Syntax können wir jederzeit mit Hilfe von syntaktischen Strukturbäumen überprüfen, ob solche Zeichenketten auch wirklich prädikatenlogische Formeln sind.

Was zu guter Letzt die Klammerersparnisregeln betrifft, so übernehmen wir diese einfach aus der Aussagenlogik. Zum Beispiel dürfen wir in der vorletzten Formel oben die äußeren Klammern weglassen und die Formel somit so abkürzen:

- $\neg\exists x_1(P_1^1(a_2) \vee P_3^1(x_1)) \to \forall x_1 \neg P_1^2(a_2, x_1)$

9.3 Arten von Variablenvorkommnissen

Wir haben bereits anhand verschiedener Beispiele gesehen, dass Individuenvariablen auf zwei verschiedene Weisen in einer Formel auftreten können, nämlich *frei* oder *gebunden*. Zum Beispiel, im einfachsten Falle: Die Individuenvariable x kommt in der Formel $P(x)$ frei vor, während dieselbe Variable in $\exists x P(x)$ bzw. $\forall x P(x)$ ausschließlich gebunden vorkommt. In $P(x)$ liegt x nämlich nicht im Bereich eines Quantors, in $\exists x P(x)$ bzw. $\forall x P(x)$ liegt x jedoch jeweils im Bereich eines Quantors, der, wie man sagt, x bindet.

Entsprechend legen wir fest (wobei 'Formel' immer kurz für 'prädikatenlogische Formel' ist):

- Für alle Individuenvariablen v und alle Formeln A gilt:

  v kommt in A frei vor gdw

  v an wenigstens einer Stelle in A weder einem Quantor $\exists, \forall$ unmittelbar folgt, noch im Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks der Form $\exists v$ oder $\forall v$ liegt.

- Für alle Individuenvariablen v und alle Formeln A gilt:

  v kommt in A gebunden vor gdw

v an wenigstens einer Stelle in A einem Quantor $\exists, \forall$ unmittelbar folgt oder im Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks der Form $\exists v$ oder $\forall v$ liegt.

Die letzte Definition könnte man leicht vereinfachen, indem man auf der rechten Seite 'oder im Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks der Form $\exists v$ oder $\forall v$ liegt' einfach weglässt, denn wenn eine Variable in einer Formel im Bereich eines zugehörigen Quantorausdruckes vorkommt, dann muss die Variable natürlich auch wenigstens irgendwo in der nämlichen Formel unmittelbar nach einem Quantor vorkommen. Die obige Definition von 'kommt gebunden vor' ist nur deshalb naheliegend, weil sie die logische Struktur der Definition von 'kommt frei vor' nachahmt.

Bei diesen Definitionen soll gelten:

- Der *Bereich* eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks $\exists v$ oder $\forall v$ in einer prädikatenlogischen Formel A ist dasjenige Vorkommnis einer Teilformel von A, das auf das Quantorausdruckvorkommnis folgt.

Insbesondere:

- In der Formel $\exists vB$ bzw. $\forall vB$ ist das Vorkommnis von B der Bereich des anfänglichen Vorkommnisses von $\exists v$ bzw. $\forall v$.

(Mit 'Quantorausdruck' meinen wir immer Ausdrücke der Form $\exists v$ oder $\forall v$, während wir $\exists$ und $\forall$ bekanntlich kurz mit 'Quantor' bezeichnen.)

Ein Beispiel zum Thema Bereich: In der Formel

- $\exists x(P(x) \land \neg Q(x)) \to R(x, y)$

ist der Bereich des Vorkommnisses von $\exists x$ das Vorkommnis von

- $(P(x) \land \neg Q(x))$

in der obigen Implikationsformel. Das bedeutet auch, dass x in der obigen Implikationsformel frei vorkommt: Denn das letzte Vorkommnis von x (innerhalb von $R(x, y)$) folgt $\exists$ nicht unmittelbar nach, noch liegt dieses Vorkommnis von x im Bereich des hier einzigen Vorkommnisses eines Quantorausdrucks (nämlich von $\exists x$). x kommt in der Formel aber auch gebunden vor, was man an allen früheren Vorkommnissen von x in der Formel ersehen kann. Es ist also selbstverständlich möglich, dass ein und dieselbe Individuenvariable in ein und derselben Formel sowohl frei als auch gebunden vorkommt (an unterschiedlichen Stellen).

Darauf baut nun auch folgende Einteilung der prädikatenlogischen Formeln auf:

- Für alle Formeln A gilt: A ist *offen* gdw es mindestens eine Individuenvariable v gibt, sodass v in A frei vorkommt.

- Für alle Formeln A gilt: A ist *geschlossen* gdw A ist nicht offen, d.h. es gibt keine Individuenvariable v, sodass v in A frei vorkommt.

Wie bereits früher besprochen, sind nur die geschlossenen Formeln generell "wahrheitswertfähig", da nur sie ohne Zusatz weiterer Angaben entweder wahr oder falsch sind. Das ist auch der Grund, warum in der Literatur statt von geschlossenen Formeln auch manchmal von *(Aussage-)Sätzen* gesprochen wird, entsprechend unserer Definition von Aussagesätzen als sprachlichen Ausdrücken, die wahr oder falsch sind. Von offenen Formeln hingegen kann man nicht sinnvoll sagen, dass sie wahr oder falsch sind, es sei denn den Variablen, die in einer solchen offenen Formel frei vorkommen, wurde auf irgendeine Weise ein Wert – eine Bedeutung – zugesprochen.

Doch was genau bedeutet die Redeweise von "Vorkommnissen" eigentlich, derer wir uns bislang einfach stillschweigend bedient haben? (Im gegenwärtigen Kontext hat diese nämlich nichts mit der Unterscheidung 'Ausdrucksvorkommnis vs. Ausdruckstyp' aus dem anfänglichen Kapitel *Vorbemerkungen* zu tun.)

Damit ist hier Folgendes gemeint:

- Ein Vorkommnis einer Variable v in einer Formel A ist eine Stelle in A, an der v steht.

- Ein Vorkommnis eines Quantorausdrucks $\forall v$ in einer Formel A ist eine zusammenhängende Folge von Stellen in A, an denen $\forall v$ steht.

- Ein Vorkommnis eines Quantorausdrucks $\exists v$ in einer Formel A ist eine zusammenhängende Folge von Stellen in A, an denen $\exists v$ steht.

- Ein Vorkommnis einer Formel B in einer Formel A ist eine zusammenhängende Folge von Stellen in A, an denen B steht.

Stellen schließlich lassen sich durch Zahlen angeben (1. Stelle, 2. Stelle, 3. Stelle usw.), wobei jedes Zeichenvorkommnis in einer Formel eine eindeutig bestimmte Stelle einnimmt, welche somit mittels der Angabe von Zahlen festgehalten werden kann. Auch Hilfszeichen wie Klammern und Kommata werden wir bei der Angabe von Stellen berücksichtigen.

Zum Beispiel: Sei A die Formel

- $\forall x(P(x,y) \rightarrow \exists y Q(y))$

Dann ergeben sich die folgenden Vorkommnisse von Variablen, Quantorausdrücken und Formeln in A:

Vorkommnisse von x in A: 2. Stelle, 6. Stelle
Vorkommnisse von y in A: 8. Stelle, 12. Stelle, 15. Stelle
Vorkommnisse von $\forall x$ in A: 1.–2. Stelle
Vorkommnisse von $\exists y$ in A: 11.–12. Stelle
Vorkommnisse von $P(x, y)$ in A: 4.–9. Stelle
Vorkommnisse von $Q(y)$ in A: 13.–16. Stelle
Vorkommnisse von $\exists y Q(y)$ in A: 11.–16. Stelle
Vorkommnisse von $(P(x, y) \to \exists y Q(y))$ in A: 3.–17. Stelle
Vorkommnisse von $\forall x(P(x, y) \to \exists y Q(y))$ in A: 1.–17. Stelle

Es gibt also z.B. *genau ein* Vorkommnis von $Q(y)$ in A, namlich die zusammenhängende Folge von der 13. bis zur 16. Stelle.

Nachdem wir nun die Terminologie der 'Vorkommnisse' etwas präziser festgelegt haben, können wir auf dieser Basis auch die Begriffe, die wir am Anfang dieser Sektion eingeführt haben, etwas präziser anwenden. Insbesondere hatten wir oben die *Bereiche* von Quantorvorkommnissen in Formeln ebenfalls als Vorkommnisse aufgefasst, nämlich als Vorkommnisse von bestimmten Teilformeln. Im Falle des obigen A erhalten wir beispielsweise:

Bereich des einzigen Vorkommnisses von $\forall x$ in A: das Vorkommnis von $(P(x, y) \to \exists y Q(y))$ in A (3.–17.Stelle).
Bereich des einzigen Vorkommnisses von $\exists y$ in A: das Vorkommnis von $Q(y)$ in A (13.–16.Stelle).

Schließlich können wir die Arten von Variablenvorkommnissen in einer Formel noch genauer angeben: Oben sprachen wir einfach davon, dass eine Variable in einer Formel frei vorkommt (oder dass dies eben nicht der Fall ist). Was wir dabei aber nicht dazugesagt hatten, war: *Wo*, d.h. an welcher Stelle in einer Formel eine Variable frei vorkommt oder aber gebunden.

Dies lässt sich folgendermaßen präzisieren:

- Ein Vorkommnis einer Variable v in einer Formel A ist *gebunden*, wenn es sich innerhalb eines Vorkommnisses von $\forall v$ oder $\exists v$ in A befindet, oder wenn es sich im Bereich eines Vorkommnisses von $\forall v$ oder $\exists v$ in A befindet.

- Ein Vorkommnis einer Variable v in einer Formel A ist *frei*, wenn es nicht gebunden ist.

Zum Beispiel:

Das 1. Vorkommnis von x in A (2. Stelle) ist gebunden, da es sich innerhalb (1.–2. Stelle) des Vorkommnisses von $\forall x$ in A befindet.

Das 2. Vorkommnis von x in A (6. Stelle) ist gebunden, da es sich im Bereich (3.–17. Stelle) des Vorkommnisses von $\forall x$ in A befindet.

Das 1. Vorkommnis von y in A (8. Stelle) ist frei, da es sich weder innerhalb eines Vorkommnisses von $\forall y$ oder $\exists y$ in A befindet, noch im Bereich eines Vorkommnisses von $\forall y$ oder $\exists y$ in A befindet.

Das 2. Vorkommnis von y in A (12. Stelle) ist gebunden, da es sich innerhalb (11.–12. Stelle) des Vorkommnisses von $\exists y$ in A befindet.

Das 3. Vorkommnis von y in A (15. Stelle) ist gebunden, da es sich im Bereich (13.–16. Stelle) des Vorkommnisses von $\exists y$ in A befindet.

Die neue Terminologie von freien und gebundenen *Vorkommnissen* von Variablen in Formeln passt dabei immer noch mit unserer ursprünglichen Terminologie von 'eine Variable kommt in einer Formel frei bzw. gebunden vor' zusammen, und zwar so:

- v kommt in A frei vor, wenn es wenigstens ein freies Vorkommnis von v in A gibt (d.h., wenn v wenigstens *irgendwo* in A frei vorkommt).

- v kommt in A gebunden vor, wenn es wenigstens ein gebundenes Vorkommnis von v in A gibt (d.h., wenn v wenigstens *irgendwo* in A gebunden vorkommt).

Auf unser obiges Beispiel unserer Formel A bezogen:

x kommt in A nicht frei vor, d.h.: x kommt in A *nur* gebunden vor.

y kommt in A frei vor, denn das 1. Vorkommnis von y in A (8. Stelle) ist frei. y kommt in A außerdem gebunden vor (z.B. an der 12. Stelle). Aufgrund des Vorkommnisses einer freien Variable in A handelt es sich bei A daher gemäß unserer früheren Definition um eine offene Formel.

Freie Vorkommnisse von Variablen in Formeln sind schließlich auch diejenigen Stellen, in die wir später singuläre Terme einsetzen – substitutieren – werden. Im Unterschied dazu lässt sich in eine gebundene Variable nichts einsetzen, weil sonst der zugehörige Quantor eventuell "leerlaufen" würde, und weil gebundene Variablen eine andere Funktion haben, nämlich sich auf *alle* oder *einige* Dinge (je nach Quantor) zu beziehen. Zum Beispiel können wir in unserem obigen A für y die Variable z einsetzen, aber nur dort wo y frei vorkommt. Durch diese Ersetzung wird dann also aus A – oder wie wir auch schreiben können,

- $A[y]$: $\forall x(P(x, y) \to \exists y Q(y))$

wenn wir signalisieren wollen, dass wir gedenken, y in A zu ersetzen – die Formel

- $A[z/y]$: $\forall x(P(x, z) \to \exists y Q(y))$

in der wir alle freien Vorkommnisse von y (hier: die 8. Stelle) durch z ersetzt haben. Alle gebundenen Vorkommnisse von y werden durch die Substitution unverändert gelassen.

Genauso können wir y in A bzw. $A[y]$ durch eine Individuenkonstante a ersetzen, wenn wir wollen, wodurch sich

- $A[a/y]$: $\forall x(P(x, a) \to \exists y Q(y))$

ergibt. Sowohl bei $A[z/y]$ als auch bei $A[a/y]$ könnte man sich vorstellen, dass man sozusagen eine "Umbenennung" durchführt: Während in A bzw. $A[y]$ ausgesagt wird, dass es zu allen x, die in der P-Beziehung zu y stehen, etwas gibt, das Q ist, wird in $A[z/y]$ und $A[a/y]$ dasselbe von z und a ausgesagt – zu allen x, die in der P-Beziehung zu z/a stehen, gibt es etwas, das Q ist. Es gibt zwar kein Garantie, dass genau das ursprüngliche y-Objekt nun mittels z oder mittels a bezeichnet wird, denn das hängt ja auch von der Bedeutung von z bzw. a ab, aber rein syntaktisch wäre dies zumindest möglich.

Wir merken uns ganz allgemein:

- Für alle Formeln A, für alle singulären Terme t, für alle Variablen v:

  $A[t/v]$ ist diejenige Formel, die aus $A[v]$ dadurch entsteht, dass alle freien Vorkommnisse von v in A durch t ersetzt werden.

Wenn v in A überhaupt nicht frei vorkommt, dann ist $A[t/v]$ einfach identisch A – die Substitution hat dann keinerlei Effekt.

Es gibt jedoch auch Einsetzungen, die man definitiv nicht mehr als "harmlose" Umbennungen deuten kann. Nehmen wir zum Beispiel an, wir wollten y in obigem $A[y]$ durch x ersetzen: Dann ergäbe sich

- $A[x/y]$: $\forall x(P(x, x) \to \exists y Q(y))$

Diese Substitution führt nunmehr zu einer bedeutend drastischeren Bedeutungsveränderung, welche über die Bedeutungsveränderung beim Übergang von $A[y]$ zu $A[z/y]$ bzw. $A[a/y]$ hinausgeht: $A[x/y]$ sagt nämlich aus, dass es zu jedem Objekt, das mit sich selbst in der P-Beziehung steht, etwas existiert, das Q ist. Von Objekten, die *mit sich selbst in der P-Beziehung stehen*, war aber in der ursprünglichen Formel $A[y]$ überhaupt nicht die Rede! Bei dieser Substitution ist semantisch gesehen also etwas schiefgegangen. Ein ursprünglich *freies* Vorkommnis einer Variable (hier: von y) verwandelt sich in ein Variablenvorkommnis (hier: von x), welches durch einen Quantor gebunden wird. Dies war beim Übergang zu $A[z/y]$ bzw. $A[a/y]$ nicht so gewesen: Denn da wurden aus den freien Vorkommnissen von y "nur" wiederum singuläre Terme, die sich auf ein bestimmtes Einzelobjekt bezogen, entweder das durch die neuerlich freie Variable z bezeichnete Individuum oder das durch die Individuenkonstante a bezeichnete Objekt. In $A[x/y]$ hingegen wird gar nicht mehr einem bestimmten Einzelding eine Eigenschaft zugeschrieben, sondern vielmehr ein genereller – und daher mittels eines Quantors ausgedrückter – Sachverhalt beschrieben. Substitutionen wie bei $A[x/y]$ wollen wir in Zukunft daher vermeiden. Wenn wir später logische Regeln einführen, die den Argumentformen

(EE) $A[t/v] \therefore \exists v A[v]$

und

(UB) $\forall v A[v] \therefore A[t/v]$

aus dem letzten Kapitel ähneln werden, dann wollen wir sicherstellen, dass es sich bei den Substitutionen von t für v in $A[v]$ nur um unproblematische Quasi-Umbenennungen handelt, sodass sich freie Vorkommnisse von Variablen dabei nicht in gebundene verwandeln können – freie Vorkommnisse von Variablen müssen nach der Substitution als frei erhalten bleiben. Wir müssen also die "guten" Substitutionen von den "schlechten" unterscheiden, und das geht vonstatten mit Hilfe des folgenden Begriffes:

- Für alle Formeln A, für alle singulären Terme t, für alle Variablen v:

  t ist frei für v in A gdw

  – entweder t eine Individuenkonstante ist,
  – oder t eine Variable w ist, wobei kein freies Vorkommnis von v in A im Bereich eines Quantorausdrucks der Form $\exists w$ oder $\forall w$ liegt.

Wenn t frei ist für v in A, dann kann t für v in A ohne Probleme eingesetzt werden: Es ist dann nicht möglich, dass durch die Substitution ein einstmals freies Vorkommnis einer Variable plötzlich gebunden wird. Wir werden also später darauf achten, dass Substitutionen in logischen Regeln und dergleichen nur vorgenommen werden können, wenn ein singulären Term für eine Variable eingesetzt wird, der zugleich auch frei für diese Variable ist. ('frei für' ist übrigens ein etwas seltsamer technischer Jargon, der sich eingebürgert hat; er kommt vom englischen 't is free to be substituted for x in A'.)

Zum Beispiel: Sagen wir, v wäre x und $A[v]$ die Formel $\exists y R(x, y)$. Dann werden sich die Instanzen von (UB)

- $\forall x \exists y R(x, y) \therefore \exists y R(z, y)$
- $\forall x \exists y R(x, y) \therefore \exists y R(a, y)$

die auf der rechten Seite durch Einsetzung von z bzw. a für x in $\exists y R(x, y)$ entstehen, später als logisch gültig erweisen. Die folgende Argumentform, die aus der Einsetzung von y für x in $\exists y R(x, y)$ auf der rechten Seite resultiert, aber nicht

- $\forall x \exists y R(x, y) \therefore \exists y R(y, y)$

denn während z frei ist für x in $\exists y R(x, y)$ und auch a frei ist für x in $\exists y R(x, y)$, ist y *nicht* frei ist für x in $\exists y R(x, y)$. Und es wäre auch völlig unsinnig, wenn $\forall x \exists y R(x, y) \therefore \exists y R(y, y)$ als logisch gültig herauskäme: Nur weil es zu jedem x ein y gibt, sodass x zu y in der R-Beziehung steht, muss es ja noch kein Objekt geben, das zu sich selbst in der R-Beziehung steht.

9.4 Übungen

Übung 9.1 Beschreiben Sie das Alphabet der prädikatenlogischen Sprache!

Was ist ein singulärer Term? Was ist eine prädikatenlogische Formel?

Was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel frei vorkommt, und was heißt es, daß eine Individuenvariable in einer Formel gebunden vorkommt?

Was ist der Bereich eines Vorkommnisses eines Quantorausdrucks?

Welche Vorkommnisse von Individuenvariablen in den folgenden Formeln sind frei, welche Vorkommnisse sind gebunden?

1. $P(a_2)$
2. $\forall x_1(R(x_1, a_1) \to P(x_1))$
3. $\forall x_1(R(x_1, x_3) \to P(x_1))$
4. $\exists x_3(P(x_1) \land \forall x_2 R(x_3, x_2))$
5. $\forall x_5(P(x_5) \to \exists x_2(R(x_2, x_5) \land \forall x_1 S(x_2, x_1)))$
6. $\exists x_1(P(x_1) \land R(a_7, x_1)) \land S(a_8, x_1)$

Übung 9.2 Was heißt es, daß eine Formel offen ist, und was heißt es, daß eine Formel geschlossen ist?

Welche der folgenden Zeichenreihen sind prädikatenlogische Formeln, welche der Formeln sind offen und welche sind geschlossen?

1. $(R(a_1, a_3) \land \exists x_1 P(x_1))$
2. $\exists x_1(R(x_1, a_3) \land P(x_1))$
3. $\exists x_1(R(x_1, a_3) \land P(x_2))$
4. $\exists x_1(R(x_1, a_3) \land \forall x_2 P(x_2))$
5. $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_4(R(x_4, x_2) \lor P(x_1))$
6. $\forall x_5 R(a_1, a_5)$
7. $\forall x_5 R(a_1, x_5)$
8. $\forall x_5(R(a_1, x_5) \to \exists x_3 P(x_3))$
9. $P(x_1) \land p$
10. $P(x_1) \land \forall x_1 P(x_1)$

11. $\exists\forall x_2 R(x_2, a_{47355})$
12. $\forall x_{18} P^7(x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18}, x_{18})$
13. $\forall x_{24} P^9(x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24}, x_{24})$
14. $\exists x_1 \neg\forall x_2 (P(x_1) \rightarrow Q(x_2))$
15. $\exists x_1 \neg\neg(\forall x_2 (P(x_1) \rightarrow Q(x_2)))$
16. $\forall x_3 \exists x_3 R(x_3, x_4)$
17. $\neg\forall x_1 (P(x_1))$
18. $\exists x_5 (P(x_5) \wedge \forall x_2 (Q(x_2 \rightarrow P(a_8)))$

Übung 9.3 Die folgenden Formeln sind etwas "ungeschickte" Formulierungen: ihre syntaktische Form suggeriert bestimmte inhaltliche Zusammenhänge, die, wenn man die Formeln genau unter die Lupe nimmt, gar nicht bestehen. Z.B. sind $M(x)$ und $\exists x V(x, x)$ in der ersten Formel durch einen Implikationspfeil verbunden, obwohl sie gar nicht inhaltlich zusammenhängen (der Allquantor bindet zwar x in $M(x)$, aber nicht in $\exists x V(x, x)$). Versuchen Sie den intuitiven Gehalt der folgenden Formeln syntaktisch besser, d.h. transparenter, auszudrücken, ohne dabei gleichzeitig den Inhalt der Formeln zu verändern!

1. $\forall x (M(x) \rightarrow \exists x V(x, x))$
2. $\forall x P(a)$
3. $\exists x (Q(x) \wedge \forall x R(x, a))$
4. $\forall y \forall x (\forall y P(x) \rightarrow \forall x P(y))$

Übung 9.4 Führen Sie die folgende Substitutionen durch und stellen Sie fest, bei welchen dieser Substitutionen der singuläre Term t für eine nämliche Variable in einer Formel eingesetzt wird, sodass t frei für diese Variable in dieser Formel ist:

1. $A[x_1]$: $\exists x_1 (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, t: x_2
2. $A[x_1]$: $\exists x_1 (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, t: a_1
3. $A[x_1]$: $\exists x_1 (R(x_1, a_3) \wedge P(x_1))$, t: x_1
4. $A[x_1]$: $\exists x_1 R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, t: x_2

5. $A[x_1]$: $\exists x_1 R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, t: a_1

6. $A[x_1]$: $\exists x_1 R(x_1, a_3) \wedge P(x_1)$, t: x_1

7. $A[x_1]$: $\exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, t: x_2

8. $A[x_2]$: $\exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, t: x_1

9. $A[x_2]$: $\exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, t: x_4

10. $A[x_2]$: $\exists x_1 \exists x_4 (R(x_4, x_2) \vee P(x_1))$, t: x_3

Kapitel 10

Die prädikatenlogische Semantik

Wir wollen nun alle wichtigen semantischen Begriffe, die wir bereits in der Aussagenlogik kennengelernt haben, auf die Sprache der Prädikatenlogik erweitern. Zum Beispiel benötigen wir wieder einen Begriff der logischen Gültigkeit, auf dessen Basis wir – nach vollzogener prädikatenlogischer Repräsentation – die Argumente

- Beispiel 1:

  Alle Österreicher sind Europäer.

  Heinz Fischer ist Österreicher.

  Also ist Heinz Fischer Europäer.

- Beispiel 2:

  Alle Österreicher sind blond.

  Heinz Fischer ist Österreicher.

  Also ist Heinz Fischer blond.

als logisch gültig herausbekommen werden, die Argumente

- Beispiel 3:

  Alle Österreicher sind Europäer.

  Barack Obama ist kein Österreicher.

  Also ist Barack Obama kein Europäer.

- Beispiel 4:

  Alle Österreicher sind Europäer.

  Horst Seehofer ist kein Österreicher.

  Also ist Horst Seehofer kein Europäer.

jedoch als logisch ungültig.

Wie schon in der Aussagenlogik wird sich herausstellen, dass die Gültigkeit von Argumenten nicht davon abhängt, ob darin lauter tatsächlich wahre Sätze vorkommen. Denn in den *Beispielen 1* und *3* sind alle darin vorkommenden Sätze wahr. Dennoch wird sich *Beispiel 1* als logisch gültig, *Beispiel 3* hingegegen als logisch ungültig erweisen. In den *Beispielen 2* und *4* kommen auch falsche Sätze vor. *Beispiel 2* und *4* unterscheiden sich jedoch: Während in *Beispiel 4* alleine die Konklusion falsch ist, ist in *Beispiel 2* eine der Prämissen falsch. Das Argument *2* ist dennoch – wie sich herausstellen wird – gültig, während das Argument *4* ungültig ist. Denn wie schon in der Aussagenlogik verlangen wir von einem logisch gültigen Argument, dass die Wahrheit sämtlicher Prämissen die Wahrheit der Konklusion *"erzwingt"*. Gültige Argumente sind *notwendigerweise wahrheitsbewahrend*.

Um dies präziser fassen zu können, müssen wir nun, wie bereits in der Aussagenlogik erfolgt, eine Weise entwicklen, alle (oder zumindest alle *geschlossenen*) Formeln mit Wahrheitswerten zu bewerten. Wir können dabei nicht einfach die Methode der Wahrheitstafeln bzw. die Definition von aussagenlogischen Bewertungen direkt in die prädikatenlogische Semantik übertragen, weil weder die Wahrheitstafeln noch die aussagenlogischen Bewertungen etwas über die sprachlichen Neuerungen der Prädikatenlogik – die "feinkörnigeren" atomaren Formeln und die quantifizierten Formeln – zu sagen wissen. Ausserdem könnte eine Formel wie $\forall x P(x)$ über *unendlich* viele Individuen quantifizieren, sodass wir dann entsprechend vermutlich eine unendlich große "Wahrheitstafel" zur Bewertung einer solchen Formel heranziehen müssten, und es gar nicht mehr so klar wäre, wie eine solche Wahrheitstafel anzuwenden wäre. Wir werden daher eine neue Semantik für die Prädikatenlogik entwickeln, die den Feinheiten der prädikatenlogischen Sprache gerecht werden wird, die aber zugleich die semantischen Regeln der Aussagenlogik für die aussagenlogischen Junktoren übernehmen wird.

Wie wir wissen, entsprechen in der Prädikatenlogik den Aussagenvariablen die atomaren Formeln: Diese sind die "kleinsten" Formeln der Prädikatenlogik. In unserer neuen prädikatenlogischen Semantik werden jedoch den atomaren Formeln nicht einfach Wahrheitswerte zugeordnet werden, sondern deren Wahrheitswert wird davon abhängen, was die *Extension* des Prädikates und die *Referenz* der singulären Terme sein werden, die in der Formel vorkommen. Wir werden also die syntaktische Struktur der atomaren Formeln bei der Festlegung der Wahrheitswerte für diese berücksichtigen. Der Satz

- Sokrates ist ein Mensch

wird – wie wir wissen – in der Prädikatenlogik wie folgt repräsentiert:

- $M(s)$

Um nun festzustellen, ob diese Formel – und dann der von ihr repräsentierte Satz – wahr ist, müssen wir betrachten, ob das Referenzobjekt (das Bezugsobjekt, das Denotat) der Individuenkonstante s in der Extension (dem Begriffsumfang) des Prädikatzeichens M liegt. Dabei ist das Referenzobjekt von s einfach der Gegenstand bzw. die Person Sokrates, und die Extension von M die Menge aller Menschen. Da Sokrates tatsächlich ein Element der Menge der Menschen ist, ist die Formel wahr.

Betrachten wir nun einen atomaren Satz mit einem zweistelligen Prädikat:

- 3 ist größer als 2.

Die prädikatenlogische Form dieses Satzes ist:

- $G(a, b)$.

Überlegen wir uns zuerst, was die Extension des zweistelligen Prädikats G ist. Offensichtlich kann dies nicht einfach eine beliebige Menge von Gegenständen sein, da ja bei der Verwendung dieses Prädikats immer von *zwei* Gegenständen die Rede ist – in unserem Fall von den Zahlen 3 und 2. Dies nötigt uns dazu, die Extension eines zweistelligen Prädikats immer als eine Menge von *geordneten Paaren* von Gegenständen zu betrachten – in unserem Falle als die Menge aller Paare, deren erstes Glied größer als das zweite Glied ist. In dieser Menge ist natürlich auch das Paar bestehend aus der Zahl 3 und der Zahl 2 enthalten:

$$\langle 3, 2\rangle$$

Wir verwenden also in unserer Metasprache eckige Klammern wie '$\langle$' und '$\rangle$' zur Bezeichnung von geordneten Paaren.

Analog finden sich in dieser Menge die Paare $\langle 4, 2\rangle$, $\langle 5, 2\rangle$, $\langle 6, 2\rangle$, auch die Paare $\langle 19, 7\rangle$, $\langle 10005, 22\rangle$ und unendlich viele mehr, nicht aber zählen die Paare $\langle 2, 4\rangle$ oder $\langle 4, 4\rangle$ oder $\langle 5000, 10000\rangle$ zur Extension von G. Da a die Zahl 3 bezeichnet, b die Zahl 2, und $\langle 3, 2\rangle$ ein Element der Extension von G ist, ist unsere atomare Formel $G(a, b)$ von oben wahr unter dieser Interpretation.

Analog betrachten wir die Extension eines dreistelligen Prädikates als eine Menge von *Tripel*, die Extension eines vierstelligen Prädikates als eine Menge von *Quadrupel*, und allgemein betrachten wir die Extension eines n-stelligen Prädikates als eine Menge von n-*Tupel* der Form

$$\langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$$

wobei $d_1, d_2, \ldots, d_n$ irgendwelche Objekte sind, die in diesem n-Tupel in eine bestimmte Reihenfolge gebracht wurden. Es ist dabei auch möglich, dass ein und dasselbe Objekt zum Beispiel zugleich an der ersten und an der vierten Stelle innerhalb eines n-Tupels auftritt. Bei solchen "geordneten Mengen" – und um nichts anderes handelt es sich bei einem n-Tupel – sind also diese zwei Eigenschaften wichtig:

1. Die Elemente sind geordnet, d.h.: Sie haben einen fixen ihnen zugeordneten Platz im n-Tupel.

2. Die Elemente können mehrfach vorkommen.

Wie wir solche geordnete Tupel in der Mengenlehre definieren können, soll uns hier nicht interessieren, wir wollen hier nur darauf verweisen, dass dies sehr wohl möglich – und nicht einmal sonderlich kompliziert – ist.

Sobald die Wahrheitswerte der atomaren Formeln durch Angabe der Bezugsobjekte für die singulären Terme und durch Angabe der Extensionen für die Prädikate festgelegt sind, werden die Wahrheitswerte von Negations-, Konjunktions-, Disjunktions-, Implikations- und Äquivalenzformeln genauso "errechnet" wie in der Aussagenlogik. Wir geben hier nur ein Beispiel: Der Satz

- Descartes ist Philosoph, aber Shakespeare ist keiner.

wird wie folgt repräsentiert:

- $P(d) \land \neg P(s)$

Um den Wahrheitswert für diesen Satz zu berechnen, müssen wir zuerst die Wahrheitswerte der Teilsätze berechnen: Das erste Konjunkt ist atomar, und da das Prädikat dieses Konjunkts einstellig ist, müssen wir nur "nachsehen", ob das Denotat von d in der Extension von P liegt, was tatsächlich der Fall ist. Das erste Konjunkt ist also wahr. Das zweite Konjunkt ist eine Negationsformel, die einen atomaren Satz negiert, wir müssen daher zuerst wieder den Wahrheitswert des atomaren Satzes berechnen. Da das Denotat von s nicht in der Extension von P liegt, ist die atomare Formel falsch und somit die

Negationsformel wahr. Da beide Konjunkte wahr sind, ist auch die gesamte Konjunktionsformel wahr.

Alleine die Existenz- und Allformeln müssen wir noch gesondert behandeln. Betrachten wir zuerst einen Existenzsatz und dessen logische Form:

- Es gibt Menschen
- $\exists x M(x)$

Wir wollen eine solche Formel genau dann als wahr betrachten, wenn es *mindestens einen* Gegenstand in der Extension von M gibt.

Entsprechend: Betrachten wir den Allsatz

- Alles ist raumzeitlich
- $\forall x R(x)$

Diesen Satz werden wir genau dann als wahr bewerten, wenn *alle* Gegenstände in der Extension von R liegen. Es wird sich dabei als nützlich erweisen, sich eine Menge von Gegenständen – einen Gegenstandbereich (Definitionsbereich, Universum) – vorzugeben, aus dem die möglichen Werte von Variablen wie x zu entnehmen sind. Relativ zu einem solchen vorgegebenen Gegenstandsbereich heißt 'es gibt' dann eigentlich 'es gibt *im Gegenstandsbereich*' und 'für alle' heißt eigentlich 'für alles *im Gegenstandsbereich*'.

Während einfach gestrickte quantifizierte Sätze obiger Art semantisch noch sehr einfach zu behandeln sind, bedarf die Formulierung *allgemeiner* semantischer Regeln für quantifizierte Formeln – in denen eventuell Verschachtelungen der Art $\forall\forall$, $\forall\exists$, $\exists\forall$, $\exists\exists$ oder $\forall\forall\forall$, $\forall\forall\exists$ usw. auftreten können – ein wenig "technischer" Arbeit. Insbesondere werden wir uns damit beschäftigen müssen, wie man mehreren Variablen, die zu verschiedenen Quantorausdrücken gehören, zugleich Werte zuordnen kann. Wie die Wahrheitswerte von Existenz- und Allformeln letztlich genau bestimmt werden, werden wir bald sehen, und wir werden bereits in der nächsten Sektion eine weitere theoretische Rolle kennenlernen, die die Gegenstandbereiche in der prädikatenlogischen Semantik übernehmen.

10.1 Prädikatenlogische Interpretationen

Wir haben festgestellt, dass wir in der Semantik der Prädikatenlogik nicht einfach eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu den atomaren Formeln benötigen, mit deren Hilfe sodann die Wahrheitswerte für die komplexen Formeln berechnet werden können, sondern vielmehr eine Zuordnung von Bezugsobjekten zu den Individuenkonstanten – und auch eine Zuordnung von Werten zu den Individuenvariablen – sowie von Extensionen zu den Prädikaten gefragt ist. Wenn wir dies zunächst einmal für Individuenkonstanten und Prädikate bewerkstelligen wollen, so müssen wir immer auch angeben, was denn überhaupt ein Gegenstand ist, der als Extension einer Individuenkonstante fungieren kann bzw. der in der Extension eines Prädikatzeichens vorkommen kann; d.h. wir müssen zusätzlich auch den bereits am Ende der letzten Sektion erwähnten sogenannten *Gegenstandsbereich* angeben – das ist jene Menge von Gegenständen, über die wir bei einer gegebenen Zuordnung der Bezugsobjekte, der Extensionen und schließlich der Wahrheitswerte sprechen wollen. Nur die Gegenstände im Gegenstandsbereich können von den singulären Termen benannt werden, und nur sie dürfen in den Extensionen der Prädikate vorkommen.

Stellen wir uns vor, wir haben uns ein Alphabet einer prädikatenlogischen Sprache zu einem bestimmten Formalisierungszweck fix vorgegeben. Formal beginnen wir dann unsere Semantik der Prädikatenlogik wie folgt:

- $\mathfrak{I}$ ist eine *prädikatenlogische Interpretation* gdw $\mathfrak{I}$ ein Paar der Form $\langle D, \varphi \rangle$ ist, so dass gilt:

  1. D ist eine nicht-leere Menge von Objekten (formal: $D \neq \varnothing$),
  2. für alle Individuenkonstanten c gilt: $\varphi(c)$ ist ein Element von D (formal: $\varphi(c) \in D$),
  3. für alle n-stelligen Prädikate P^n gilt: $\varphi(P^n)$ ist eine Menge von n-Tupeln von Objekten in D (formal: $\varphi(P^n) \subseteq D^n$).

Eine prädikatenlogische Interpretation besteht somit aus einem nicht-leeren Gegenstandsbereich D und einer Interpretationsfunktion φ (sprich: "fi"). D wird in der klassischen Logik u.a. deshalb als nicht leer vorausgesetzt, weil in der klassischen Logik (wie schon erwähnt) für alle singulären Terme vorausgesetzt wird, dass diese etwas bezeichnen; was immer sie bezeichnen, muss ein Element des Gegenstandsbereiches D sein, weshalb dann auch D als nicht leer vorausgesetzt werden muss. Interpretationsfunktionen sind Funktionen, so wie früher auch die aussagenlogischen Interpretationen Funktionen waren. Hier aber sind Interpretationsfunktionen solche Funktionen, die den Individuenkonstanten jeweils einen Gegenstand aus D zuordnen und jedem n-stelligen

Prädikat (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) jeweils eine Menge von n-Tupeln von Elementen von D zuordnen. Mit

$$D^n (= \underbrace{D \times \ldots \times D}_{n\text{-mal}})$$

meint man dabei einfach die Menge *aller* möglichen n-Tupel von Elementen von D. Auf diese Weise wird allen *deskriptiven Zeichen* (*nicht* beispielsweise den Individuenvariablen) des prädikatenlogischen Alphabets durch eine Interpretation eine Bedeutung gegeben. Prädikatenlogische Interpretationen interpretieren somit denjenigen Teil des Alphabets einer vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache, der den Eigennamen und den generellen Termen der natürlichen Sprache nachgebildet ist. Das ist die Basis für die spätere "Berechnung" der Wahrheitswerte der prädikatenlogischen Formeln.

10.2 Variablenbelegungen

Um allen Formeln Wahrheitswerte zuordnen zu können, müssen wir nun auch noch eine Möglichkeit finden, Individuen*variablen* Werte zuzuordnen. Erstens wird es damit möglich werden, Formeln, in denen Individuenvariablen frei vorkommen – also den offenen Formeln – *relativ zu einer solchen Variablenbelegung* einen Wahrheitswert zuzuschreiben: Die offenen Formeln, die ansonsten ja nicht ohne weiteres wahrheitswertfähig wären, werden sich damit zumindest im Kontext einer Variablenbelegung ganz ähnlich den geschlossenen Formeln verhalten. Zweitens werden wir die Variablenbelegungen benötigen, um die semantischen Regeln für unsere beiden Quantoren $\exists$ und $\forall$ formulieren zu können.

In einer Interpretation wird nur den Individuen*konstanten* sowie den Prädikaten ein semantischer Wert zugeordnet. Die Intuition, die dahinter steckt, ist die, dass diese Symbole eine fixe, also konstante, Bedeutung haben, während Individuen*variablen* eben eine "variable Bedeutung" haben. Diese variable Bedeutung fängt man nun mit den sogenannten Variablenbelegungen ein. Eine Variablenbelegung σ (sprich: "sigma") für einen Gegenstandsbereich D, der mit einer prädikatenlogischen Interpretation mitgegeben ist, ist dabei eine Funktion, die den Individuenvariablen ein beliebiges Denotat aus D zuordnet:

- Eine *Variablenbelegung* σ unter einer Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ ist eine Funktion, die jeder Individuenvariable v ein Element d in D zuordnet.

Zum Beispiel ist folgende Funktion eine Variablenbelegung unter jeder Interpretation, deren Gegenstandsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist:

$$x_1 \mapsto 2$$

$$x_2 \mapsto 4$$
$$x_3 \mapsto 6$$
$$x_4 \mapsto 8$$
$$\vdots$$

Aber auch dies wäre eine Variablenbelegung, die zum Gegenstandsbereich der natürlichen Zahlen "passt",

$$x_1 \mapsto 12$$
$$x_2 \mapsto 12$$
$$x_3 \mapsto 12$$
$$x_4 \mapsto 12$$
$$\vdots$$

und es gibt unendlich viele weitere Variablenbelegungen, die den Individuenvariablen auf welche Art und Weise auch immer natürliche Zahlen als Werte zuordnen. (Ja es gibt sogar unendlich viele Variablenbelegungen unserer unendlich vielen Individuenveriablen, wenn der vorgegeben Gegenstandsbereich nur endlich viele Elemente aufweist!)

Aus praktischen Gründen wollen wir nun auch noch – gegeben eine prädikatenlogische Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ – jede vorgegebene Interpretationsfunktion φ und jede Variablenbelegung σ (unter $\mathfrak{I}$) in einer Funktion φ_σ zusammenfassen, die auf alle singulären Terme – egal ob Individuenkonstante oder Individuenvariable – anwendbar ist:

- Sei $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ eine prädikatenlogische Interpretation und sei σ eine Variablenbelegung unter $\mathfrak{I}$; dann sei φ_σ folgendermaßen festgelegt:

  1. für alle Individuenkonstanten c: $\varphi_\sigma(c) = \varphi(c)$, und
  2. für alle Individuenvariablen v: $\varphi_\sigma(v) = \sigma(v)$.

Hier ist ein Beispiel für eine simple Interpretation für eine Sprache mit genau drei Individuenkonstanten a, b, c und genau zwei Prädikaten G und M, die beide einstellig sein sollen:

- $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$
- $D = \{1, 2, 3\}$,
- $\varphi(a) = 1$,

- $\varphi(b) = 2$,
- $\varphi(c) = 3$,
- $\varphi(G) = \{2\}$,
- $\varphi(M) = \varnothing$.

a, b und c fungieren also jeweils als Eigenamen der Zahlen 1, 2 und 3. G könnte man intuitiv so verstehen, dass es für '... ist eine gerade Zahl' steht, und M könnte man so erklären, dass es für '... ist ein Mensch' steht: Die einzige gerade Zahl in D ist 2, weshalb die Extension von G gerade $\{2\}$ ist, während sich als Extension von M die leere Menge ergibt, da sich kein Mensch unter den Elementen von D findet.

Mögliche Variablenbelegungen können wir uns etwas platzsparender als vorher durch die folgenden Folgen von Zahlen veranschaulichen, wobei der Wert der Variable x_i durch die Zahl an der i-ten Stelle angegeben wird:

- $\sigma_1 = \overbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\sigma_2 = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- $\sigma_3 = 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots$
- $\vdots$

Als ist, z.B., $\sigma_1(x_1) = 1$, $\sigma_1(x_2) = 2$, $\sigma_1(x_4) = 1$, $\sigma_2(x_1) = 1$, $\sigma_2(x_2) = 1$, $\sigma_3(x_1) = 2$, $\sigma_3(x_2) = 3$ usw.

Und die entsprechenden φ_σ könnten dann wie folgt veranschaulicht werden:

- $\varphi_{\sigma_1} = \quad \overbrace{1, 2, 3}^{\text{Konstantenwerte}} \quad \overbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\varphi_{\sigma_2} = \quad \overbrace{1, 2, 3}^{\text{Konstantenwerte}} \quad \overbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\varphi_{\sigma_3} = \quad \overbrace{1, 2, 3}^{\text{Konstantenwerte}} \quad \overbrace{2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\vdots$

Diese Folgen werden sozusagen durch die Individuenkonstanten und -variablen, welche selbst ja durchnummeriert sind, "generiert". Diese "zusammenfassenden" Funktionen φ_σ werden im folgenden die Rolle der "Bedeutungszuordnung" für die singulären Terme – egal ob konstante oder variable – übernehmen.

10.3 Wahrheit und Falschheit

Nun haben wir die Voraussetzungen geschaffen, um festlegen zu können, welche Formeln relativ zu einer Interpretation wahr und welche Formeln relativ zu einer Interpretation falsch sind. Ohne entsprechende Interpretation wäre eine Formel ja nur ein syntaktisches Gebilde ohne Bedeutung, dem man nicht sinnvoll einen Wahrheitswert zuordnen könnte.

Wir erreichen dies letztlich genauso wie in der Aussagenlogik, indem wir schlussendlich jede Formel entweder mit dem Wert w oder mit dem Wert f bewerten. Wenn wir jedoch *allen* Formeln, also auch den offenen, einen Wahrheitswert zuordnen wollen, so können wir dies nicht einfach nur auf Basis der Interpretationsfunktion φ tun, sondern wir müssen dabei immer auch eine Variablenbelegung σ berücksichtigen. Wir schreiben also vorerst wieder

$$\varphi_\sigma(A)$$

und meinen damit den Wahrheitswert der Formel A in der Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$, *gegeben* die Variablenbelegung σ. Dass wir dabei wieder dasselbe Symbol 'φ_σ' wie in der letzten Sektion verwenden, soll uns nicht stören – im Gegenteil, es wird bequem sein, möglichst wenige neue formale Zeichen in der Metasprache einführen zu müssen, und es wird ja aus dem Kontext heraus völlig klar, ob φ_σ auf einen singulären Term oder eine Formel angewandt wird. Dessen eingedenk, können wir unsere Bewertungsfunktion nun wie folgt festlegen:

> Sei $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ eine prädikatenlogische Interpretation und sei σ eine Variablenbelegung unter $\mathfrak{I}$.
>
> Eine *prädikatenlogische Bewertung* (relativ zu $\mathfrak{I}$ und σ) ist eine Funktion φ_σ, die auf allen singulären Termen so definiert ist, wie in der letzten Sektion erklärt, und die zudem jeder Formel in der Menge $\mathcal{F}$ der prädikatenlogischen Formeln einer vorgegeben prädikatenlogischen Sprache einen der Wahrheitswerte w und f zuordnet, sodass gilt:
>
> 1. $\varphi_\sigma(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = w$ gdw $\langle \varphi_\sigma(t_1), \ldots, \varphi_\sigma(t_n) \rangle \in \varphi(P^n)$[1],
> 2. $\varphi_\sigma(\neg A) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = f$,
> 3. $\varphi_\sigma((A \wedge B)) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B) = w$,
> 4. $\varphi_\sigma((A \vee B)) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = w$ oder $\varphi_\sigma(B) = w$,

[1] Im Falle von atomaren Sätzen der Bauart $P^1(t)$ identifizieren wir die "1-Tupel" $\langle d \rangle$ einfach mit d, so dass Extensionen von einstelligen Prädikaten nach wie vor Mengen von Gegenständen aus D sind, und nicht Mengen von 1-Tupeln von Gegenständen aus D.

5. $\varphi_\sigma((A \to B)) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = f$ oder $\varphi_\sigma(B) = w$,
6. $\varphi_\sigma((A \leftrightarrow B)) = w$ gdw $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B)$,
7. $\varphi_\sigma(\forall v A) = w$ gdw für alle Variablenbelegungen σ' unter $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn σ' eine v-Variante von σ ist, dann $\varphi_{\sigma'}(A) = w$,
8. $\varphi_\sigma(\exists v A) = w$ gdw es eine Variablenbelegung σ' unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass gilt: σ' ist eine v-Variante von σ und $\varphi_{\sigma'}(A) = w$.

Wenn $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und $\varphi_\sigma(A) = w$, dann sagen wir, dass A wahr ist in der Interpretation $\mathfrak{I}$ unter der Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$; im Falle $\varphi_\sigma(A) = f$ nennen wir A natürlich falsch in der Interpretation $\mathfrak{I}$ unter der Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$.

Dazu ist noch zu erklären:

- Seien σ, σ' Variablenbelegungen unter einer Interpretation $\mathfrak{I}$:

  σ' ist eine v-*Variante* einer Variablenbelegung σ gdw für alle Individuenvariablen v', sodass $v' \neq v$, gilt: $\sigma'(v') = \sigma(v')$.

Eine v-Variante stimmt also jedenfalls bezüglich aller Individuenvariablen außer v mit der ursprünglichen Variablenbelegung überein – und vielleicht sogar auch bezüglich v, das Letztere muss jedoch nicht der Fall sein. Somit ist also auch jede Variablenbelegung eine v-Variante ihrer selbst (bezüglich einer beliebigen Individuenvariable v):

- Für alle Variablenbelegungen σ unter einer Interpretation $\mathfrak{I}$ und alle Individuenvariablen v gilt: σ ist ebenfalls eine v-Variante von σ.

Im Kontext der vorgegebenen Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ bilden natürlich *alle* Variablenbelegungen $\sigma, \sigma', \ldots$ jede unserer Individuenvariablen in den Gegenstandsbereich D ab. Auf diese Weise geht der Gegenstandsbereich in die Semantik der Quantoren ein.

Veranschaulichen wir dies anhand des Beispiels aus der letzten Sektion: Unsere prädikatenlogische Sprache war gegeben durch drei Individuenkonstanten a, b, c und zwei einstellige Prädikaten G und M, die folgendermaßen interpretiert wurden:

- $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$,
- $D = \{1, 2, 3\}$,
- $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 2$, $\varphi(c) = 3$, $\varphi(G) = \{2\}$, $\varphi(M) = \varnothing$.

Und bei den Variablenbelegungen betrachteten wir:

- $\sigma_1 = \overbrace{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots}^{\text{Variablenwerte}}$
- $\sigma_2 = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- $\sigma_3 = 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots$

Beginnen wir bei den atomaren Formeln. Diese können auch Individuenvariablen enthalten und diese Variablen kommen dann natürlich frei vor, da ja in atomaren Formeln keine Quantoren vorkommen. Wir hatten ursprünglich gesagt, dass offene Formeln "eigentlich" nicht wahr oder falsch sein können, denn sie behaupten ja nichts über irgendein wohlbestimmtes Objekt, und somit erhalten sie auch keinen Wahrheitswert. Der Grund dafür, dass wir in unseren Wahrheitsbedingungen den offenen Formeln nun *doch* Wahrheitswerte zuordnen, ist, dass wir dabei eine Variablenbelegung "festhalten", die Variablen mit bestimmten Werten oder Bezugsobjekten versehen. Die Variabilität der Werte der Variablen wird dann erst durch die Vielfalt der vorhandenen Variablenbelegungen gewährleistet. Alle diese vielen verschiedenen Variablenbelegungen lassen aber jedenfalls die Individuenkonstanten "in Ruhe", da sie ja nicht für diese definiert sind und auch keinen semantischen Einfluss auf die Referenz der Individuenkonstanten besitzen. Dies erkennt man auch an dem obigen Beispiel. Es gilt etwa:

- $\varphi_{\sigma_1}(G(b)) = w$,
- $\varphi_{\sigma_2}(G(b)) = w$,
- $\varphi_{\sigma_3}(G(b)) = w$,

Tatsächlich wird der Formel $G(b)$ unter *jeder* Variablenbelegung σ der Wert w zugeordnet. Dies folgt unmittelbar aus unserer semantischen Regel für atomare Formeln, da ja nach der Angabe von φ gilt, dass $\varphi_\sigma(b) \in \varphi(G)$: Denn $\varphi_\sigma(b)$ ist die Zahl 2, $\varphi(G)$ ist die Menge $\{2\}$, und 2 ist ein Element von $\{2\}$.

Genauso wird auch der atomaren Formel $G(a)$ unter jeder Variablenbelegung der Wert f zugeordnet. Aussagenlogische Zusammensetzungen solcher atomaren Formeln werden dann gemäß der bereits wohlbekannten semantischen Regeln für die aussagenlogischen Junktoren bewertet. Zum Beispiel wird der Negation der Formel $G(b)$ – also der Formel $\neg G(b)$ – dann der Wert f zugeordnet. Usw.

Ersetzen wir jedoch die Individuenkonstante b in $G(b)$ durch eine Individuenvariable – etwa x –, so erhalten wir:

- $\varphi_{\sigma_1}(G(x)) = f$,

- $\varphi_{\sigma_2}(G(x)) = f$,
- $\varphi_{\sigma_3}(G(x)) = w$.

Die Variable x ist ja nichts anderes als die Variable x_1, deren Wert unter einer Variablenbelegung σ das Objekt $\sigma(x_1)$ ist. Im Falle von σ_1 und σ_2 ergibt sich dabei der Wert 1 – denn $\sigma_1(x_1) = \sigma_2(x_1) = 1$ – während der Wert von x_1 gemäß der Variablenbelegung σ_3 die Zahl 2 ist. Aus der semantischen Regel für atomare Formeln ergeben sich dann sofort die obigen Wahrheitswerte von $G(x)$ unter σ_1, σ_2 und σ_3. Es gibt also Variablenbelegungen, unter denen die Formel $G(x)$ wahr ist, und andere Variablenbelegungen, unter denen diese Formel nicht wahr ist. Alles, was wir hier gesagt haben, lässt sich direkt auch auf die Bewertung von atomaren Formeln mit zweistelligen, dreistelligen, usw. Prädikaten übertragen, allerdings haben wir es mit solchen in unserer einfachen Beispielssprache von oben gar nicht zu tun.

Betrachten wir nun Beispiele mit Quantoren: Für alle Variablenbelegungen σ gilt

- $\varphi_\sigma(\exists x G(x)) = w$.

Dies folgt aus der Anwendung unserer semantischen Regel für existentiell quantifizierte Formeln. Denn wann immer wir eine Variablenbelegung σ betrachten, so finden wir mindestens eine x-Variante σ' von ihr, so dass $\varphi_{\sigma'}(G(x)) = w$. Wir brauchen dabei immer nur den Gegenstand, der durch die Variablenbelegung σ der Individuenvariable x zugeordnet wird, durch die Zahl 2 zu "ersetzen" (und alle anderen Werte von σ unverändert zu lassen), und $G(x)$ wird dann wie vorher bei σ_3 als wahr herauskommen. Dass ein solches σ' immer noch eine Variablenbelegung über unserer Interpretation $\mathfrak{I}$ von oben ist, liegt daran, dass die Zahl 2 in der Tat ein Element des von uns gewählten Gegenstandsbereiches D ist. $\exists x G(x)$ stellt sich unter der prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I}$ und einer beliebigen Variablenbelegung σ als wahr heraus, weil es wenigstens ein Objekt in D gibt, das G ist, d.h., das in der Menge $\{2\}$ liegt.

Schließlich gilt auch Folgendes: Für alle Variablenbelegungen σ,

- $\varphi_\sigma(\forall x G(x)) = f$.

Dies folgt nun aus der Anwendung unserer semantischen Regel für universell quantifizierte Formeln. Denn wann immer wir eine Variablenbelegung betrachten, so finden wir unter all ihren x-Varianten mindestens eine Variablenbelegung σ', so dass $\varphi_{\sigma'}(G(x)) = f$. Um ein solches σ' zu gewinnen, ordne man einfach der Variable x irgendetwas *anderes* als den Gegenstand 2 zu – etwa die

Zahl 1 oder die Zahl 3, die ja beide ebenfalls im obigen Gegenstandsbereich D liegen – und schon wird $G(x)$ wie vorher bei σ_1 oder σ_2 als falsch herauskommen. $\forall x G(x)$ stellt sich unter der prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I}$ und einer beliebig gewählten Variablenbelegung σ als falsch heraus, weil es nicht der Fall ist, dass alle Objekte in D G sind, d.h., in der Menge $\{2\}$ liegen.

Die Formeln $\exists x G(x)$ und $\forall x G(x)$ sind geschlossene Formeln. Solche Formeln haben, wie wir an unseren beiden Beispielsformeln gesehen haben, bezüglich ihrer Wahrheit oder Falschheit eine besondere Eigenschaft: Sie sind *unabhängig* von den Variablenbelegungen entweder "immer" wahr oder "immer" falsch, oder genauer:

- Für alle Formeln A gilt:
  Wenn A geschlossen ist, dann gilt für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$:

  1. Wenn es eine Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, so dass $\varphi_\sigma(A) = w$, dann gilt für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_\sigma(A) = w$.
  2. Wenn es eine Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, so dass $\varphi_\sigma(A) = f$, dann gilt für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$: $\varphi_\sigma(A) = f$.

Die Umkehrungen der beiden Implikationssätze gelten aus rein logischen Gründen ohnehin.

Daraus folgt, dass wir die Erwähnung von Variablenbelegungen bei der Zuordnung von Wahrheitswerten zu *geschlossenen* Formeln "unterdrücken" dürfen, wenn wir wollen. Wir dürfen, wenn wir wollen, unsere ursprünglichen Interpretationsfunktion φ wie folgt auf geschlossene Formeln erweitern:

- Sei $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ eine prädikatenlogische Interpretation.

  Dann dürfen wir für alle *geschlossenen* Formeln A schreiben:

  1. $\varphi(A) = w$ gdw für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = w$.
  2. $\varphi(A) = f$ gdw für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = f$.

In Worten: Wir dürfen sagen, dass eine geschlossene Formel A in einer prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I}$ wahr ist, oder dass diese geschlossene Formel in dieser Interpretation falsch ist, *ohne dabei auch etwas zu Variablenbelegungen sagen zu müssen.*

So können wir jetzt etwa schreiben:

- $\varphi(G(b)) = w$,

- $\varphi(\neg G(b)) = f$,
- $\varphi(G(a)) = f$,
- $\varphi(\exists x G(x)) = w$,
- $\varphi(\forall x G(x)) = f$.

Und ebenso:

- $\varphi(\exists x M(x)) = f$,
- $\varphi(\forall x M(x)) = f$.
- $\varphi(\neg\exists x M(x)) = w$,
- $\varphi(\exists x \neg M(x)) = w$,
- $\varphi(\forall x \neg M(x)) = w$.
- $\varphi(\neg\exists x \neg M(x)) = f$,
- $\varphi(\neg\forall x \neg M(x)) = f$,
- $\varphi(G(b) \land \neg\exists x \neg M(x)) = f$,
- $\varphi(\forall x(M(x) \to G(x))) = w$,
- $\varphi(\exists x(M(x) \land G(x))) = f$.

Bei den offenen Formeln müssen wir jedoch dabei bleiben, auch eine Variablenbelegung σ mit anzugeben, relativ zu derer offene Formeln dann überhaupt erst einen Wahrheitswert erhalten.

Selbst wenn wir uns letztlich nur für geschlossene Formeln interessieren sollten, ist die ursprüngliche Definition von φ_σ, die auf eine vorgegebene Variablenbelegung σ hin relativiert war, *von fundamentaler Bedeutung*: Denn auch wenn es sich als irrelevant herausgestellt hat, mit welcher Variablenbelegung man die Bewertung einer geschlossenen Formel wie oben $\exists x G(x)$ oder $\forall x G(x)$ *beginnt*, sobald man die semantische Regeln für die Quantoren einmal angewandt hat, um den Wahrheitswert von $\exists x G(x)$ bzw. $\forall x G(x)$ zu bestimmen, wird man zurückgeworfen auf die Bestimmung des Wahrheitswertes von $G(x)$ *und dafür ist dann die Bezugnahme auf eine Variablenbelegung essentiell.* Dies liegt daran, dass unsere semantischen Regeln von einem Kompositionalitätsgedanken getragen sind: Die Bedeutung eines komplexen Satzes ist durch Bedeutung seiner syntaktischen Teile bestimmt (und durch die Weise, in der diese syntaktisch zusammengesetzt wurden); und ebenso verhält es sich mit dem Wahrheitswert eines komplexen Satzes. Das heißt aber auch: Die Bedeutung von $\forall v \ldots$ bzw. $\exists v \ldots$ hängt von der Bedeutung von $\ldots$ ab. Bei $\ldots$ handelt es sich aber normalerweise um eine offene Formel! D.h.: Man muss sich für die Wahrheitsbedingungen von offenen Formeln unter bestimmten Variablenbelegungen interessieren, selbst wenn man letztlich nur die Wahrheitswerte von geschlossenen Formeln bestimmen will.

Sehen wir uns das noch genauer an einem Beispiel an: Sagen wir, wir führen in unsere obige Beispielssprache zusätzlich das zweistellige Prädikat R ein, und wir erweitern unsere vorgegebene Interpretationsfunktion φ auf folgende Weise um eine zusätzliche Interpretation von R:

$$\varphi(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$$

Man könnte für R wiederum eine "intuitive" Deutung anzugeben versuchen, die sich dann auch mehr oder weniger elegant natursprachlich wiedergeben ließe, aber das ist gar nicht notwendig: Wir haben unsere Semantik ja so aufgebaut, dass die Interpretationen von Prädikaten Extension, d.h., *Mengen* sind – eine solche Menge (in diesem Fall von Paaren) haben wir festgelegt, und mehr ist zur Festlegung der Wahrheitswerte der Formeln in unserer prädikatenlogischen Sprache auch gar nicht notwendig.

Dann ergibt sich:

- $\varphi(\forall x \exists y(G(y) \land R(x, y))) = w$

Dies weist man mit Hilfe der semantischen Regeln für die Quantoren wie folgt nach, wobei σ eine beliebig vorgegebene Variablenbelegung unter $\mathfrak{I}$ ist:

- $\varphi_\sigma(\forall x \exists y(G(y) \land R(x, y))) = w$

  gdw für alle Variablenbelegungen σ' unter $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn σ' eine x-Variante von σ ist, dann $\varphi_{\sigma'}(\exists y(G(y) \land R(x, y))) = w$

  gdw für alle Variablenbelegungen σ' unter $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn σ' eine x-Variante von σ ist, dann gibt es eine Variablenbelegung σ'' unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass gilt: σ'' ist eine y-Variante von σ' und $\varphi_{\sigma''}(G(y) \land R(x, y)) = w$.[2]

Aber Letzteres ist in der Tat der Fall: Denn sei σ eine beliebige Variablenbelegung über $\mathfrak{I}$; sei σ' eine beliebige x-Variante von σ. Dann kann σ' der Variable

[2] Man beachte: Da in diesem Schritt der metasprachliche Ausdruck '$\varphi_{\sigma'}(\exists y(G(y) \land R(x, y))) = w$' gemäß der semantischen Regeln "aufgelöst" werden soll, muss nunmehr auf eine Variante der Variablenbelegung σ' Bezug genommen werden – nicht einer Variante von σ – denn in '$\varphi_{\sigma'}$' ist ja von der Variablenbelegung σ' die Rede und nicht etwa von σ.

x nur einen der folgenden drei Werte zuordnen: 1 oder 2 oder 3. In jedem dieser drei Fälle gibt es aber dann eine Variablenbelegung σ'', die eine y-Variante von σ' ist und für die $\varphi_{\sigma''}(G(y) \wedge R(x,y)) = w$ ist. Man nehme nur σ' her, ändere den Wert von y (was immer der auch sei) auf die Zahl 2 ab, und schon ergibt sich $G(y) \wedge R(x,y)$ als wahr, denn 2 ist in der Extension von G, und egal, was der Wert von x ist – 1 oder 2 oder 3 – dieser Wert steht dann immer in der R-Beziehung zum Wert von y, da ja alle der Paare $\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,2\rangle$ in der Extension von R liegen und somit alle Objekte im Gegenstandsbereich in der R-Beziehung zur Zahl 2 stehen. Wir sehen dabei, dass wir zur Bewertung von $\forall x \exists y(G(y) \wedge R(x,y))$ Schritt für Schritt die Quanten "abgebaut" haben und dadurch auf mehr und mehr freie Variablenvorkommnisse gestoßen sind, für deren Wertzuweisung wiederum die Verwendung von Variablenbelegungen unumgänglich ist. Analog ergibt sich übrigens, in diesem speziellen Beispiel:

- $\varphi(\exists y \forall x(G(y) \wedge R(x,y))) = w$

Nochmals kurz zusammengefasst: Der Wahrheitswert einer komplexen Formel hängt von den Wahrheitswerten ihrer Teilformeln ab; vernünftig gebildete geschlossene Formeln mit Quantoren enthalten aber Teilformeln, die offen sind, und um diese zu bewerten, braucht man Variablenbelegungen. An der Verwendung von Variablenbelegungen führt also kein Weg vorbei.

Kein Weg? Manche Autoren vermeiden die Bewertung von offenen Formeln mittels Variablenbelegungen, indem sie eine sogenannte *substitutionelle Semantik* der Quantoren verwenden. Die semantischen Regeln für quantifizierte Sätze sehen dann etwa so aus: Die Bezugnahme auf ein σ wird fallengelassen, und man fordert stattdessen

- $\varphi(\forall v A[v]) = w$ gdw für alle Individuenkonstanten c gilt: $\varphi(A[c/v]) = w$,
- $\varphi(\exists v A[v]) = w$ gdw es gibt eine Individuenkonstante c, sodass gilt: $\varphi(A[c/v]) = w$.

Mit 'Individuenkonstanten' ist dabei natürlich gemeint: Individuenkonstanten *in der vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache*.

In einer solchen Semantik heißt $\forall$ dann nicht mehr 'für alle Objekte (in D)', sondern vielmehr 'für alle Eigennamen (in der vorgegebenen Sprache)'; analog für den Existenzquantor. Und dabei zeigt sich auch die philosophische Krux einer solchen Semantik: 'für alle' *sollte* eigentlich 'für alle *Objekte*' bedeuten. Selbst wenn nicht jedes Ding im Universum einen Eigennamen hätte, würde man mit 'für alle' doch 'für alle Dinge' sagen wollen und nicht etwa 'für alle Dinge, die einen Eigennamen haben' oder 'für alle Eigennamen'. In der Tat ist jedenfalls für die natürliche Sprache die Annahme, dass jedes Einzelding einen Eigennamen besitzt, absurd: Es gibt beispielsweise überabzählbar viele reelle Zahlen – Punkte auf der Zahlengeraden – die keinen Namen besitzen, und man würde doch mit 'für alle reellen Zahlen' nicht nur über diejenigen reellen Zahlen reden wollen, die sehr wohl einen Eigennamen aufweisen (wie 0, 1, -7, 0.275, $\sqrt{2}$, π usw.). Aus diesem Grunde bevorzugen heute die meisten Philosophen und Logiker eine sogenannte *objektuale Semantik*, in deren semantischen Regeln für die Quantoren auf Objekte und nicht bloß auf Eigennamen Bezug genommen wird. Die von uns oben eingeführte Semantik für prädikatenlogische Sprachen ist gerade eine solche objektuale Semantik.

10.4 Die semantischen Begriffe für die Prädikatenlogik

Mit dem Rüstzeug der letzten Sektion sind wir nun endlich in der Lage, alle zentralen semantischen Begriffe für die prädikatenlogischen Sprachen präzise zu definieren.

Zuerst führen wir das prädikatenlogische Gegenstück zum Begriff der Tautologizität in der Aussagenlogik ein:

- Eine prädikatenlogische Formel A ist *logisch wahr* gdw für alle prädikatenlogischen Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = w$.

Man sagt auch: Jede Interpretation zusammen mit einer beliebigen Variablenbelegung ist ein "Modell" für eine logisch wahre Formel. Beispiele für solchen logisch wahren Formeln sind zunächst einmal alle Formeln, die die logische Form einer aussagenlogischen Tautologie aufweisen, wie etwa

- $G(a) \to G(a)$
- $Z(b) \lor \neg Z(b)$

Dabei setze man immer entsprechende prädikatenlogische Sprachen voraus, die diese Beispiele auch wirklich als Formeln enthalten.

Denn angenommen, z.B., $G(a) \to G(a)$ wäre falsch in einer prädikatenlogischen Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ (Variablenbelegungen dürfen wir hier ja ignorieren, da $G(a) \to G(a)$ *geschlossen* ist): Dann müsste zugleich $G(a)$ (als Antezedens) wahr und $G(a)$ (als Konsequens) falsch sein, was nicht möglich ist. Also kann $G(a) \to G(a)$ gar nicht falsch in der angenommenen Interpretation sein. $G(a) \to G(a)$ ist demnach wahr in jeder Interpretation, d.h. logisch wahr.

Entsprechend können natürlich auch *offene* Formeln solchermaßen logische Wahrheiten sein, wie

- $G(x) \rightarrow G(x)$
- $Z(y) \lor \neg Z(y)$

Die Argumentation dafür ist ganz analog, nur muss man dabei auch eine (beliebig vorgegebene) Variablenbelegung berücksichtigen.

Darüberhinaus existieren aber auch genuin *prädikaten*logische Wahrheiten:

- $\forall x G(x) \rightarrow G(a)$
- $Z(x) \rightarrow \exists x Z(x)$
- $\forall x(G(x) \land Z(y) \rightarrow G(x))$
- $\forall x(G(x) \land Z(x)) \rightarrow \exists x Z(x)$

Dies folgt wieder mehr oder weniger direkt aus den semantischen Regeln der prädikatenlogischen Semantik. Zum Beispiel, für den zweiten Beispielssatz kurz zusammengefasst: Wenn $Z(x)$ wahr ist in $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ unter σ, dann muss $\sigma(x)$ ein Element von $\varphi(Z)$ sein; folglich ist $\varphi(Z)$ nicht leer, und somit muss auch $\exists x Z(x)$ wahr sein unter $\mathfrak{I}$. Daher ist $Z(x) \rightarrow \exists x Z(x)$ logisch wahr – die Formel kann nicht als falsch herauskommen.

Analog lässt sich das Gegenstück zum aussagenlogischen Begriff der Kontradiktion definieren:

- Eine prädikatenlogische Formel A ist *logisch falsch* gdw für alle prädikatenlogischen Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und für alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = f$.

Anders ausgedrückt: A ist eine Kontradiktion gdw es nicht der Fall ist, dass es eine prädikatenlogische Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und eine Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass gilt: $\varphi_\sigma(A) = w$.

Typische logisch falsche Formeln sind natürlich immer noch Formeln der Form

- $B \land \neg B$.

die wir ja bereits seit der Aussagenlogik als kontradiktorisch kennen. Betrachten wir dazu das konkrete Beispiel

- $G(b) \land \neg G(b)$

Denn angenommen $G(b)$ ist wahr in einer Interpretation – die Wahl der Variablenbelegung spielt ja bei dieser *geschlossenen* Formel wieder keine Rolle – dann ist $\neg G(b)$ natürlich falsch und somit ist die Konjunktionsformel gemäß unserer semantischen Regeln für die Prädikatenlogik auch falsch. Gleiches gilt aber auch unter der Annahme, dass $G(b)$ falsch ist.

Neben solchen quasi "aussagenlogischen" Kontradiktionen gibt es aber auch genuin *prädikaten*logisch falsche Formeln, wie etwa:

- $\forall x P(x) \land \exists x \neg P(x)$
- $\forall x P(x) \land \neg P(a)$
- $P(a) \land \neg \exists x P(x)$
- $\forall x \forall y R(x, y) \land \exists y \neg R(a, y)$

Und wie schon in der aussagenlogischen Semantik können wir auch festlegen:

- Eine prädikatenlogische Formel A ist *kontingent* gdw A weder logisch wahr noch logisch falsch ist.
- Eine prädikatenlogische Formel A ist *erfüllbar* gdw A nicht logisch falsch ist.

Kontingente Formeln sind also alle erfüllbar, und erfüllbare Formeln sind entweder logisch wahr oder aber kontingent.

Alle obigen Beispiele für logisch wahre Formeln sind natürlich auch Beispiele für erfüllbare Formeln. Hier sind noch ein paar Beispiele für erfüllbare Formeln, welche *kontingent* sind:

- $G(b)$
- $\neg G(b)$
- $G(x)$
- $\neg M(x)$
- $\exists x G(x)$
- $\forall x G(x)$
- $\forall y G(x)$
- $\neg \exists x M(x)$

Wie weist man zum Beispiel $\forall y G(x)$ als erfüllbar nach? Wieder nur kurz umrissen: Man wähle eine Interpretation und eine Variablenbelegung so, dass der Wert von x in der Extension von G zu liegen kommt. Dann wird $G(x)$ wahr sein. $\forall y$ wird nach einer Anwendung der semantischen Regel für den Allquantor eliminiert und spielt sodann keine Rolle für den Wahrheitswert von $G(x)$ mehr, da dieser ausschließlich von der Interpretation von G und dem Wert von x unter der gewählten Variablenbelegung abhängt.

Natürlich gilt Folgendes:

- Für alle Formeln A: Wenn A logisch wahr ist, dann ist A erfüllbar.

Die Umkehrung dieses Prinzips gilt jedoch offensichtlich nicht. Beispielsweise ist zwar die Formel $G(a)$ erfüllbar, aber sicherlich nicht logisch wahr, da diese Formel in jeder Interpretation falsch ist, in der $\varphi(a)$ kein Element von $\varphi(G)$ ist.

Manchmal ist es auch zweckmäßig, einen Erfüllbarkeitsbegriff für *Mengen* von Formeln zur Verfügung zu haben, welcher wie folgt definiert wird:

- Eine Menge M von Formeln ist *erfüllbar* gdw es eine prädikatenlogische Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und eine Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ gibt, sodass für alle Formeln $A \in M$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = w$.

Man beachte dabei, dass eine Menge von Formeln durchaus *als Menge* unerfüllbar sein kann, obwohl zugleich alle ihre Elemente *als Formeln* erfüllbar sind. So ist etwa die Menge $\{\forall x P(x), \exists x \neg P(x)\}$ unerfüllbar, während die Formeln $\forall x P(x)$ und $\exists x \neg P(x)$ für sich genommen sehr wohl erfüllbar sind.

Der letzte semantische Begriff, den wir für prädikatenlogische Formeln festlegen wollen, ist der der logischen Folge. Die Intuition, die uns hier leitet, ist diejenige, die wir schon aus der aussagenlogischen Semantik kennen, nämlich dass eine Formel, die aus einer anderen Formel logisch folgt, "unmöglich" falsch sein kann, falls die andere Formel wahr ist. D.h.:

- Für alle Formeln A, B gilt: *B folgt logisch aus A* ($A \models B$) gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und alle Variablenbelegungen σ von $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\varphi_\sigma(A) = w$, dann $\varphi_\sigma(B) = w$.

Die logische Äquivalenz von Formeln besteht dann in der logischen Folge "in beide Richtungen". Oder dazu äquivalent:

- Für alle Formeln A, B gilt: *A ist logisch äquivalent zu B* ($A \models B$ und $B \models A$) gdw für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und alle Variablenbelegungen σ von $\mathfrak{I}$ gilt: $\varphi_\sigma(A) = \varphi_\sigma(B)$.

Zum Beispiel erhalten wir:

- $\forall x A$ ist logisch äquivalent mit $\neg\exists x \neg A$.

- $\exists x A$ ist logisch äquivalent mit $\neg\forall x \neg A$.

Wir könnten daher, wenn wir wollten – und ohne dabei semantisch etwas zu verlieren – einen der beiden Quantoren einfach metasprachlich mittels des jeweils anderen Quantors (und der Negation) definieren.

Wie schon in der aussagenlogische Semantik fügen wir schließlich auch noch den noch wichtigeren Begriff der logischen Folge aus einer *Menge* von Formeln hinzu:

- Für alle Formeln $A_1, \ldots, A_n$ und alle Formeln B gilt:

  B folgt logisch aus $A_1, \ldots, A_n$ ($A_1, \ldots, A_n \models B$) gdw

  für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$ und alle Variablenbelegungen σ unter $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn für alle Formeln A_i mit $i = 1, \ldots, n$ gilt, dass $\varphi_\sigma(A_i) = w$, dann gilt auch, dass $\varphi_\sigma(B) = w$.

Und wie in der Aussagenlogik ist es auch üblich,

- $\models A$

zu schreiben für den Sachverhalt, dass A logisch wahr ist. Die Idee dahinter ist wieder: A ist logisch wahr gdw A logisch aus der *leeren Menge* von Formeln folgt, also ohne jede weitere Annahme "immer" wahr ist.

Insbesondere erhalten wir mit dem Begriff der logischen Folge auch die folgenden wohlbekannten prädikatenlogischen Gesetze, die sich allesamt auf Basis der semantischen Regeln für die Prädikatenlogik und der obigen Definition der logischen Folge nachweisen lassen:

- *Quantorennegationsgesetze*:
  - $\forall x \neg P(x) \models \neg\exists x P(x)$
  - $\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$
  - $\exists x \neg P(x) \models \neg\forall x P(x)$
  - $\neg\exists x P(x) \models \forall x \neg P(x)$
- *Quantorenvertauschungsgesetze*:
  - $\forall x \forall y P(x, y) \models \forall y \forall x P(x, y)$
  - $\exists x \exists y P(x, y) \models \exists y \exists x P(x, y)$
  - $\exists x \forall y P(x, y) \models \forall y \exists x P(x, y)$

    (Wie wir bereits wissen, gilt jedoch *nicht*: $\forall y \exists x P(x, y) \models \exists x \forall y P(x, y)$)

- *Quantorendistributionsgesetze*:
  - $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \models \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
  - $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
  - $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \models \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

    (Dies gilt jedoch *nicht*: $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$)
- *Quantorenverschiebungsgesetze*:
  - $\forall x(P(a) \to Q(x)) \models P(a) \to \forall x Q(x)$
  - $\exists x P(x) \to Q(a) \models \forall x(P(x) \to Q(a))$
  - etc.

Betrachten wir beispielsweise das etwas seltsam anmutende Quantorverschiebungsgesetz $\exists x P(x) \to Q(a) \models \forall x(P(x) \to Q(a))$: Nehmen wir einmal an, dass $\exists x P(x) \to Q(a)$ wahr wäre bei einer Interpretation, $\forall x(P(x) \to Q(a))$ aber falsch wäre bei eben dieser Interpretation: Da $\forall x(P(x) \to Q(a))$ falsch ist bei der Interpretation, muss es möglich sein, x mittels einer Variablenbelegung σ einen Wert im Gegenstandsbereich D so zuzuordnen, dass $P(x) \to Q(a)$ bei der Interpretation und der nämlichen Variablenbelegung σ als falsch herauskommt: d.h. aber auch, dass $P(x)$ dabei als wahr, $Q(a)$ aber als falsch herauskommen muss. Wenn $P(x)$ wahr unter der Interpretation und der Variablenbelegung σ ist, dann muss aber auch $\exists x P(x)$ wahr sein unter der Interpretation. Also: $\exists x P(x)$ ist dann wahr bei der Interpretation und $Q(a)$ ist falsch bei der Interpretation. Dann ist aber auch $\exists x P(x) \to Q(a)$ falsch bei der Interpretation, was im Widerspruch zu unserer anfänglichen Annahme steht, dass $\exists x P(x) \to Q(a)$ wahr ist bei der Interpretation. Somit kann es gar nicht der Fall sein, dass $\exists x P(x) \to Q(a)$ wahr ist bei einer Interpretation, $\forall x(P(x) \to Q(a))$ aber falsch bei derselben Interpretation. Kurz: $\exists x P(x) \to Q(a)$ impliziert logisch $\forall x(P(x) \to Q(a))$.

Hier sind nochmals einige Folgerungsbehauptungen, welche *nicht* gelten:

- $\neg \forall x P(x) \models \forall x \neg P(x)$
- $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists y \forall x R(x, y)$
- $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \models \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
- $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \exists x P(x)$

Dass diese metasprachlichen Sätze falsch sind, beweist man leicht dadurch, dass man *Gegenbeispiele* angibt: d.h. prädikatenlogische Interpretationen und zugehörige Variablenbelegungen, die zusammengenommen die linke Seite einer solchen Behauptung wahrmachen, die rechte Seite jedoch falsch. Zum Beispiel, was die erste falsche Behauptung von oben betrifft: Man wähle eine Interpretation so, dass wenigstens ein Objekt im Gegenstandsbereich nicht in $\varphi(P)$ ist, zugleich aber auch wenigstens ein Objekt im Gegenstandsbereich in $\varphi(P)$ zu liegen kommt; dann ist zwar $\neg\forall x P(x)$ wahr in dieser Interpretation, $\forall x \neg P(x)$ aber falsch. Somit kann die behauptete Beziehung der logischen Folge klarerweise nicht bestehen.

Hier sind einige sehr wohl bestehende logische Folgerungen aus Mengen von Formeln:

- $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a) \models Q(a)$
- $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a) \models \exists x Q(x)$
- $\forall x(P(x) \to Q(x)), \neg Q(b) \models \neg P(b)$
- $\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x \neg Q(x) \models \exists x \neg P(x)$

Ebenso ist der Fall: Wenn der singuläre Term t frei ist für die Individuenvariable v in der Formel $A[v]$, dann

- $A[t/v] \models \exists v A[v]$
- $\forall v A[v] \models A[t/v]$

Anhand des Beispiels erklärt, das wir schon im letzten Kapitel verwendet haben: Angenommen, v wäre x und $A[v]$ wäre die die Formel $\exists y R[x, y]$. Dann gilt

- $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists y R(z, y)$
- $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists y R(a, y)$

weil sowohl z als auch a frei sind für x in $\exists y R[x, y]$. Aber es gilt *nicht*, dass

- $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists y R(y, y)$

Dies weist man wieder leicht durch Angabe eines Gegenbeispiels nach: Man lasse zum Beispiel D die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen sein und $\varphi(R)$ die Kleiner-als Relation auf den natürlichen Zahlen – dann ist $\forall x \exists y R(x, y)$ wahr in dieser Interpretation, $\exists y R(y, y)$ aber falsch. Diese letzte (falsche) Behauptung einer logischen Folge war auch oben nicht gemeint, denn y ist in der Tat *nicht* frei ist für x in $\exists y R[x, y]$.

Zuletzt ist es uns auch ein Leichtes, die logische Gültigkeit von Argumentformen der prädikatenlogischen Sprache zu definieren:

- Eine Argumentform $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ der prädikatenlogischen Sprache ist *logisch gültig* genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Alle diese semantischen Begriffe lassen sich wie schon im Falle der Aussagenlogik auf natursprachliche Aussagesätze und Argumente übertragen, indem man zunächst die (prädikaten-)logischen Formen dieser Aussagesätze und Argumente bestimmt und dann die oben definierten semantische Begriffe auf die dabei gewonnenen prädikatenlogischen Repräsentationen anwendet. Der Vorgang ist genau analog zu dem in der Aussagenlogik, der einzige Unterschied besteht in der sowohl syntaktisch als auch semantisch überlegenen "Feinkörnigkeit" der Prädikatenlogik im Vergleich zur "grobschlächtigeren" Aussagenlogik.

10.5 Übungen

Übung 10.1

1. Worauf beziehen sich singuläre Terme? Was sind die Extensionen von n-stelligen Prädikaten (generellen Termen)?

2. Geben Sie drei (natursprachliche) singuläre Terme an, und erläutern Sie, was deren Referenz ist. Geben Sie drei (natursprachliche) Prädikate (mit jeweils verschiedener Stellenzahl) an, und erläutern Sie, was deren Extension ist.

3. Was sind die zwei wichtigen Eigenschaften von n-Tupeln?

4. Was ist das n-fache Cartesische Produkt

   $$D^n = \underbrace{D \times \ldots \times D}_{n\text{-mal}}$$

   der Menge D?

5. Definieren Sie, was eine prädikatenlogische Interpretation ist.

6. Definieren Sie, was eine Variablenbelegung unter einer Interpretation ist.

7. Was heißt es, daß eine Variablenbelegung eine v-Variante einer Variablenbelegung ist?

8. Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen eine Formel – gegeben eine Interpretation sowie eine Variablenbelegung unter dieser Interpretation – wahr bzw. falsch ist.

9. Stellen Sie fest, ob die unten angegebenen Formeln unter der Interpretation $\mathfrak{I}$ und unter den Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ unter $\mathfrak{I}$ wahr sind, wobei:

   Interpretation $\mathfrak{I} = \langle D, \varphi \rangle$:

   - $D = \{Barack, Joachim, Joseph\}$
   - $\varphi(a) = Barack$
   - $\varphi(b) = Joachim$
   - $\varphi(c) = Joseph$
   - $\varphi(P) = \{Barack, Joachim\} = \{d \in D \mid d \text{ ist Präsident}\}$

- $\varphi(M) = \{Barack, Joachim, Joseph\} = \{d \in D \mid d \text{ ist ein Mensch}\}$
- $\varphi(Z) = \emptyset = \{d \in D \mid d \text{ ist eine Zahl}\}$
- $\varphi(\ddot{A}) = \{\langle Joseph, Barack\rangle, \langle Joseph, Joachim\rangle, \langle Joachim, Barack\rangle\}$
  $= \{\langle d_1, d_2\rangle \in D^2 \mid d_1 \text{ ist älter als } d_2\}$

Variablenbelegungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von $\mathfrak{I}$:

- $\sigma_1 = Barack, Joachim, Joseph, \ldots$
- $\sigma_2 = Joachim, Joachim, Joseph, \ldots$
- $\sigma_3 = Joseph, Joachim, Joseph, \ldots$

In $\mathfrak{I}$ und unter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zu bewertende Formeln:

10. $P(a)$
11. $P(b)$
12. $P(x)$
13. $M(c)$
14. $M(x)$
15. $Z(a)$
16. $Z(x)$
17. $\ddot{A}(a, b)$
18. $\ddot{A}(y, a)$
19. $\neg P(c)$
20. $\neg Z(x)$
21. $\ddot{A}(c, b) \wedge \neg P(x)$
22. $\forall x M(x)$
23. $\neg\forall x P(x)$
24. $\exists y Z(y)$
25. $\exists x P(x)$

26. $\neg\forall x P(x) \lor P(c)$
27. $\ddot{A}(b,a) \to \exists x(P(x) \land Z(x))$
28. $\forall x \exists y \ddot{A}(x,y)$
29. $\exists x \forall y \ddot{A}(x,y)$

Stellen Sie fest, welche der dieser Formeln wahr bzw. falsch gemäß φ_{σ_1}, φ_{σ_2}, φ_{σ_3} sind.

Denken Sie sich drei weitere Variablenbelegungen aus und bewerten Sie die Formel $\ddot{A}(y,x) \land \ddot{A}(z,y) \to \ddot{A}(z,x)$. Ist diese Formel wahr in $\mathfrak{I}$ unabhängig von der Wahl der Variablenbelegung?

Stellen Sie fest, welche der oben vorkommenden *geschlossenen* Formeln wahr bzw. falsch gemäß φ (d.h. in $\mathfrak{I}$) sind.

Übung 10.2

- Überprüfen Sie die folgenden Formeln auf logische Wahrheit, logische Falschheit, bzw. Kontingenz. Argumentieren Sie für das Vorliegen von logischer Wahrheit/Falschheit auf Basis der semantischen Regeln, für das Vorliegen von Kontingenz jedoch durch Angabe von passenden Interpretationen (und Variablenbelegungen).

  1. $M(x) \lor G(c)$
  2. $\exists y(G(y) \land \neg G(y))$
  3. $\forall x(P(x) \to \neg P(x))$
  4. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$
  5. $P(x) \to P(y)$
  6. $P(x) \to P(x)$
  7. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$
  8. $\neg\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
  9. $P(a,b) \land \forall x \neg\exists y P(x,y)$
  10. $\forall x \forall y P(x,y) \to \forall y \forall x P(x,y)$
  11. $P(x) \to \forall y P(y)$
  12. $P(x) \to \forall y P(x)$
  13. $\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$

Übung 10.3

- In den folgenden Beispielen wird das Bestehen gewisser logischer Folgerungen behauptet. Überprüfen Sie diese Behauptungen auf ihre Richtigkeit! Argumentieren Sie entweder für die Behauptungen mit Hilfe der semantischen Regeln, oder widerlegen Sie die Behauptungen durch Angabe von Gegenbeispielen in Form von Interpretationen (und Variablenbelegungen).

  1. $P(a) \models \exists x P(x)$
  2. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$
  3. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \exists x Q(x)$
  4. $\forall x \forall y P(x, y) \models \forall x \exists y P(x, y)$
  5. $\exists x(P(y) \land Q(x)) \models P(y) \land \exists x Q(x)$
  6. $\exists x P(y) \models \forall y P(x)$
  7. $\forall x \forall y P(x, y) \models P(a, b) \land P(c, d)$
  8. $\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a) \models Q(a)$
  9. $\forall x \exists y P(x, y) \models \exists y P(y, y)$
  10. $\forall x(P(x) \lor Q(x)), \neg \exists y Q(y) \models \forall x P(x)$
  11. $\forall x(P(x) \lor Q(x)), \neg Q(y) \models \forall x P(x)$
  12. $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_{10000}) \models \forall x P(x)$

Kapitel 11

Prädikatenlogisches Herleiten

Wir haben die deduktive Methode ja schon ausführlich anhand unseres Systems des natürlichen Schließens in der Aussagenlogik besprochen. Entsprechend der Erweiterung der Menge der logischen Zeichen in den prädikatenlogischen Sprachen – in denen ja die Quantoren $\forall$ und $\exists$ als logische Zeichen zu den aussagenlogischen Junktoren hinzukommen – ergänzen wir im Folgenden auch die Regeln für die aussagenlogischen Junktoren um Herleitungregeln für die beiden Quantoren. Auf diese Weise werden wir ein System des natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik erhalten, dessen zugehörige Herleitungsbeziehung $\vdash$ sich ganz analog zur Aussagenlogik als extensionsgleich zu der semantischen Beziehung $\models$ der logischen Folge für die prädikatenlogischen Sprachen erweisen wird, die wir im letzten Kapitel definiert und untersucht haben.

11.1 Die zusätzlichen Herleitungsregeln der Prädikatenlogik

Zunächst fügen wir unseren aussagenlogischen Schlussregeln die folgenden zwei prädikatenlogischen Regeln hinzu, deren zugehörige Argumentformen wir im Rahmen unserer Behandlung der Substitution in den letzten Kapiteln schon diskutiert haben. Dadurch erweitert sich dann auch der Umfang unserer Herleitungsrelation $\vdash$:

(UB) Für den Fall, dass t frei ist für v in A:
$\forall v A \vdash A[t/v]$ (Universelle Beseitigung)

(EE) Für den Fall, dass t frei ist für v in A:
$A[t/v] \vdash \exists v A$ (Existentielle Einführung)

Diese Einsetzungregeln haben beide die Eigenschaft, Einsetzungsinstanzen von Termen zu involvieren, und beide Regeln sind entsprechend nur anwendbar, wenn der Term t, der dabei eingesetzt wird bzw. wurde, frei für die relevante Variable in der relevanten Formel ist. Während (UB) ein Vorkommnis des Allquantors beseitigt, führt (EE) ein Vorkommnis des Existenzquantors ein.

Betrachten wir dazu das folgendes Beispiel eines Schlusses in der natürlichen Sprache:

> Es gibt keine Dronten.
>
> ---
>
> Daher gibt es etwas, das keine Dronte ist.

Die prädikatenlogische Repräsentierung eines solchen Argumentes sollte natürlich unter Verwendung unseres formalen Konklusionsindikators $\therefore$ vonstatten gehen, hier (wie auch bei den folgenden Beispielen) geht es uns aber weniger um die Repräsentierung, sondern vielmehr darum, dass dieser Schluss prädikatenlogisch gültig ist – auch wenn dies in diesem Fall zunächst etwas kontraintuitiv erscheinen mag. Der Grund für die Gültigkeit des Schlusses ist, wie bereits besprochen, dass in der klassischen Prädikatenlogik angenommen wird, dass es im zugrundeliegenden Gegenstandsbereich mindestens einen Gegenstand gibt. Wenn es nun aber keinen Gegenstand gibt, der eine Dronte ist, so gibt es doch noch mindestens einen Gegenstand *überhaupt*, und dieser kann dann keine Dronte sein. Es muss also, wenn sich die Herleitbarkeitsbeziehung $\vdash$ letztlich als vollständig in Hinblick auf $\models$ erweisen soll, die Konklusion auch aus der Prämisse herleitbar sein, d.h. es muss gelten:

- $\neg\exists x D(x) \vdash \exists x \neg D(x)$

Und mittels der Regeln von oben (hier (EE)) ist dies auch der Fall:

$\underline{1.\ \neg\exists x D(x)}$ (P1)

2. $\|$ $\neg\neg D(y)$ (IB-Annahme)

3. $\|$ $D(y)$ 2. (DN2)

4. $\|$ $\exists x D(x)$ 3. (EE)

5. $\|$ $\exists x D(x) \land \neg\exists x D(x)$ 4., 1. (KON)

6. $\neg D(y)$ 2.–5. (IB)

7. $\exists x \neg D(x)$ 6., (EE)

Man beachte, dass y für x frei ist in $D(x)$ bzw. $\neg D(x)$ – andernfalls wären die jeweiligen Schlüsse mittels (EE) auf die Zeilen 4. und 7. auch nicht erlaubt gewesen. Anstatt den indirekten Beweis mittels $\neg\neg D(y)$ in Zeile 2. zu führen, hätten wir diesen übrigens auch mittels $\neg\neg D(a)$ führen können, wobei a dann eine beliebig gewählte Individuenkonstante wäre; der Schluss von 3. auf 4. wäre dann eine Anwendung von (EE) gewesen, welche von $D(a)$ zu $\exists x D(x)$ geführt hätte, und der Schluss von 6. auf 7. wäre eine Anwendung von (EE) gewesen, welche von $\neg D(a)$ zu $\exists x \neg D(x)$ geführt hätte. Die zugehörigen Substitutionen wären dabei gänzlich harmlos gewesen, weil Individuenkonstanten ja *immer* frei sind für Variablen, für die sie eingesetzt werden. Andererseits haben wir in Kapitel 9 gesehen, dass es eine Wahlfreiheit in Bezug auf Individuenkonstanten gibt: Insbesondere kann man eine prädikatenlogische Sprache so wählen, dass sie völlig ohne Individuenkonstanten auskommt. In einem solchen Fall hätte man dann gar keine Individuenkonstante a zu Verfügung, die man anstatt von y in Zeile 3. der obigen Herleitung hätte verwenden können. Das ist auch der Grund, warum das Verwenden von Individuenvariablen zu Zwecken wie dem in der Herleitung oben Vorteile bietet: Man hat nämlich jedenfalls *per definitionem* in jeder prädikatenlogischen Sprache *unendlich viele* Individuenvariablen zur Verfügung.

Sehen wir uns noch ein weiteres einfaches Beispiel an:

Alle Gegenstände sind nicht abstrakt.

Daher sind nicht alle Gegenstände abstrakt.

Wiederum ist dieser Schluss logisch gültig – wie man leicht mit Hilfe der prädikatenlogischen Semantik aus dem letzten Kapitel nachweisen kann – und wir wollen somit, dass auch auf syntaktischer Ebene gilt:

- $\forall x \neg A(x) \vdash \neg\forall x A(x)$

Und erneut stellt sich dies auf Basis der Regeln von oben (hier (UB)) als wahr heraus:

1. $\underline{\forall x \neg A(x)}$ (P1)

2. $\|$ $\neg\neg\forall x A(x)$ (IB-Annahme)

3. $\|$ $\forall x A(x)$ 2. (DN2)

4. $\|$ $A(y)$ 3. (UB)

5. $\|$ $\neg A(y)$ 1. (UB)

6. $\| \; A(y) \wedge \neg A(y)$ 4., 5. (KON)

7. $\neg \forall x A(x)$ 2.–6. (IB)

Abermals erweisen sich die beiden Anwendungen von (UB) als zulässig, weil y sowohl in $A(x)$ als auch in $\neg A(x)$ frei für x ist. In Zukunft werden wir dies bei Anwendungen von (UB) oder (EE) nicht mehr extra anmerken, sondern einfach bei der Angabe von Herleitungen, in denen eine dieser beiden Regel Verwendung findet, voraussetzen. De facto muss beim Herleiten aber immer geprüft werden, ob (UB) bzw. (EE) korrekt angewendet werden, und das beinhaltet, dass die entsprechende 'frei für' Bedingung erfüllt ist – wäre dem nicht so, würde es sich nicht um eine Herleitung in unserem prädikatenlogischen System des natürlichen Schließens handeln.

Wir wollen nun ein Beispiel betrachten, in dem wir mit den zwei zusätzlichen Regeln von oben *nicht* auskommen:

Es gibt keine Fische, die nicht schwimmen können.

Daher können alle Fische schwimmen.

Als Herleitbarkeitsbehauptung formuliert, sieht dies wie folgt aus:

- $\neg \exists x(F(x) \wedge \neg S(x)) \vdash \forall x(F(x) \rightarrow S(x))$

Hier müssen wir für die Rekonstruktion dieses logisch gültigen Schlusses mittels einer Herleitung letztlich eine Formel mit einem Allquantor *einführen*, wofür unsere obige *Beseitigungs*regel für den Allquantor nicht ausreicht. Aus diesem Grunde werden wir unser Regelsystem um eine (Meta-)Regel erweitern, die der Einführung von universell quantifizierten Formeln dient.

Mathematiker und Mathematikerinnen verwenden die nämliche Schlussregel ständig, allerdings normalerweise ohne diese formal anzugeben. Die Regel ist aber *implizit* oder informell am Werk, wenn in der Mathematik Beweise wie folgt geführt werden: Nehmen wir an, es wurden gewisse allgemeine Prämissen vorausgesetzt, oder es wurden bereits gewisse allgemeine Theoreme bewiesen. Nun soll ein Allsatz gezeigt werden; sagen wir der Allsatz: Alle Objekte im Gegenstandsbereich haben die Eigenschaft P. Dazu wird ein "beliebiges" Objekt y aus dem Gegenstandsbereich ausgewählt: *Sei y beliebig.* Von diesem y wird sodann bewiesen, dass es die Eigenschaft P habe. (Formal: $P(y)$.) Anschließend wird der Beweis fertiggestellt mittels: *y war jedoch beliebig gewählt. D.h., es muss gelten, dass alles die Eigenschaft P hat.* (Formal: $\forall x P(x)$.) Die "Beliebigkeit" des gewählten Objektes y wird – syntaktisch präzisiert – dem entsprechen, was wir unten die "Variablenbedingung" VB nennen werden.

Nun aber zur formalen Festlegung unserer neuen Regel:

(UE) Universelle Einführung, vorausgesetzt VB:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \vdash B[v_1/v_2]}{A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B}$$

v_1 soll dabei wieder frei sein für v_2 in der Formel B. Dabei ist noch die folgende *Variablenbedingung* zu beachten:

VB Die Individuenvariable v_1 darf unter dem Bruchstrich, also in $A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$ nicht frei vorkommen.

Die zugrundeliegende semantische Idee dieser Regel ist: Wenn v_1 nirgendswo in

$$A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$$

frei vorkommt, und dennoch die Herleitbarkeitsbeziehung

$$A_1, \ldots, A_m \vdash B[v_1/v_2]$$

besteht – wobei v_1 in $B[v_1/v_2]$ natürlich frei vorkommen kann – so muss $B[v_1/v_2]$ gegeben $A_1, \ldots, A_m$ der Fall sein, *ganz unabhängig davon, welches Objekt im Gegenstandsbereich der Wert der Variable v_1 ist und auf welches Objekt $B[v_1/v_2]$ somit zutrifft.* Anders ausgedrückt: Es muss dann auch $\forall v_2 B$ logisch aus denjenigen Formeln $A_1, \ldots, A_m$ folgen, auf denen die Herleitung von B beruhte, d.h., aus den Prämissen und den (wenn vorhanden) noch nicht abgeschlossenen Annahmen, aus denen B abgeleitet wurde. Die logische (Meta-) Gültigkeit dieser Regel lässt sich semantisch mit den formalen Mitteln aus dem letzten Kapitel nachweisen: Wenn man das Herleitbarkeitszeichen '$\vdash$' über bzw. unter dem obigen Bruchstrich durch das Symbol '$\models$' für logische Folgerung ersetzt, folgt aus dem Bestehen der Folgerungsbeziehung über dem Bruchstrich in der Tat das Bestehen der Folgerungsbeziehung unter dem Bruchstrich. Oder noch einmal anders formuliert: Wenn man mit $A_1, \ldots, A_m$ zeigen kann, dass ein "beliebig gewähltes" Objekt v_1 (über welches $A_1, \ldots, A_m$ nichts Spezielles aussagen) die Eigenschaft $B[v_1/v_2]$ hat, dann lässt sich mit $A_1, \ldots, A_m$ auch die universell quantifizierte Formel $\forall v_2 B$ zeigen (sofern auch diese nichts Spezifisches mehr über v_1 aussagt). Mittels Herleitbarkeitsbeziehungen formuliert, ergibt dies aber genau die Regel (UE) mit der entsprechenden Variablenbedingung VB.

(UE) ist übrigens genau in demselben Sinne eine *Meta*regel, wie beispielsweise (IB) in der Aussagenlogik eine Metaregel war: Es handelt sich gewissermaßen um einen Metaschluss, der von der Zulässigkeit eines Schlusses auf die Zulässigkeit eines anderen Schlusses schließt. Im Unterschied zu den aussagenlogischen Metaregeln benötigt (UE) jedoch keine spezifischen Annahmen:

Während beispielsweise jede Anwendung von (IB) neben den "gegebenen" Formeln $A_1, \ldots, A_n$ die Zusatzannahme $\neg B$ nötig machte, lässt sich (UE) rein auf Basis der "gegebenen" Formeln $A_1, \ldots, A_n$ durchführen. Sowohl über dem obigen Bruchstrich, als auch unterhalb desselben finden sich dieselben Formeln auf der linken Seite des Herleitbarkeitszeichens. Daher wird sich (UE) beim Herleiten auch einfacher notieren lassen als die aussagenlogischen Metaregeln, weil auf eine spezielle Zeile mit einer "UE-Annahme" verzichtet werden kann.

Zum Beispiel können wir nun mit Hilfe von (UE) endlich die Herleitung zu

- $\neg\exists x(F(x) \wedge \neg S(x)) \vdash \forall x(F(x) \rightarrow S(x))$

durchführen:

$\underline{1.\ \neg\exists x(F(x) \wedge \neg S(x))}$ (P1)

2. $\| \ F(y)$ (KB-Annahme)

3. $\| \ \| \ \neg S(y)$ (IB-Annahme)

4. $\| \ \| \ F(y) \wedge \neg S(y)$ 2., 3. (KON)

5. $\| \ \| \ \exists x(F(x) \wedge \neg S(x))$ 4. (EE)

6. $\| \ \| \ \exists x(F(x) \wedge \neg S(x)) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge \neg S(x))$ 5., 1. (KON)

7. $\| \ S(y)$ 3.–6. (IB)

8. $F(y) \rightarrow S(y)$ 2.–7. (KB)

9. $\forall x(F(x) \rightarrow S(x))$ 8. (UE)

Für die Anwendung von (UE) auf Zeile 8. muss die Variablenbedingung erfüllt sein. Hier heißt dies: B ist die Formel $F(x) \rightarrow S(x)$, v_1 ist die Variable y, und v_2 ist die Variable x. Die Variable y darf also in keiner Prämisse oder noch aktiven Annahme, auf der die Zeile 9. beruht, frei vorkommen, noch darf y in der Konklusion 9. der Anwendung von (UE) frei vorkommen. Die einzige relevante Prämisse oder Annahme in diesem konkreten Fall ist die Prämisse in Zeile 1. selbst, in der y gar nicht vorkommt und somit auch nicht frei vorkommt. In der Zeile 9. kommt y ebenfalls nicht vor und somit auch nicht frei vor. Die Variablenbedingung ist hier also erfüllt – andernfalls würde es sich nicht um eine prädikatenlogische Herleitung handeln. Man beachte, dass y auch in keiner IB-Annahme, KB-Annahme oder FU-Annahme frei vorkommen dürfte, die eventuell in der Zeile der Anwendung von (UE) noch nicht abgeschlossen wäre; in dem Falle der letzten Herleitung waren allerdings sowohl der konditionale

Beweis als auch der indirekte Beweis schon abgeschlossen, sodass die jeweiligen KB- bzw. IB-Annahmen nicht dahingehend überprüft werden mussten.

Wenn wir in Zukunft davon sprechen, dass gemäß der Variablenbedingung für UE eine Individuenvariable v_1 in $A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$ nicht frei vorkommen darf, so meinen wir damit immer: $A_1, \ldots, A_m$ sind die *relevanten* Prämissen oder Annahmen, die in dem Schluss auf $B[v_1/v_2]$ auch wirklich verwendet wurden. Zusätzliche Prämissen, die bei der Herleitung von $B[v_1/v_2]$ gar nicht verwendet wurden, oder zusätzliche noch offene Annahmen, die bei der Herleitung von $B[v_1/v_2]$ gar nicht verwendet wurden, oder Annahmen, die bei der Herleitung von $B[v_1/v_2]$ zwar Verwendung fanden, jedoch bereits geschlossen wurden, oder auch Formeln in irgendwelchen Zwischenschritten der Herleitung werden dabei *nicht* als zu den "relevanten" Formeln $A_1, \ldots, A_m$ gehörig gezählt. Und in den tatsächlich relevanten Formeln $A_1, \ldots, A_m$ darf dann laut VB die relevante Variable v_1 nicht frei vorkommen, genausowenig wie v_1 in B frei vorkommen darf; andernfalls würde es sich nicht um eine korrekte Anwendung von UE handeln. Ganz analog werden wir später auch noch die Variablenbedingung in einer weiteren prädikatenlogischen Herleitungsregel verstehen.

Wir haben gesehen, dass, wenn wir ohne spezifische Bezugnahme (durch eine Individuenvariable) auf einen Gegenstand in den Prämissen zeigen können, dass auf einen konkreten Gegenstand die (komplexe) Eigenschaft A zutrifft, so dürfen wir mittels (UE) schließen, dass diese Eigenschaft dann *jedem* Gegenstand zukommt. Betrachten wir dazu ein weiteres ganz einfaches Beispiel: Angenommen, wir wollen

- $\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)$

spaßeshalber ohne Zuhilfenahme unserer aussagenlogischen Regel (TS) herleiten. Dann können wir auch wie folgt vorgehen:

1. $\forall x P(x)$ (P1)
2. $P(y)$ 1. (UB)
3. $\forall x P(x)$ 2. (UE)

$P(y)$ in Zeile 2. ist herleitbar unabhängig davon, wofür y stehen soll. In der Syntax soll es ja auch gar nicht darum gehen, welches Zeichen wofür steht. Weil der Wert von y aber sozusagen beliebig ist, lässt sich mittels (UE) auch $\forall x P(x)$ zeigen. Hier wäre die Herleitung von 3. aus 1. aber selbstverständlich auch anders möglich gewesen. Die Variablenbedingung ist in diesem Falle aber jedenfalls erfüllt, da in der einzigen Annahme in dieser Herleitung – der Prämisse P1 – die Variable y nicht vorkommt und daher auch nicht frei vorkommt, und dasselbe gilt für das Resultat der Anwendung von (UE), d.h. die Zeile 3.

Die Erfüllung der Variablenbedingung ist wesentlich, wenn wir keine semantisch (wie auch intuitiv) ungültigen Herleitungen produzieren wollen. Ebenso kann man zeigen, dass die implizite Forderung wichtig ist, dass in $B[v_1/v_2]$ auch wirklich *alle* freien Vorkommnisse von v_2 durch die Variable v_1 ersetzt werden; aber so haben wir Substitution ja von vornherein verstanden. Betrachten wir für den Moment nur das folgende Beispiel, das die Variablenbedingung motivieren soll.

Dies ist beispielsweise selbstverständlich *keine* Herleitung in unseren prädikatenlogischen System des natürlichen Schließens:

$\underline{1.\ P(x)}$ (P1)

2. $\forall y P(y)$ 1. (UE)

Die Zeile 1. ist der spezielle Fall einer Zeile, die sowohl ein Annahme – nämlich die Prämisse P1 – als auch eine, gegeben die Prämissen, sozusagen bereits als "hergeleitet" zu zählende Formel darstellt. Für die Anwendung von (UB) müsste die Variable v_1 hier die Variable x sein, die Variable v_2 aber die Variable y. Die Variable x (v_1) darf aber dann nicht in Zeile 1. frei vorkommen, wenn es sich bei der Anwendung von (UB) um eine zulässige Anwendung unter Berücksichtigung der Variablenbedingung VB handeln soll. x kommt aber sehr wohl in Zeile 1. frei vor, weshalb es sich bei der obigen Folge von Formeln auch nicht um eine Herleitung handelt. Und das ist auch gut so: Aus $P(x)$ folgt ja schließlich auch nicht logisch (d.h. semantisch), dass $\forall y P(y)$ der Fall ist. Aus genau demselben Grund ist natürlich auch dies *keine* Herleitung:

$\underline{1.\ P(x)}$ (P1)

2. $P(x)$ 1. (TS)

3. $\forall y P(y)$ 2. (UE)

Wir werden später noch ein interessanteres Beispiel behandeln, welches ebenfalls die obige Variablenbedingung rechtfertigt.

Sehen wir uns aber zunächst noch einige *korrekte* Anwendungsbeispiele zu den bisherigen Quantorenregeln an:

Alles ist abstrakt oder konkret.

Es gibt aber nichts Abstraktes.

Also gibt es etwas Konkretes.

- $\forall x(A(x) \vee K(x)), \neg\exists x A(x) \vdash \exists x K(x)$

  1. $\forall x(A(x) \vee K(x))$ (P1)

  $\underline{2.\ \neg\exists x A(x)}$ (P2)

  3. $A(y) \vee K(y)$ 1. (UB)

  4. $\|$ $\neg\neg A(y)$ (IB-Annahme)

  5. $\|$ $A(y)$ 4. (DN2)

  6. $\|$ $\exists x A(x)$ 5. (EE)

  7. $\|$ $\exists x A(x) \wedge \neg\exists x A(x)$ 6., 2. (KON)

  8. $\neg A(y)$ 4.–7. (IB)

  9. $K(y)$ 3., 8. (DS1)

  10. $\exists x K(x)$ 9. (EE)

Das ist ein weiteres typisches Beispiel für eine prädikatenlogische Herleitung: Aus generellen Sätzen werden zunächst Formeln ohne Quantoren abgeleitet – mittels der Beseitigungsregeln – dann wird mit diesen aussagenlogisch geschlossen, um schließlich mit Hilfe von Einführungsregeln wieder bei generellen Sätzen zu enden.

Ähnlich hier, wobei sich die Konklusion aber von der vorigen Konklusion unterscheidet:

> Alles ist abstrakt oder konkret.
>
> Es gibt aber nichts Abstraktes.
>
> ---
>
> Also ist alles konkret.

- $\forall x(A(x) \vee K(x)), \neg\exists x A(x) \vdash \forall x K(x)$

  1. $\forall x(A(x) \vee K(x))$ (P1)

  $\underline{2.\ \neg\exists x A(x)}$ (P2)

  3. $A(y) \vee K(y)$ 1. (UB)

  4. $\|$ $\neg\neg A(y)$ (IB-Annahme)

5. $\| \ A(y)$ 4. (DN2)

6. $\| \ \exists x A(x)$ 5. (EE)

7. $\| \ \exists x A(x) \land \neg \exists x A(x)$ 6., 2. (KON)

8. $\neg A(y)$ 4.–7. (IB)

9. $K(y)$ 3., 8. (DS1)

10. $\forall x K(x)$ 9. (UE)

Die Variablenbedingung für die Anwendung von (UE) in Zeile 10. ist dabei erfüllt: Die Variable y kommt weder in den Annahmen P1 und P2, noch in der Konklusion von (UE) in Zeile 10. selbst vor, daher kommt y dort auch nicht frei vor.

Weiters:

Alle Philosophiestudentinnen sind fleißig.

Wenn also alles eine Philosophiestudentin ist, dann ist auch alles fleißig.

- $\forall x(P(x) \to F(x)) \vdash \forall x P(x) \to \forall x F(x)$

$\underline{1.\ \forall x(P(x) \to F(x))}$ (P1)

2. $\| \ \forall x P(x)$ (KB-Annahme)

3. $\| \ P(y) \to F(y)$ 1. (UB)

4. $\| \ P(y)$ 2. (UB)

5. $\| \ F(y)$ 4., 3. (MP)

6. $\| \ \forall x F(x)$ 5. (UE)

7. $\forall x P(x) \to \forall x F(x)$ 2.–6. (KB)

Erneut ist die Variablenbedingung für die Anwendung von (UE) in Zeile 6. erfüllt: Die Variable y kommt weder in der Annahme P1, noch in der noch offenen KB-Annahme in Zeile 2., noch in der Konklusion von (UE) in Zeile 6. vor und somit auch nicht frei vor.

Wir sind aber noch nicht ganz “fertig” mit unserer prädikatenlogischen Herleitungsordnung. Nehmen wir an, wir haben das folgende semantisch wie auch intuitiv gültige Argument gegeben:

Manche Außerirdische stammen vom Vulkan.

Also gibt es Außerirdische.

In logische Form gebracht und als deduktiver Schluss formuliert, wobei a hier eine Individuenkonstante für 'Vulkan' ist:

- $\exists x(A(x) \wedge S(x,a)) \vdash \exists x A(x)$

Mathematiker und Mathematikerinnen verwenden die darin implizit enthaltene Schlussregel ständig. Informell lässt sich diese in etwa wie folgt erklären:

1. Gemäß der Prämisse gibt es Außerirdische, die vom Vulkan stammen. Formal: $\exists x(A(x) \wedge S(x,a))$.

2. Sei y nun ein beliebiger dieser Außerirdischen, die vom Vulkan stammen. (Man kann einen solchen "wählen", denn es gibt diese ja nach der letzten Zeile.) Formal: $A(y) \wedge S(y,a)$.

   (Dies ist der Schritt, den Mathematiker und Mathematikerinnen im Rahmen ihres Studiums ganz automatisch erlernen: *Es gibt etwas, das ... ist. Sei y nun eines der Dinge, die ... sind.* etc.)

3. Dieser y ist also ein Außerirdischer. (Da er ja nach vorher ein Außerirdischer ist, der vom Vulkan stammt.) Formal: $A(y)$.

4. Es gibt folglich Außerirdische. (y ist ein Beispiel, gemäß der vorherigen Zeile.) Formal: $\exists x A(x)$.

5. Die letzte Folgerung ist ganz unabhängig davon, welchen der Außerirdischen, die vom Vulkan stammen, man vorher ausgewählt hatte. Nur die Existenz von Außerirdischen, die vom Vulkan stammen, wurde in der "Herleitung" der Existenz von Außerirdischen vorausgesetzt. Es folgt daher in der Tat aus der Prämisse: Es gibt Außerirdische.
   Formal: $\exists x A(x)$.

Um dies zu formalisieren, haben wir die letzte prädikatenlogische Regel zu verwenden, die uns noch zu unserem System des natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik fehlt: Die Regel der *Existentiellen Beseitigung*.

(EB) Existentielle Beseitigung, vorausgesetzt VB':

$$\frac{A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m \vdash B}{\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B}$$

v_1 soll dabei frei sein für v_2 in der Formel A. Es ist auch wieder eine *Variablenbedingung* zu beachten:

VB' Die Individuenvariable v_1 darf unter dem Bruchstrich, also in $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B$ nicht frei vorkommen.

Die Formeln $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m$ sind dabei wieder die "relevanten" Prämissen oder Annahmen, auf denen der Schluss auf B beruht – relevant in demselben Sinne, wie bereits für die Regel UE erklärt.

Die semantische Idee hinter dieser Regel ist ähnlich derjenigen für die Universelle Einführung: Wenn v_1 in

$$\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B$$

nicht frei vorkommt und dennoch

$$A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m \vdash B$$

der Fall ist – wobei in $A[v_1/v_2]$ die Variable v_1 selbstverständlich frei vorkommen kann – dann muss B aus $A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m$ logisch folgen, *unabhängig davon, welches Objekt der Wert der Variable v_1 ist.* Das heißt: Allein die *Existenz* eines Objektes, für das A der Fall ist, reicht zusammen mit $A_1, \ldots, A_m$ hin, um die Wahrheit von B zu gewährleisten. Dies ist aber genau, was die Regel (EB) ausdrückt. Und es lässt sich entsprechend mit den Mitteln des letzten Kapitels nachweisen, dass (EB) semantisch einwandfrei bzw. korrekt ist: Gegeben VB', wenn B logisch aus $A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m$ folgt, so folgt B auch schon aus $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m$.

(EB) ist offensichtlich wieder eine Metaregel. In diesem Fall macht die Anwendung von (EB) aber auch das Aufstellen einer Zusatzannahme nötig, nämlich der von $A[v_1/v_2]$. Die Situation im Rahmen einer Herleitung ist dann die: Man hat die Formeln $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m$ angenommen oder bereits hergeleitet. Das Vorhandensein der Formel $\exists v_2 A$ erlaubt es einem dann, die EB-Annahme $A[v_1/v_2]$ aufzustellen und auf diese Weise eine Anwendung der Existentiellen Beseitigung zu eröffnen. Daraus erklärt sich auch der Name 'Existentielle *Beseitigung*': Innerhalb einer Herleitung geht man nämlich von der Formel $\exists v_2 A$ mit anfänglichem Existenzquantor zu der einfacheren Formel $A[v_1/v_2]$ über, die über ein Existenzquantorvorkommnis weniger verfügt. A ist dabei nicht beliebig, sondern muss so beschaffen sein, dass nach Einsetzen einer Variable v_1 für die freien Vorkommnisse von v_2 in A – wobei v_1 frei sein muss für v_2 in A – gerade die EB-Annahme entsteht (also die Formel $A[v_1/v_2]$), und zugleich nach Voranstellen des Quantorausdrucks $\exists v_2$ vor A

gerade die existentiell quantifizierte Formel $\exists v_2 A$ ensteht, die bereits vorhanden ist. Man kann sich dies auch so vorstellen: Gegeben $\exists v_2 A$, "nennt" man eines der Dinge, für die A gilt, v_1; dass es überhaupt etwas gibt, das man so benennen kann, ergibt sich durch das Vorhandensein von $\exists v_2 A$. Nach etwaigen weiteren Herleitungen wird diese Anwendung von (EB) dann durch das Herleiten einer Formel B beendet, die so beschaffen sein muss, dass weder in B, noch in einer der Formeln $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m$, auf der die Herleitung von B beruht, die Variable v_1 frei vorkommt (das ist die Variablenbedingung VB' von oben). Es war also für die Herleitung von B ganz egal, welches Objekt unter denen, die A erfüllten, man mit v_1 "benannt" hat – es ging einzig und allein um die Existenz eines solchen Objektes. Entsprechend ist B mittels (EB) aus der existentiell quantifizierten Formel $\exists v_2 A$ unter Zuhilfenahmme der übrigen Annahmen herleitbar.

Die entsprechende Herleitung für das obige Beispiel sieht dann so aus:

1. $\underline{\exists x(A(x) \wedge S(x,a))}$ (P1)
2. $\| \ A(y) \wedge S(y,a)$ (EB-Annahme)
3. $\| \ A(y)$ 2. (SIMP1)
4. $\| \ \exists x A(x)$ 3. (EE)
5. $\exists x A(x)$ 2.–4. (EB)

Die EB-Annahme $A(y) \wedge S(y,a)$ ist hier in der Tat so, dass sie aus der Formel $A(x) \wedge S(x,a)$, die sich nach $\exists x$ in Zeile 1. findet, durch Einsetzen von y (v_1) für die Variable x (v_2) entsteht. Nachdem Zeile 4. $\exists x A(x)$ dann aus der Prämisse (P1) und der EB-Annahme abgeleitet wurde und diese Anwendung der Existentiellen Beseitigung im Folgenden abgeschlossen werden soll, überprüft man, ob die Variablenbedingung VB' erfüllt ist: Hier ist dies offensichtlich der Fall, da y (v_1) weder in der Annahme P1, noch in dem Ende der (EB)-Anwendung, also in Zeile 4., vorkommt und somit dort natürlich auch nicht frei vorkommt. Das Endergebnis dieser Anwendung von (EB) wird dann in Zeile 5. zusammengefasst: Auf Basis des EB-Teiles in Zeile 2.–4. wurde auf die Formel $\exists x A(x)$ geschlossen. Durch die Variablenbedingung ist sichergestellt, dass dieser Schluss nur von der Existenz des Objektes y abhängig war, von dem in der EB-Annahme 2. die Rede war, nicht aber davon – semantisch ausgedrückt – welches Objekt im Gegenstandbereich der Wert der Variable y war.

Man beachte, wie diese formale Herleitung die informelle "Herleitung" von oben nachbildet. Die obige Variablenbedingung VB' präzisiert dabei syntaktisch die "Beliebigkeit" der Wahl des Außerirdischen y, der vom Vulkan stammt.

Logisch gesehen, ist der Punkt der EB-Annahme in Zeile 2 dieser: Indem man den Existenzquantor durch "Wahl" eines "konkreten" Objektes y wegbekommt, gewinnt man Zugriff auf die in der Existenzformel enthaltene Konjunktionsformel, von der man dann mittels einer rein aussagenlogischen Regel (SIMP1) auf Zeile 3 schließen kann.

Noch eine letzte Bemerkung dazu: Nehmen wir an, man ist gerade dabei, auf Basis einer Formel $\exists v_2 A$ zu einer EB-Annahme $A[v_1/v_2]$ überzugehen, um damit eine Instanz der Existentiellen Beseitigung zu beginnen. Woraus erklärt sich dann die Wahl von v_1? Z.B.: Wie "ergibt" sich y aus der Formal $\exists x(A(x) \wedge S(x,a))$ in der vorigen Herleitung? Antwort: Die Wahl der nämlichen Variable ist *völlig irrelevant*, solange letztlich die Variablenbedingung erfüllt sein wird (ohne die ja die Anwendung der Existentiellen Beseitigung nicht fertiggestellt werden kann). Beispielsweise lässt sich als v_1 *irgendeine* Variable wählen, die in keiner Prämisse, Annahme, oder bereits hergeleiteten Formel der nämlichen Herleitung enthalten ist. Kurz: Eine "neue" Variable. (So wie in der Herleitung oben y "neu" war.)

Bringen wir noch einige weitere Anwendungsbeispiele:

Es gibt Zahlen.

Alle Zahlen sind abstrakte Gegenstände.

Also gibt es abstrakte Gegenstände.

- $\exists x Z(x), \forall x(Z(x) \rightarrow A(x)) \vdash \exists x A(x)$

1. $\exists x Z(x)$ (P1)

2. $\underline{\forall x(Z(x) \rightarrow A(x))}$ (P2)

3. $\|$ $Z(y)$ (EB-Annahme)

4. $\|$ $Z(y) \rightarrow A(y)$ 2. (UB)

5. $\|$ $A(y)$ 3., 4. (MP)

6. $\|$ $\exists x A(x)$ 5. (EE)

7. $\exists x A(x)$ 3.–6. (EB)

Bei dieser Herleitung wird also zuerst die EB-Annahme getroffen, mittels derer die "neue" Variable y eingeführt wird. Erst anschließend wird die Regel der

Universellen Beseitigung (UB) unter Verwendung eben dieser Variable y angewendet. (Dies *muss* allerdings nicht unbedingt so gehandhabt werden, solange nur letztlich bei der Anwendung von EB die Variablenbedingung gewährleistet ist.)

Es gibt Salzburger.

Also gibt es Salzburger, die Salzburger sind.

- $\exists x S(x) \vdash \exists x(S(x) \wedge S(x))$

1. $\underline{\exists x S(x)}$ (P1)
2. $\|\ S(y)$ (EB-Annahme)
3. $\|\ S(y) \wedge S(y)$ 2., 2. (KON)
4. $\|\ \exists x(S(x) \wedge S(x))$ 3. (EE)
5. $\exists x(S(x) \wedge S(x))$ 2.–4. (EB)

Alles ist abstrakt.

Also ist es nicht der Fall, dass es etwas nicht Abstraktes gibt.

- $\forall x A(x) \vdash \neg\exists x \neg A(x)$

1. $\underline{\forall x A(x)}$ (P1)
2. $\|\ \neg\neg\exists x \neg A(x)$ (IB-Annahme)
3. $\|\ \exists x \neg A(x)$ 2. (DN2)
4. $\|\ \|\ \neg A(y)$ (EB-Annahme)
5. $\|\ \|\ A(y)$ 1. (UB)
6. $\|\ \|\ A(z) \wedge \neg A(z)$ 5., 4. (ECQ)
7. $\|\ A(z) \wedge \neg A(z)$ 4.–6. (EB)
8. $\neg\exists x \neg A(x)$ 2.–7. (IB)

Auf Basis des Vorhandenseins der Existenzformel in 3. darf hier die EB-Annahme in 4. eingeführt werden. Um den EB-Teil zu beenden, muss eine Formel hergeleitet werden, in der die Variable y nicht frei vorkommt: Es wäre daher nicht möglich gewesen, die Zeilen 5. und 4. durch (KON) mit Konjunktion zusammenzufügen und das Resultat als Ende des EB-Teiles zu verwenden, weil in der Formel $A(y) \wedge \neg A(y)$ ja die Variable y frei auftritt. Stattdessen wendet man einfach die aussagenlogische Regel des "Ex Contradictione Quodlibet" (aus einem Widerspruch folgt Beliebiges) auf 5. und 4. an, leitet damit beispielsweise die Formel $A(z) \wedge \neg A(z)$ ab – jede andere Formel der Form $C \wedge \neg C$, in der y nicht frei vorkommt, wäre genausogut geeignet gewesen – und beendet den EB-Teil dann mit dieser Formel. In 7. wird dieser Ergebnis nochmals zusammengefasst, und weil 7. eben von der Form $C \wedge \neg C$ ist, lässt sich damit auch der indirekte Beweis beenden, der in Zeile 2. begonnen worden war.

Jeder Mensch ist sterblich.
Alles ist materiell.

Es gibt Menschen.

Daher gibt es etwas, das sterblich und materiell ist.

- $\forall x(M(x) \to S(x)), \forall x M'(x), \exists x M(x) \vdash \exists x(S(x) \wedge M'(x))$

1. $\forall x(M(x) \to S(x))$ (P1)

2. $\forall x M'(x)$ (P2)

3. $\underline{\exists x M(x)}$ (P3)

4. $\|$ $M(y)$ (EB-Annahme)

5. $\|$ $M(y) \to S(y)$ 1. (UB)

6. $\|$ $S(y)$ 4., 5. (MP)

7. $\|$ $M'(y)$ 2. (UB)

8. $\|$ $S(y) \wedge M'(y)$ 6., 7. (KON)

9. $\|$ $\exists x(S(x) \wedge M'(x))$ 8. (EE)

10. $\exists x(S(x) \wedge M'(x))$ 4.–9. (EB)

Zum Abschluss wollen wir noch zwei Beispiele für *Pseudo*herleitungen betrachten, in denen zu Unrecht eine der Variablenbedingungen ignoriert wurde:

1. $\underline{\forall x \exists y R(x,y)}$ (P1)
2. $\exists y R(x,y)$ 1. (UB)
3. $\|$ $R(x,z)$ (EB-Annahme)
4. $\|$ $\forall x R(x,z)$ 3. (UE)
5. $\|$ $\exists y \forall x R(x,y)$ 4. (EE)
6. $\exists y \forall x R(x,y)$ 3.–5. (EB)

Wir wissen bereits, dass aus $\forall x \exists y R(x,y)$ *nicht* logisch folgt, dass $\exists y \forall x R(x,y)$ der Fall ist. Wenn unsere Herleitungsregeln alle korrekt sind und auch korrekt angewandt werden, dann darf daher aus $\forall x \exists y R(x,y)$ die Formel $\exists y \forall x R(x,y)$ auch *nicht* herleitbar sein. In der Tat ist etwas in der obigen versuchten Herleitung "schiefgegangen": Der Übergang von 1. auf 2. ist noch korrekt – die Variable x wird dabei in einer Anwendung von (UB) für sich selbst eingesetzt, was unproblematisch ist. Auch die EB-Annahme in 3. darf noch so getroffen werden. Aber dann Zeile 4.: Hier soll (UE) auf Zeile 3. angewandt werden. Die Formel $\forall x R(x,z)$ soll dabei die Formel $\forall v_2 B$ in (UE) sein, wobei v_2 die Variable x ist, v_1 ebenfalls die Variable x ist, B die Formel $R(x,z)$ sein soll, und $B[v_1/v_2]$ ebenso die Formel $R(x,z)$ sein soll. Die Variablenbedingung VB für (UE) lautete jedoch: Die Individuenvariable v_1 darf unter dem Bruchstrich, also in $A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$ nicht mehr frei vorkommen, wobei $A_1, \ldots, A_m$ die relevanten Annahmen sind, auf denen die Herleitung von $\forall v_2 B$ beruht. In unserem Fall: Die Variable x darf in den relevanten Annahmen, die für das Vorhandensein der Formel $\forall x R(x,z)$ in der Herleitung gesorgt haben, nicht mehr frei vorkommen. Hier ist jedoch eine dieser relevanten Annahmen die EB-Annahme $R(x,z)$ in Zeile 3.: $R(x,z)$ enthält aber die Variable x frei, sodass VB verletzt wurde. Aus diesem Grunde handelt es sich bei obiger Folge von Formeln auch nicht um eine Herleitung in unserem System des natürlichen Schließens.

Analog ist dies *keine* korrekte Anwendung von (EB):

1. $\underline{\exists x P(x)}$ (P1)
2. $\|$ $P(y)$ (EB-Annahme)
3. $\|$ $P(y)$ 2. (TS)

4. $P(y)$ 2.–3. (EB)

Die EB-Annahme in Zeile 2 ist harmlos, ebenso die Anwendung der trivialen Schlussform (TS). Der EB-Teil kann jedoch nicht mit $P(y)$ in Zeile 3. abgeschlossen werden, weil die Variablenbedingung VB' für (EB) u.a. besagt, dass die Individuenvariable v_1 (hier y) in der Konklusion B (hier $P(y)$) nicht frei vorkommen darf. In der Pseudoherleitung oben ist also VB' verletzt worden, weshalb es sich dabei ebensowenig um eine Herleitung handelt.

Mit unseren vier neuen Regeln – Einführungs- und Beseitigungsregeln sowohl für $\forall$ als auch für $\exists$ – ist unser Regelsystem für die Prädikatenlogik komplett. Auf Basis dieses erweiterten Regelsystems lassen sich nun alle syntaktischen Begriffe, die das Herleiten betreffen – die Beweisbarkeit von Formeln (prämissenfreie Herleitbarkeit), die Herleitbarkeit von Formeln aus Formeln, sowie die deduktive Gültigkeit von Argumentformen – genauso definieren, wie dies schon am Ende von Sektion 6.2 auf Basis der bloß aussagenlogischen Herleitungregeln geschehen ist. Wir verzichten daher auf eine Wiederholung dieser Definitionen und setzen einfach voraus, dass diese eins zu eins übertragen wurden.

11.2 Zusammenfassung der Regeln unseres prädikatenlogischen Systems des natürlichen Schließens

Wir können nun unser deduktives System für die Prädikatenlogik nochmals zusammenfassend angeben. Folgende Grundschlussregeln stehen uns zur Verfügung:

(MP) $A, A \to B \vdash B$ (Modus Ponens)

(MT) $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ (Modus Tollens)

(DS1) $A \vee B, \neg A \vdash B$ (Disjunktiver Syllogismus 1)

(DS2) $A \vee B, \neg B \vdash A$ (Disjunktiver Syllogismus 2)

(SIMP1) $A \wedge B \vdash A$ (Simplifikation 1)

(SIMP1) $A \wedge B \vdash B$ (Simplifikation 2)

(ADD1) $A \vdash A \vee B$ (Addition 1)

(ADD2) $B \vdash A \vee B$ (Addition 2)

(KON) $A, B \vdash A \wedge B$ (Konjunktion)

(DN1) $A \vdash \neg\neg A$ (Doppelte Negation 1)

(DN2) $\neg\neg A \vdash A$ (Doppelte Negation 2)

(DIS) $A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C$ (Disjunktion)

(TS) $A \vdash A$ (Triviale Schlussform)

(ECQ) $A, \neg A \vdash B$ (Ex Contradictione Quodlibet)

(ÄQ-EIN) $A \to B, B \to A \vdash A \leftrightarrow B$ (Einführung der Äquivalenz)

(ÄQ-ELIM1) $A \leftrightarrow B \vdash A \to B$ (Elimination der Äquivalenz 1)

(ÄQ-ELIM2) $A \leftrightarrow B \vdash B \to A$ (Elimination der Äquivalenz 2)

(UB) (t frei für v in A!) $\forall v A \vdash A[t/v]$ (Universelle Beseitigung)

(EE) (t frei für v in A!) $A[t/v] \vdash \exists v A$ (Existentielle Einführung)

Folgende Metaregeln stehen zur Verfügung:

(IB) Wenn $\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{\neg B, A_1, \ldots, A_n \vdash C \wedge \neg C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B}$$

(KB) Wenn $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$ eine Schlussregel ist, so ist auch $A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, B \vdash C}{A_1, \ldots, A_n \vdash B \to C}$$

(FU) Wenn $A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ und $\neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C$ Schlussregeln sind, dann ist auch $B_1, \ldots, B_n \vdash C$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A, B_1, \ldots, B_n \vdash C \quad \neg A, B_1, \ldots, B_n \vdash C}{B_1, \ldots, B_n \vdash C}$$

(UE) (Beachte VB! Und v_1 frei für v_2 in B!)
Wenn $A_1, \ldots, A_m \vdash B[v_1/v_2]$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \vdash B[v_1/v_2]}{A_1, \ldots, A_m \vdash \forall v_2 B}$$

(EB) (Beachte VB'! Und v_1 frei für v_2 in A!)
Wenn $A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m \vdash B$ eine Schlussregel ist, dann ist auch $\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B$ eine Schlussregel; kurz:

$$\frac{A[v_1/v_2], A_1, \ldots, A_m \vdash B}{\exists v_2 A, A_1, \ldots, A_m \vdash B}$$

11.3 Zusätzliche Faustregeln für das prädikatenlogische Herleiten

Wir wollen schließlich noch einige zusätzliche – allein die Prädikatenlogik betreffende – Faustregeln für die deduktive Methode angeben:

Ist eine *Prämissenformel* eine *Existenzformel* $\exists v_2 A$, so versuche man eine **Existentielle Beseitigung**, und zwar derart, dass eine Annahme der Form $A[v_1/v_2]$ getroffen wird, sodass beim folgenden Herleiten einer Konklusion die *Variablenbedingung* VB' erfüllt ist: Weder in einer der verwendeten Prämissen noch in der Konklusion der (EB) noch in der Annahme einer sonstigen offenen Unterherleitung darf die Individuenvariable v_1 frei vorkommen.

Ist eine *Prämissenformel* eine *Allformel* $\forall v A$, so versuche man eine **Universelle Beseitigung**, und zwar derart, dass man eine Formel $A[t/v]$ als Konklusion erhält, wobei t ein singulärer Term ist, der entsprechend der herzuleitenden Formel zu wählen ist.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Existenzformel* $\exists v A$, so versuche man eine **Existentielle Einführung**, und zwar derart, dass man die Existenzformel aus einer Formel B (in der ein singulärer Term t vorkommt) dadurch erhält, dass $B = A[t/v]$.

Ist die *Konklusionsformel* eine *Allformel* $\forall v_2 B$, so versuche man eine **Universelle Einführung**, und zwar derart, dass man eine Konklusion der Form $B[v_1/v_2]$ herleitet, wobei die *Variablenbedingung* VB erfüllt sein muss: Weder in einer der verwendeten Prämissen noch in der Konklusion der (UE) noch in der Annahme einer offenen Unterherleitung darf die Individuenvariable v_1 frei vorkommen.

11.4 Korrektheit und Vollständigkeit von $\vdash$ für die Prädikatenlogik

Wie schon in der Aussagenlogik ergibt sich die folgende Korrespondenz zwischen syntaktischen Begriffen und semantischen Begriffen der Prädikatenlogik:

- Herleitbarkeit entspricht der logischen Folge,
- Beweisbarkeit entspricht der logischen Wahrheit,
- deduktive Gültigkeit entspricht der logischen Gültigkeit.

Und erneut lässt sich auf Basis unserer exakten quasi-mathematischen Begriffsbildung *beweisen*, dass diese Begriffe jeweils zueinander in den folgenden *extensionalen* Zusammenhängen stehen (wobei wir wieder kurz '$\models A$' für 'A ist logisch wahr' schreiben, und wobei $\mathcal{F}$ die Menge der Formeln einer vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache ist):

- Korrektheit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$:
    Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, dann $A_1, \ldots, A_n \models B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: Wenn $\vdash A$, dann $\models A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: Wenn $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ deduktiv gültig ist, dann ist $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig.

Sowie:

- Vollständigkeit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$:
    Wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$, dann $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: Wenn $\models A$, dann $\vdash A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: Wenn $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig ist, dann ist $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ deduktiv gültig.

Genau wie schon in der Aussagenlogik gilt: Während die Korrektheit sicherstellt, dass "nicht zu viel" in unserem System des natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik hergeleitet werden kann, sorgt die Vollständigkeit dieser Herleitungsordnung dafür, dass "nicht zu wenig" hergeleitet werden kann. Korrektheit und Vollständigkeit zusammengenommen ergeben dann wiederum die extensionale Übereinstimmung der zueinander korrespondierenden syntaktischen bzw. semantischen Begriffe:

- Korrektheit und Vollständigkeit von $\vdash$ bzgl. $\models$:
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ gdw $A_1, \ldots, A_n \models B$.
  - Für alle $A \in \mathcal{F}$: $\vdash A$ gdw $\models A$.
  - Für alle $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{F}$: $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ ist deduktiv gültig gdw $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ logisch gültig ist.

Der Beweis dafür – der auf Kurt Gödels [4] Dissertation zum Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik zurückgeht – ist um einiges schwieriger als der für das entsprechende Ergebnis für die Aussagenlogik, er verwendet jedoch immer noch nur ganz übliche mathematische Hilfsmittel. Wir verzichten wiederum darauf, diesen Beweis anzugeben. (Gödels Beweis des Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik ist übrigens von seinen späteren *Un*vollständigkeitssätzen zu Systemen der Arithmetik zu unterscheiden.)

Wenn also B aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch (d.h. semantisch) folgt, dann ist B auch aus $A_1, \ldots, A_n$ herleitbar, und zwar auf Basis der von uns eingeführten Regeln. Genau das bedeutet es zu sagen, dass unsere Herleitungsordnung *vollständig* in Hinblick auf unsere Semantik ist. Dies impliziert jedoch *nicht*, dass man ein Computerprogramm schreiben könnte, das bei der Eingabe von B sowie $A_1, \ldots, A_n$ Folgendes tun würden: "Ja" auszugeben, wenn B aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt, und "Nein" auszugeben, wenn B *nicht* aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt. Ein solches Computerprogramm bzw. ein solcher Algorithmus wäre ein sogenanntes Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik. Es lässt sich jedoch beweisen, dass ein solches Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik nicht existiert (wie von Alonzo Church und Alan Turing bewiesen wurde). Durch systematische Anwendung der Regeln unseren Systems des natürlichen Schließens lassen sich zwar alle prädikatenlogischen Argumentformen $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ *aufzählen*, für die B aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt, es lässt sich aber nicht in endlicher Zeit *entscheiden*, ob B aus $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt. (Wenn dies nicht der Fall ist, wird zwar bei der systematischen Anwendung unserer Regeln $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ nie aufgezählt werden, es würde aber "unendlich lange" dauern, bis man dieses Umstands gewahr würde. :-) Dies stellt einen weiteren Unterschied zur Aussagenlogik dar, in der man jederzeit mittels eines einfachen Verfahrens entscheiden kann, ob eine aussagenlogische Formel B aus aussagenlogischen Formeln $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt oder nicht: Die Wahrheitstafelmethode war gerade so ein Verfahren. Zu dieser existiert jedoch, beweisbarerweise, kein Gegenstück in der komplexeren Prädikatenlogik.

11.5 Übungen

Übung 11.1 Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\forall x(P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$
2. $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x) \vdash \forall x(P(x) \lor Q(x))$
3. $\vdash \forall x(P(a) \lor Q(x)) \leftrightarrow P(a) \lor \forall x Q(x)$
4. $\vdash \forall x(P(a) \land Q(x)) \leftrightarrow P(a) \land \forall x Q(x)$
5. $\vdash \forall x(P(a) \to Q(x)) \leftrightarrow (P(a) \to \forall x Q(x))$
6. $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$
7. $\vdash P(a) \land \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x(P(a) \land Q(x))$
8. $\vdash P(a) \lor \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x(P(a) \lor Q(x))$
9. $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \vdash \exists x(P(x) \lor Q(x))$
10. $\exists x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash \exists x Q(x)$
11. $\vdash (P(a) \to \exists x Q(x)) \leftrightarrow \exists x(P(a) \to Q(x))$

Übung 11.2 Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, dass die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alle Österreicher sind Europäer. Alle Salzburger sind Österreicher. Also sind alle Salzburger Europäer.
2. Alle Philosophen sind weise. Nun gibt es Salzburger Philosophen. Also sind einige Salzburger weise.
3. Es gibt keine Österreicher, die auf den Mond geflogen sind. Es gibt aber Kosmonauten, die Österreicher sind. Daher sind nicht alle Kosmonauten auf den Mond geflogen.
4. Nicht ein Lebewesen auf dem Mars ist glatzköpfig. Alle Skinheads sind jedoch glatzköpfig. Somit gibt es keinen Skinhead, der ein Lebewesen auf dem Mars ist.

Übung 11.3 Repräsentieren Sie die beiden folgenden Argumente und *versuchen* Sie zu zeigen, daß die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind. (Achtung: Eine der beiden Argumentformen ist deduktiv gültig, die andere jedoch nicht.)

1. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

2. Es gibt Lebewesen auf dem Mars. Alle Lebewesen auf dem Mars sind glatzköpfig. Somit gibt es Lebewesen auf dem Mars, die glatzköpfig sind.

Übung 11.4 Führen Sie die Herleitungen zu folgenden deduktiv gültigen Schlüssen durch:

1. $\exists x \forall y R(x, y) \vdash \forall y \exists x R(x, y)$

2. $\neg \exists x \neg P(x) \vdash \forall x P(x)$

3. $\exists x P(x) \vdash \neg \forall x \neg P(x)$

4. $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

5. $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$

6. $\forall x(\exists y P(y) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall y(P(y) \rightarrow Q(a))$

7. $\neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Übung 11.5 Repräsentieren Sie die folgenden Argumente, und zeigen Sie, daß die daraus resultierenden Argumentformen deduktiv gültig sind:

1. Alles hat eine Ursache. Gott hat jedoch keine Ursache. Also ist der Papst Tiroler.

2. Alle Salzburger lieben Salzburg. Es gibt jedoch niemanden, der Salzburg und alle Touristen in Salzburg liebt. Somit lieben die Salzburger nicht alle Touristen in Salzburg.

3. Es gibt nichts Allmächtiges. Wenn etwas ein Gott ist, ist es jedoch allmächtig. Also gibt es keinen Gott.

Kapitel 12

Appendix: Die materiale Implikation und Prädikatenlogik

In Kapitel 7 hatten wir gute Gründe für die Analyse von Implikationssätzen mittels der materialen Implikation angegeben – Gründe, die sich aus plausiblen Herleitungsregeln für das aussagenlogische Schließen ergeben hatten. Nun wollen wir noch zwei weitere gute Gründe für die materiale Deutung von Konditionalen hinzufügen, diesmal jedoch solche, welche sich zwanglos aus semantischen Überlegungen zur Prädikatenlogik ergeben.

Zunächst einmal sollte sich

1. Alle Ps sind Qs.

unproblematischerweise als logisch äquivalent zu

2. Für alle x gilt: Wenn x ein P ist, dann ist x ein Q.

ergeben, und zwar ganz unabhängig davon, wie das 'Wenn... dann...' in 2 logisch repräsentiert wird (ob durch materiale Implikation oder anderweitig).

Zudem sollte Aussagesatz 1 notwendigerweise denselben Wahrheitswert haben wie

3. Die Menge der P-Dinge ist eine Teilmenge der Menge der Q-Dinge.

Daraus folgt, dass auch 2 und 3 notwendigerweise denselben Wahrheitswert aufweisen müssen.

Es zeigt sich nun, dass sich genau dies durch die Repräsentierung des 'wenn... dann...' mittels der materialen Implikation $\rightarrow$ ergibt:

4. $\forall x(P(x) \to Q(x))$ ("Für alle x gilt: $P(x)$ impliziert material $Q(x)$") hat notwendigerweise denselben Wahrheitswert wie $\{x\colon P(x)\} \subseteq \{x\colon Q(x)\}$ ("Die Menge der P-Dinge ist eine Teilmenge der Menge der Q-Dinge").

Dies lässt sich leicht semantisch nachweisen: Wenn $\forall x(P(x) \to Q(x))$ nämlich wahr ist bei einer Interpretation, dann muss dabei auch $\varphi(P) \subseteq \varphi(Q)$ gelten, und umgekehrt. Objekte $\sigma(x)$ im Gegenstandsbereich, für die $P(x)$ falsch ist unter einer Interpretation sowie einer Variablenbelegung σ, führen aufgrund der Wahrheitstafel der materialen Implikation sowieso immer zur Wahrheit von $P(x) \to Q(x)$ und spielen insofern keine Rolle. Entsprechend muss man auch keine $\neg P$-Objekte untersuchen, wenn man prüfen will, ob die Menge der P-Dinge eine Teilmenge der Menge der Q-Dinge ist. Die Objekte $\sigma(x)$ im Gegenstandsbereich jedoch, für die $P(x)$ wahr ist, spielen eine Rolle, weil sich für sie der Wahrheitswert von $P(x) \to Q(x)$ als wahr (Zeile 1 der materialen Wahrheitstafel) oder aber als falsch (Zeile 2 der materialen Wahrheitstafel) erweisen kann, und zwar in Abhängigkeit vom Wahrheitswert von $Q(x)$. Die Zuordnung von w im ersten Fall und von f im zweiten Fall, wie sich dies durch die Wahrheitstafel der materialen Implikation ergibt, führt genau dazu, dass die Äquivalenzaussage 4 von oben der Fall ist.

Dies heißt nun zwar *nicht*, dass die Analyse des 'wenn... dann...' mittels materialem $\to$ die *einzig* mögliche Analyse wäre, aus der sich die intendierte Konsequenz 4 ergibt, aber die Überlegung zeigt doch, dass die materiale Auffassung von Konditionalen in diesem Fall zu der gewünschten semantischen Folgerung führt, wie eben 4 von vorher.

Hier ist ein ähnliches prädikatenlogisch motiviertes Argument für die materiale Repräsentierung des 'wenn... dann...': Intuitiv sollte sich

5. Nicht für alle x gilt: A

als logisch äquivalent zu

6. Es gibt wenigstens ein x, für das gilt: $\neg A$

erweisen. In der Tat ergibt sich genau dies mit den semantischen Regeln in Kapitel 10 für $\forall$, $\exists$ und $\neg$:

7. $\neg\forall x A$

stellt sich in der Tat beweisbarerweise als logisch äquivalent zu

8. $\exists x \neg A$

heraus.

Nun setzen wir für A speziell die Formel $(P(x) \to Q(x))$ ein: Die Formel

9. $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$

ist dann entsprechend logisch äquivalent mit

10. $\exists x\neg(P(x) \to Q(x))$

wobei bislang noch nicht eingegangen ist, dass $\to$ bei uns für die materiale Implikation steht.

Aufgrund der Wahrheitstafel für die materiale Implikation ist nun aber wiederum

11. $\neg(P(x) \to Q(x))$

logisch äquivalent mit

12. $(P(x) \land \neg Q(x))$

sodass sich

13. $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$

unter der materialen Deutung von Implikationssätzen als logisch äquivalent zu

14. $\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$

herausstellt. *Und genau so sollte es auch sein!* Denn 13 heißt in Worten

15. Es ist nicht der Fall, dass alle P-Dinge Q-Dinge sind.

und 14 bedeutet

16. Es gibt etwas, das P aber nicht Q ist.

15 und 16 sind aber auch intuitiv miteinander logisch äquivalent. Die Repräsentierung des 'wenn... dann...' mittels materialer Implikation führt also erneut zu der genau richtigen und intendierten Folgerung.

Wiederum ließe sich diese Konsequenz vielleicht auch auf Basis einer anderen logischen Analyse des 'wenn... dann...' erzielen, aber dies müsste erst einmal gezeigt werden. Jedenfalls heißt dies, dass die materiale Implikation einige Eigenschaften besitzt, welche diese logische Verknüpfung auch aus prädikatenlogischer Sicht als attraktive Repräsentierung des indikativen 'wenn-dann' der natürlichen Sprache erscheinen lassen.

Kapitel 13

Erweiterungen der Prädikatenlogik

13.1 Das Identitätsprädikat als neues logisches Zeichen

Wie in Kapitel 9 behandelt, umfassen die logischen Zeichen unserer prädikatenlogischen Sprachen die aussagenlogischen Junktoren, die beiden Quantoren und die Individuenvariablen. Diese Zeichen sind auch im Alphabet einer prädikatenlogischen Sprache stets vorhanden, ganz egal wie man diese Sprachen sonst durch die Wahl der Individuenkonstanten und der Prädikate anlegen möchte. Nun gibt es aber auch ein spezielles *Prädikat*, das ebenfalls einen logisch-formalen Charakter hat, und von dem man daher sehr oft ebenfalls voraussetzen will, dass es als weiteres logisches Zeichen unter den stets vorhanden logischen Zeichen in einer prädikatenlogischen Sprache vorkommen soll: Das zweistellige Identitätsprädikat

$$=$$

In diesem Kapitel werden wir entsprechend dieses Zeichen den Alphabeten unserer prädikatenlogischen Sprachen als neues logisches Symbol hinzufügen. Wir werden sodann alle bisher formulierten Regeln – syntaktische Formations- oder Bildungsregeln für Formeln, semantische Regeln für Formeln und die Herleitungsregeln für Formeln – um spezifische Regeln für Identitätsformeln erweitern. Das dabei entstehende logische System werden wir dann *Prädikatenlogik mit Identität* nennen.

Identitätsformeln sind atomare Formeln, die ausdrücken, dass das Objekt, welches durch einen singulären Term bezeichnet wird, mit dem Objekt, das durch einen weiteren singulären Term bezeichnet wird, identisch ist. Gemäß unserer syntaktischen Formationsregeln für atomare Formeln, müssten wir nun beispielsweise

- $=(a, b)$
- $=(x, y)$
- $=(a, x)$

schreiben, wobei hier wie immer a, b Individuenkonstanten und x, y Individuenvariablen sind. Dies entspricht jedoch in keiner Weise den üblichen natursprachlichen Konventionen für die Formulierung von Identitätssätzen, wie sie zum Beispiel aus der Mathematik bekannt sind. Daher fügen wir unseren Formationsregeln stattdessen die folgende spezielle Klausel hinzu:

- Wenn t_1, t_2 singuläre Terme sind, so ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

die dafür sorgt, dass die beiden singulären Terme, auf die das Identitätsprädikat angewandt wird, das Identitätsprädikat sozusagen *in die Mitte nehmen.*

Betrachten wir dazu einige Beispiele:

(i) $a = b$

(ii) $x = y$

(iii) $a = x$

(iv) $y = c$

(v) $P = x$

(vi) $(a = b)$

(vii) $=(x, a)$

(i), (ii), (iii) und (iv) sind dann Formeln, (v), (vi) und (vii) hingegen nicht, weil in (v) P ein genereller Term ist und kein singulärer, in (vi) Klammern um die Identitätsformel gesetzt wurden, was nicht der obigen syntaktischen Regel für solche Formeln entspricht, und weil in (vii) die neue syntaktische Regel für Identitätsformeln überhaupt nicht berücksichtigt wurde.

Wenn wir ein neues logisches Zeichen einführen – und auch ein logisches Prädikat ist ein logisches Zeichen – so müssen wir dessen Bedeutung durch fest vorgegebene semantische Regeln festlegen. In unserer prädikatenlogischen Semantik fügen wir entsprechend die folgende Klausel zur Definition von prädikatenlogischen Bewertungen (nun mit Identität) hinzu:

- $\varphi_\sigma(t_1 = t_2) = w$ gdw $\varphi_\sigma(t_1) = \varphi_\sigma(t_2)$.

Man beachte dabei, dass wir links '=' schreiben, um das objektsprachliche Identitätszeichen zu bezeichnen, während wir rechts '=' schreiben, um metasprachlich die Identitätsrelation auszudrücken. Wenn man dies noch klarer machen wollte, könnte man auf der linken Seite beispielsweise zu einem neuen Zeichen greifen (z.B. '$\equiv$'), aber durch den Kontext wird ohnehin immer klar werden, was gemeint ist.

Die neue semantische Regel für die Identität stellt sicher, dass das Identitätszeichen der Objektsprache auch wirklich ausdrückt, dass etwas mit etwas weiterem identisch ist. Anders als bei nicht-logischen Prädikaten wird die Interpretation von $=$ nicht "willkürlich" mittels einer einer Interpretationsfunktion φ festgelegt, stattdessen ist es eine "feste" semantische Regel, die dafür sorgt, dass das Identitätsprädikat immer die Identitätsbeziehung ausdrückt, und zwar ganz egal welcher Gegenstandsbereich D durch die Wahl einer prädikatenlogischen Interpretation zugrundegelegt wird.

Nun können wir etwa überprüfen, ob die Formel $\forall x\, x = x$ logisch wahr ist. In einer beliebigen Interpretation $\mathfrak{I}$ und für eine beliebige Variablenbelegung σ unter $\mathfrak{I}$ ist die Formel $x = x$ offensichtlich wahr – d.h., erhält den Wahrheitswert w – einfach weil $\sigma(x)$ natürlich mit sich selbst identisch ist, egal welches Objekt im Gegenstandsbereich durch σ der Variable x zugeordnet wird. Die Formel $\forall x\, x = x$ ist also logisch wahr.

Genauso kann ein und dasselbe Objekt durch zwei verschiedene Variablen benannt werden, wenn die beiden Variablen durch die vorgegebene Variablenbelegung σ auf dasselbe Objekt abgebildet werden. Und es ist möglich, das zwei verschiedene Individuenkonstanten a und b unter der vorgegebenen Interpretation dasselbe Objekt bezeichen – formal: $\varphi(a) = \varphi(b)$ – wodurch dann die Formel $a = b$ als wahr in dieser Interpretation herauskäme. Dies würde sich bei der Repräsentierung von Eigennamen in der natürlichen Sprache dann ergeben, wenn diese Eigennamen genau dasselbe Objekt bezeichnen; man denke beispielsweise an 'Samuel Clemens' und 'Mark Twain'. Wenn diese beiden Eigennamen durch a und b repräsentiert werden, soll ja $a = b$ als wahr herauskommen. Wenn a unter φ Mark Twain bezeichnet, c aber durch φ auf Bertrand Russell abgebildet wird, dann ist in dieser Interpretation die Formel $a = c$ falsch, erhält also den Wert f.

Schließlich erweitern wir unsere Herleitungsordnung um spezielle Regeln für unser neues logisches Zeichen $=$. Dazu führen wir zwei neue Grundschlussregeln ein:

(REF) $\vdash \forall v\, v = v$ (Reflexivität)

(SUB) $\vdash \forall v_1 \forall v_2 (v_1 = v_2 \wedge A[v_1/v_3] \to A[v_2/v_3])$ (Substitution) wobei in (SUB) die Variablen v_1 und v_2 wie immer frei für v_3 in A sein sollen. Beide dieser Regeln sind prämissenfrei; man nennt solche Regeln dann auch 'Axiome'.

Es ist intuitiv klar, dass die Identitätsrelation eine sogenannte *Äquivalenzrelation* ist. Eine Äquivalenzrelation R besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x\, xRx$ (Reflexivität)
2. $\forall x \forall y(xRy \to yRx)$ (Symmetrie)
3. $\forall x \forall y \forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)$ (Transitivität)

Wir setzen dabei R zwischen die nämlichen Variablen, so wie wir das auch bei $=$ getan haben. Syntaktisch ist R jedoch wieder nichts anderes als einfach ein zweistelliges Prädikat.

Wir wollen nun zeigen, dass unsere Identitätsrelation diese Eigenschaften besitzt, und zwar mit Hilfe der hinzugefügten Regeln bzw. Axiome von oben:

- $\vdash \forall x\, x = x$ (Reflexivität)

  1. $\forall x\, x = x$ (REF)

- $\vdash \forall x \forall y(x = y \to y = x)$ (Symmetrie)

  1. $\|\ x = y$ (KB-Annahme)
  2. $\|\ \forall x\, x = x$ (REF)
  3. $\|\ x = x$ 2. (UB)
  4. $\|\ \forall x \forall y(x = y \wedge x = x \to y = x)$ (SUB)
  5. $\|\ \forall y(x = y \wedge x = x \to y = x)$ 4. (UB)
  6. $\|\ x = y \wedge x = x \to y = x$ 5. (UB)
  7. $\|\ x = y \wedge x = x$ 1., 3. (KON)
  8. $\|\ y = x$ 7., 6. (MP)
  9. $x = y \to y = x$ 1.–8. (KB)
  10. $\forall y(x = y \to y = x)$ 9. (UE)
  11. $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$ 10. (UE)

Dabei ist in der Anwendung von (SUB) in 4. die Formel A genau die Formel $z = x$, die Variable v_1 die Variable x, die Variable v_2 die Variable y, und die Variable v_3 die Variable z. $A[v_1/v_3]$ ist dann in der Tat $x = x$, und $A[v_2/v_3]$ ist wie gewünscht $y = x$. Die Variablenbedingung (VB) ist bei den Anwendungen von (UE) in 10. und 11. erfüllt, weil die relevanten Variablen y und x dabei in den Konklusionen dieser Anwendungen in 10. und 11. nicht mehr frei vorkommen.

Das Transitivitätsgesetz

- $\vdash \forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \rightarrow x = z)$ (Transitivität)

lässt sich ganz analog zeigen: Die entscheidende Anwendung von (SUB) führt dabei zur Herleitung von

$$\forall y \forall z(y = z \land x = y \rightarrow x = z)$$

wobei die Formel A hier die Formel $x = x_4$ ist, die Variable v_1 die Variable y, die Variable v_2 die Variable z, und die Variable v_3 die Variable x_4. $A[v_1/v_3]$ ist dann entsprechend $x = y$, und $A[v_2/v_3]$ ist wie gewünscht $x = z$. Die von den beiden Allquantorausdrücken eingebettete Implikationsformel erhält man anschließend mittels (UB), die Formeln $y = z$ und $x = y$ erhält man mittels KB-Annahmen, sodass man dann wie schon im letzten Beispiel mit Anwendungen von (KON) und (MP) auf die Formel $x = z$ schließen kann, um schießlich den konditionalen Beweis beenden und die nötigen Allquantoren wieder mittels (UE) einführen zu können.

Mit Hilfe des neu eingeführten Identitätszeichens lassen sich nun auch Sätze in der prädikatenlogischen Sprache repräsentieren, welche bisher nicht ohne weiteres repräsentierbar waren; dies sind Sätze mit sogenannten *Anzahlquantoren*.

Unser Existenzquantor drückt ja aus, dass es *mindestens einen* Gegenstand (im jeweiligen Gegenstandsbereich) gibt, der eine bestimmte Eigenschaft hat. Wenn wir aber ausdrücken wollen, dass es *höchstens* oder *genau* einen solchen Gegenstand gibt, der eine bestimmte Eigenschaft hat, so kommen wir mit dem Existenzquantor alleine nicht aus, wir benötigen dazu auch das Identitätszeichen. Betrachten wir dazu die folgenden Beispielsätze:

- Es gibt mindestens einen Papst.
- Es gibt höchstens einen Papst.
- Es gibt genau einen Papst.

Der erste dieser Sätze wird – wie bereits bekannt – wie folgt repräsentiert:

- $\exists x P(x)$

Um die beiden letzten Sätze repräsentieren zu können, müssen wir wissen, wie wir die beiden Phrasen 'es gibt höchstens einen' und 'es gibt genau einen' in der prädikatenlogischen Sprache repräsentieren sollen. Dazu legen wir Folgendes fest:

- $\exists \mathrm{h}1 v_1 A :\leftrightarrow \exists v_2 \forall v_3 (A[v_3/v_1] \rightarrow v_2 = v_3)$
- $\exists ! v A :\leftrightarrow \exists v A \wedge \exists \mathrm{h}1 v A$

Die erste Formel besagt, dass es ein Objekt gibt, sodass alles, was die Eigenschaft A hat, identisch mit diesem ist ist. Das heisst aber, dass es entweder gar kein Objekt gibt, das die Eigenschaft A hat (dann ist der Wenn-Dann-Teil trivialerweise wahr), oder dass es genau ein Objekt gibt, das diese Eigenschaft hat. Kurz: Es gibt *höchstens* ein A-Objekt. In der zweiten Formel wird dem dann noch hinzugefügt, dass es auch wirklich ein A-Objekt gibt. Das ergibt zusammengenommen die *eindeutige Existenz* eines A-Objektes: *es gibt genau ein* Objekt, welches die Eigenschaft A hat.

Nun können wir die beiden letzten Sätze von oben wie folgt repräsentieren:

- $\exists \mathrm{h}1 P(x)$
- $\exists ! x P(x)$

Und dies sind dann nur Abkürzungen für:

- $\exists y \forall z (P(z) \rightarrow y = z)$
- $\exists x P(x) \wedge \exists y \forall z (P(z) \rightarrow y = z)$

Es gibt jedoch auch Sätze, die von der Existenz von mehr als nur von einem Gegenstand sprechen:

- Es gibt mindestens zwei Erzbischöfe in Österreich.
- Es gibt höchstens zwei Bischöfe in Salzburg.
- Es gibt genau zwei ordentliche Professoren/Professorinnen am Fachbereich Philosophie Salzburg.

Wir wollen dazu die folgenden Abkürzungsregeln einführen:

- $\exists 2 v_1 A :\leftrightarrow \exists v_2 \exists v_3 (v_2 \neq v_3 \wedge A[v_2/v_1] \wedge A[v_3/v_1])$
- $\exists \mathrm{h}2 v_1 A :\leftrightarrow \exists v_2 \exists v_3 \forall v_4 (A[v_4/v_1] \rightarrow v_2 = v_4 \vee v_3 = v_4)$

- $\exists!2vA :\leftrightarrow \exists 2vA \land \exists \mathrm{h}2vA$

(Wir schreiben dabei kurz $t_1 \neq t_2$ für die Formel $\neg\, t_1 = t_2$.)

Dies ermöglicht uns, die obigen Sätze wie folgt zu repräsentieren:

- $\exists 2xE(x, o)$
- $\exists \mathrm{h}2xB(x, s)$
- $\exists!2O(x, f)$

Wenn wir von jeweils drei Gegenständen sprechen wollen – mindestens drei, höchstens drei, und genau drei – so verwenden wir die folgenden Abkürzungen:

- $\exists 3v_1A :\leftrightarrow \exists v_2\exists v_3\exists v_4(v_2 \neq v_3 \land v_2 \neq v_4 \land v_3 \neq v_4 \land A[v_2/v_1] \land A[v_3/v_1] \land A[v_4/v_1])$
- $\exists \mathrm{h}3v_1A :\leftrightarrow \exists v_2\exists v_3\exists v_4\forall v_5(A[v_5/v_1] \to v_2 = v_5 \lor v_3 = v_5 \lor v_4 = v_5)$
- $\exists!3vA :\leftrightarrow \exists 3vA \land \exists \mathrm{h}3vA$

Allgemein: Entsprechende Abkürzungen lauten für ein beliebiges n so:

- $\exists nv_1A :\leftrightarrow \exists v_2\exists v_3 \ldots \exists v_{n+1}(v_2 \neq v_3 \land v_2 \neq v_4 \land \ldots \land v_2 \neq v_{n+1} \land \ldots \land v_n \neq v_{n+1} \land A[v_2/v_1] \land A[v_3/v_1] \land \ldots \land A[v_{n+1}/v_1])$
- $\exists \mathrm{h}nv_1A :\leftrightarrow \exists v_2\exists v_3 \ldots \exists v_{n+1}\forall v_{n+2}(A[v_{n+2}/v_1] \to v_2 = v_{n+2} \lor v_3 = v_{n+2} \lor \cdots \lor v_{n+1} = v_{n+2})$
- $\exists!nvA :\leftrightarrow \exists nvA \land \exists \mathrm{h}nvA$

Es lässt sich auch unschwer erkennen, dass manche logische Wahrheiten, die Existenzquantoren und das Identitätsprädikat enthalten, implizit arithmetische Wahrheiten ausdrücken: Z.B. lässt sich

- $\neg\exists x(P(x) \land Q(x)) \land (\exists!2xP(x) \land \exists!2xQ(x)) \to \exists!4x(P(x) \lor Q(x))$

auf Basis unserer erweiterten Semantik für die Prädikatenlogik mit Identität als logische Wahrheit nachweisen: Die Formel ist wahr in jeder Interpretation und bei jeder Variablenbelegung. Dabei besagt die Formel aber nichts anderes als: Wenn sich die Menge der P-Dinge und die Menge der Q-Dinge nicht überlappen, und genau zwei P-Dinge und genau zwei Q-Dinge existieren, dann enthält die Menge der Dinge, die P oder Q sind, genau vier Elemente. Oder anders ausgedrückt: $2 + 2 = 4$.

Kein Wunder, dass Philosophen wie Frege nachzuweisen trachteten, dass sich alle arithmetischen Wahrheiten auf logische Wahrheiten zurückführen ließen! (Dennoch betrachtet man dieses Programm des sogenannten *Logizismus* heute als gescheitert: Weshalb das so ist, wird in Einführungsbüchern zur Philosophie der Mathematik wie z.B. [10] behandelt.) Man sollte dabei allerdings beachten, dass der obige logisch wahre Satz mit Anzahlquantoren einerseits und der arithmetische Satz $2 + 2 = 4$ andererseits *syntaktisch* ganz unterschiedlich gebaut sind – wie man mathematische Sätze so prädikatenlogisch repräsentieren kann, dass deren Syntax dabei erhalten bleibt, behandeln wir gleich in der nächsten Sektion.

Abgesehen von Sätzen mit Anzahlquantoren, erfahren auch Sätze wie

- Peter existiert.
- Alles existiert.

nun bequeme Repräsentierungen mittels des Identitätszeichens:

- $\exists x\, x = p$
- $\forall x \exists y\, y = x$

Beide dieser Formeln sind logische Wahrheiten, was semantisch gesehen daran liegt, dass sowohl Individuenkonstanten als auch Individuenvariablen in der Semantik der Prädikatenlogik immer etwas bezeichnen. Selbstverständlich lassen sich auch beide dieser Formeln mit Hilfe von (REF) und (SUB) ohne Prämissen herleiten, d.h. diese Formeln sind beweisbar in der Prädikatenlogik mit Identität. Zum Beispiel im ersten Falle (in dem p eine Individuenkonstante in der vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache ist):

- $\vdash \exists x\, x = p$

  1. $\forall x\, x = x$ (REF)
  2. $p = p$ 1. (UB)
  3. $\exists x\, x = p$ 2. (EE)

In der Anwendung von (EE) in Zeile 3 ist t die Individuenkonstante p, v die Variable x und A die Formel $x = p$: $A[t/v]$ ist dann entsprechend die Formel $p = p$, die in Zeile 2. hergeleitet wurde.

Wir sehen also, dass die Einführung eines logischen Identitätszeichen auch für die Repräesentierung natursprachlicher Sätze und Argumente höchst nützlich ist.

13.2 Andere sprachliche Erweiterungen von prädikatenlogischen Sprachen

Es gibt noch weitere Möglichkeiten, den Zeichenreichtum der prädikatenlogischen Sprachen zu erweitern, ohne dabei deren extensionalen Charakter zu verändern. Insbesondere erlauben manche Autoren, dass singuläre Terme *komplex* gebaut sind. In der Mathematik ist zum Beispiel die Rede von:

- Summe von 2 und 4
- Produkt von 2 und 4

Um die Struktur solcher singulären Terme in der prädikatenlogischen Sprache adäquat repräsentieren zu können, ist es möglich, sogenannte *Funktionsterme* einzuführen, etwa

- $s(2, 4)$
- $p(2, 4)$

bzw., leicht reformuliert:

- $2 + 4$
- $2 \cdot 4$

Um solche singulären Terme einführen zu können, muss im wesentlichen nur die Definition von 'singulärer Term' in den prädikatenlogischen Sprachen etwas liberalisiert werden. Die Semantik wird dann ein klein weniger komplexer, und bei Substitutionen in Herleitungen lassen sich nun auch Funktionsterme für Variablen einsetzen. Ansonsten verändert sich aber nicht viel. Unter Verwendung unseres neues Identitätsprädikats, und gegeben die übliche Interpretation der Zahlzeichen, kämen dann beispielsweise die folgenden Formeln als wahr heraus:

- $2 + 4 = 6$
- $8 = 2 \cdot 4$

Genauso gibt es eine weitere Gattung singulärer Terme, die von Bertrand Russell berühmt gemacht wurden[1] – die sogenannten *Kennzeichnungen* bzw. im Englischen: *definite descriptions*. Dabei werden Gegenstände benannt, indem dieselben *beschrieben* werden. Beispiele für solche Kennzeichnungen wären etwa:

[1] Siehe [9].

- der gegenwärtige König von Frankreich
- der Papst
- der Kölner Dom
- der Bundespräsident von Österreich
- die Zahl, die kleiner als sechs und größer als vier ist
- die Zahl, die kleiner als sechs und größer als drei ist
- der Autor der *Principia Mathematica*
- die Sonne unseres Sonnensystems
- der deutsche Bundestagsabgeordnete

Obwohl man kommunikativ intendiert, dass eine Kennzeichnung *genau ein* Objekt bezeichnet, sehen wir an einigen dieser Beispiele, dass dies auch "schiefgehen" kann – dass Kennzeichnungen, im Gegensatz zu unsere Annahme für singuläre Terme in der Prädikatenlogik, nicht unbedingt *genau einen* Gegenstand bezeichnen müssen. Es kann nämlich auch der Fall sein, dass *kein Gegenstand* oder aber *mehrere Gegenstände* die sogenannte *Basis* der Kennzeichnung erfüllen, also den sprachlichen Ausdruck, der auf den definiten Artikel folgt. Es ist klar, dass dies die syntaktische und semantische Behandlung von Kennzeichnungen nicht ganz einfach macht. Wie Russell freilich gezeigt hat, lässt sich eine befriedigende Repräsentierung von solchen Kennzeichnungen rein mit Hilfe der aussagenlogischen Junktoren, der beiden Quantoren und des Identitätszeichens gewährleisten. Aussagesätze mit Kennzeichnungen lassen sich also schon *innerhalb der Prädikatenlogik mit Identität* formalisieren, semantisch interpretieren und in Herleitungen verwenden. Dieses Thema, welches letztlich tief in die Sprachphilosophie führt (siehe z.B. [13]), geht allerdings über die Ziele und Zwecke dieses Buches hinaus.

Kapitel 14

Epilog

Hannes Leitgeb trifft wiederum Herrn P auf der Straße.

H: Servus!

P: ...

H: (Nicht überrascht, doch nun laut) *Grüß Dich, P!!*

P: (Aufblickend) Entschuldige vielmals: Ich denke gerade über ein philosophisches Problem nach, das mich seit Wochen beschäftigt. Aber noch wichtiger: Wie steht es denn um dein Büro?

H: Alles glücklich erledigt. Mein Büro ist möbliert und mit einem Computer versehen, das Sekretariat funktioniert wunderbar, und ich verirre mich auch nicht mehr auf dem Weg dahin. Was will man mehr? Du brauchst Dich also jetzt nicht mehr vor dem Nichts in meinem Büro zu fürchten. (Grinst)

P: Davor könnte ich mich gar nicht fürchten. Es ist nicht der Fall, dass es ein x gibt, das damals in deinem Büro war, aber ist es sehr wohl so, dass es ein x gibt, das jetzt in deinem Büro ist. Na und? Was ist daran beunruhigend?

H: (Erstaunt) Äh, entschuldige, ich dachte nur.

P: Kein Problem. Hast du Dir übrigens deinen alten Schreibtisch noch liefern lassen?

H: Nein, letztlich ist es doch ein neuer Schreibtisch geworden. Es war mir einfach zu gefährlich, die Eigenschaften des alten Schreibtischs zu verändern: Dann hätte er ja vielleicht zugleich zueinander widersprüchliche Eigenschaften bekommen können, und dann hätte jeder beliebige Satz gefolgert werden können, und wer weiß, was dann passiert wäre? (Grinst wieder)

P: Du machst Dich wohl ein wenig lustig über mich. Aber ich verstehe, was du meinst: Hätte dein alter Schreibtisch wirklich zugleich die Eigenschaft P und die Eigenschaft nicht-P gehabt, dann wären also Sätze der Form $P(a)$ und $\neg P(a)$ der Fall gewesen. Und aus diesen beiden Sätzen ließe sich mittels der *Ex Contradictione Quodlibet* Regel jeder beliebige Satz B logisch folgern. Man bräuchte übrigens zu diesem Zwecke diese Regel gar nicht anzuwenden: Nimm einfach $\neg B$ an und beginne einen indirekten Beweis: Mit Hilfe der Konjunktionsregel lässt sich dann auf Basis unserer beiden Prämissen der Satz $P(a) \wedge \neg P(a)$ herleiten. Das ist ein Widerspruch: Also dürfen wir den indirekten Beweis beenden und auf B schließen. Fertig! Die Regel für den indirekten Beweis und die Konjunktionsregel sind also schon ausreichend, um das, was du vorhin geäußert hast, rekonstruieren zu können. Aber natürlich hat das alles nichts mit deinem alten Schreibtisch zu tun: Der hätte gar nicht zugleich eine Eigenschaft P und die Eigenschaft nicht-P haben können. Was du meintest war wohl: Er hätte zum Zeitpunkt t die Eigenschaft P, zu einem anderen Zeitpunkt t' aber die Eigenschaft nicht-P haben können. Nur ist daran nichts Widersprüchliches: $P(a, t)$ und $\neg P(a, t')$ können ohne Probleme beide wahr sein, und natürlich folgt aus den beiden zusammengenommen nicht jedes beliebige B...

H: (Mit offenem Mund) Ich...

P: Du solltest Dich etwas klarer ausdrücken in Zukunft.

H: ... erkenne Dich gar nicht wieder.

P: Lassen wir das. Erzähl weiter.

H: Ich habe wirklich nur Spaß gemacht. Das Problem mit meinem alten Schreibtisch war in der Tat ein anderes. Die Überlegung war diese: Wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, dann stelle ich ihn gerne in mein Büro. Und *nur* wenn mein alter Schreibtisch von daheim mit dem Lastwagen geliefert wird, stelle ich ihn in mein Büro.

P: Anders ausgedrückt, du dachtest: Deinen alten Schreibtisch von daheim stellst du ins Büro genau dann, wenn er mit dem Lastwagen geliefert wird. Lass mich raten: Es hat nicht geklappt, ihn mit dem Lastwagen liefern zu lassen?

H: Genau. Ich frage mich aber immer noch, wieso du heute...

P: Ich wollte nicht unterbrechen. Wo in deinem Büro hast du denn nun deinen neuen Schreibtisch aufgestellt?

H: Nanu: Das ist ja gar keine philosophische Frage!?

P: (Verwundert) Natürlich nicht. Wir unterhalten uns doch nur über dein Büro und seine Eigenschaften. Entweder du hast deinen neuen Schreibtisch links im Büro aufgestellt oder eben nicht links – eine der beiden Möglichkeiten muss der Fall sein. Das ist ja schon logisch wahr.

H: Du erstaunst mich heute jedesmal aufs Neue.

P: Jetzt möchte ich aber doch noch wissen, welche der beiden Möglichkeiten eingetreten ist.

H: Ah: Weil du immer noch glaubst, dass ganz allgemein die Wahrheit von

Sätzen von unserem Wissen über die Sätze abhängig ist?

P: Unsinn, die Wahrheit dieser Sätze hat doch nichts mit meinen inneren Zuständen zu tun. Nein, einfach weil ich neugierig bin, wenn das o.k. ist.

H: Natürlich ist es das, entschuldige bitte. Die Antwort ist: Ich habe meinen neuen Schreibtisch nicht links aufgestellt, sondern in der Mitte meines Büros. Ist das ausreichend beantwortet?

P: Es ist wahr...

H: Ha! Fragen sind keine Aussagesätze, also können sie gar nicht wahr oder falsch sein, und...

P: Du hast mich unterbrochen: Es ist wahr, dass es nicht ideal ist, wenn ein Schreibtisch nicht zentral in einem Büro steht.

H: Ach so. Ja. Genau.

P: Und bei der geplanten Lokalität ist es auch geblieben: Die Ludwigstrasse 31 ist der Ort des Gebäudes, in dem sich dein Büro befindet?

H: So ist es. Du kannst mich also auch leicht besuchen kommen: Die Ludwigstrasse 31 ist ja gleich um die Ecke...

P: ... und weil die Ludwigstrasse 31 diese Eigenschaft hat, und die Ludwigstrasse 31 identisch dem Ort des Gebäudes ist, in dem sich dein Büro befindet, muss dasselbe auch für den Ort des Gebäudes gelten, in dem sich dein Büro befindet. Ich weiss.

H: (Wieder mit offenem Mund) Das hätte ich nicht besser sagen können.

P: Ich weiss. Und ich werde Dich sehr gerne sehr oft besuchen kommen.

H: Irgendetwas ist heute anders an dir. Ich frage mich... Hmm: Was ist die logische Form von 'Der Morgenstern ist der Abendstern'?

P: Es handelt sich um einen Identitätssatz.

H: Und von 'Der Morgenstern ist ein Planet'?

P: Ein atomarer Satz, aber kein Identitätssatz.

H: Kann man aus 'Jedes Ereignis hat eine Ursache' logisch folgern 'Es gibt etwas, das alle Ereignisse verursacht'?

P: Natürlich nicht. Das eine ist ein $\forall\exists$ Satz, der andere ein $\exists\forall$ Satz, und es lässt sich leicht zeigen, dass...

H: Wie lautet die Variablenbedingung bei der Regel der universellen Einführung?

P: Die relevante Variable v_1 darf weder in einer der relevanten Prämissen oder Annahmen, noch in der Konklusion frei vorkommen. Soll ich es dir genauer aufschreiben?

H: Nicht nötig. Mein lieber Freund P, du bist überführt – Hand aufs Herz: Du warst in meiner Logik-Vorlesung!!!

P: Natürlich.

H: Natürlich?

P: Natürlich. Jeder Philosoph muss zumindest die Grundzüge der Logik kennen und beherrschen, sonst wird es ihm einfach am klaren Denken und Sprechen mangeln. Und wie soll er – oder sie – dann je etwas zu den wesentlichen philosophischen Fragestellungen beitragen können wie derjenigen, über die ich seit Wochen nachdenke?

H: Jetzt hast Du mich aber neugierig gemacht: Worum handelt es sich denn dabei?

P: Das will ich Dir gerne erklären. Gehen wir doch auf einen Kaffee, nehmen wir ein Blatt Papier zu Hand, und ich kritzle Dir dann auf, was ich meine. Das wollte ich ohnehin tun: Denn es scheint, ich brauche etwas Logik zweiter Stufe, ein wenig einfache Modallogik und ein bisschen etwas zu Abstraktionsprinzipien, um meine neue philosophische These formulieren und für sie argumentieren zu können. Dürfte ich dich gleich dazu befragen?

H: Aber gerne. Wir werden in Zukunft übrigens eine Menge Lehrveranstaltungen zu diesen und anderen logischen Themen anbieten, und diese Lehrveranstaltungen werden allesamt auf meiner Logik 1 - Vorlesung aufbauen.

P: Das hatte ich gehofft. Ich werde mir sicher einiges anhören und einige meiner Studierenden ebenfalls.

H: Das ist nett.

P: Das ist notwendig. Also, dann gehen wir endlich. Wir können auf dem Weg zum Cafe ja schon mal anfangen: Stell Dir vor, jemand wäre ein Idealist und möchte daher annehmen, dass die Existenz aller Dinge von ihm selbst abhängt. Etwa: Für alle Dinge x gilt, es ist notwendigerweise so, dass, wenn x existiert, diese Person ebenfalls existiert. Wie formuliere ich dies nun präzise: $\forall x \Box \ldots$ (Gestikuliert und macht sich auf den Weg)

H: (Murmelt) Das könnte anstrengend werden. (Wischt sich über die Stirn) Aber *gut* anstregend… Hey, warte auf mich! Fangen wir ganz von vorne an: Mit $\Box$ meinst Du metaphysische Notwendigkeit, nehme ich an…

P und H gehen ins Gespräch vertieft über die Strasse. Ein Autofahrer bremst rechtzeitig: Philosophen… denkt er und lächelt.

Stay logical! :-)

Literatur

[1] Åqvist, Lennart (2002): “Deontic Logic”, in: Gabbay, D. M., and F. Guenthner (Hrsg.), *Handbook of Philosophical Logic*, Band 8, Dordrecht: Kluwer, 2002, 147–264.

[2] Hintikka, Jaakko (1962): *Knowledge and Belief : An Introduction to the Logic of the Two Notions*, New York: Cornell University Press.

[3] Hughes, George E., und Max J. Cresswell (1996): *A New Introduction to Modal Logic*, London: Routledge.

[4] Gödel, Kurt (1929): *Über die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Dissertation an der Universität Wien.

[5] Grice, H. Paul (1989): *Studies in the Way of Words.* Harvard: Harvard University Press.

[6] Lambert, Karel (1997): *Free Logics: Their Foundations, Character, and Some Applications Thereof*, Sankt Augustin: Academia.

[7] Nute, Donald (1980): *Topics in Conditional Logic*, Philosophical Studies Series in Philosophy, Band 20, Dordrecht: D. Reidel.

[8] Priest, Graham (2008): *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge: Cambridge University Press.

[9] Russell, Bertrand (1905): “On Denoting”, *Mind* 14/56, 479–493.

[10] Shapiro, Stewart (2000): *Thinking About Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

[11] Skyrms, Brian (1989): *Einführung in die induktive Logik*, Frankfurt am Main: Lang.

[12] Tarski, Alfred (1936): “Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen”, *Studia Philosophica* 1, 261–405.

[13] Taylor, Kenneth A. (1998): *Meaning and Truth*, Oxford: Blackwell.

[14] Ebbinghaus, Heinz-Dieter (2003): *Einführung in die Mengenlehre*, Heidelberg-Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

[15] Wittgenstein, Ludwig (2003): *Tractatus logico-philosophicus, Logisch-philosophische Abhandlung.* Frankfurt am Main: Suhrkamp. (Ursprünglich 1921 erschienen.)